1 Princip indukce

1. Označme sumu na levé straně $L(n)$ a výraz vpravo $P(n)$.
   1. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí ($L(1) = 1^3 = \frac{4}{4} = P(1)$).
   2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n (tj. $L(n) = P(n)$) a dokazujme, že poté platí i pro $n+1$. Tzn. chceme ukázat, že $L(n+1) = P(n+1)$.
   Počítejme: $L(n+1) = L(n) + (n+1)^3 = P(n) + (n+1)^3$ dle indukčního předpokladu. Tedy $L(n+1) = P(n) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \cdot \frac{n^2+4(n+1)}{4} = (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} = P(n+1)$.

2. Podobně jako v předchozím příkladě:
   1. Pro $n = 1$ máme $L(1) = \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}$, $P(1) = \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2}$.
   2. $L(n+1) = L(n) + \frac{(n+1)(n+6)}{(n+3)(n+4)} = P(n) + \frac{(n+1)(n+6)}{(n+3)(n+4)} = \frac{n(n+1)}{n+3} + \frac{(n+1)(n+6)}{(n+3)(n+4)} = \frac{n+1}{n+3} \cdot (n + \frac{n+6}{n+4}) = \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{n^2+4n+n+6}{n+4} = \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{(n+2)(n+3)}{n+4} = \frac{(n+1)(n+2)}{n+4} = P(n+1)$.

3. 1. Pro $n = 2$ máme $L(2) = \frac{1}{4}$, $P(2) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.
   2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n (tj. $L(n) \geq P(n)$) a dokazujme, že poté platí i pro $n+1$.
   $L(n+1) = L(n) + \frac{1}{(n+1)^2} \geq P(n) + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{7}{12} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{7}{12} - \frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{7}{12} - \frac{1}{n+2} = P(n+1)$, neboť předposlední nerovnost plyne z nerovnosti $\frac{1}{n+2} \geq \frac{n}{(n+1)^2}$.

4. 1. Pro $n = 6$ máme $L(6) = 2^6 = 64$, $P(6) = 7^2 = 49$.
   2. $L(n+1) = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2 \cdot L(n) > 2 \cdot P(n) = 2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2$. Z druhé strany $P(n+1) = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$. Protože $n^2 > 2$, máme $2n^2 + 4n + 2 > n^2 + 4n + 4$ a tedy celkem $L(n+1) > 2n^2 + 4n + 2 > n^2 + 4n + 4 = P(n+1)$.

5. Označme $A_n = r^n + \frac{1}{r^n}$. Máme ukázat, že pokud $A_1 \in \mathbb{Z}$, pak i $A_n \in \mathbb{Z}$, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. To dokážeme indukcí vzhledem k n.
   1. Pro $n = 1$ máme $A_1 \in \mathbb{Z}$.
   Zkusme nyní pomocí A_1 vypočítat A_2: $A_2 = A_1^2 - 2$, tj. $A_2 \in \mathbb{Z}$.
   2. Buď nyní $n \geq 2$. Předpokládáme, že pro všechna $k \leq n$ platí $A_k \in \mathbb{Z}$. Chceme ukázat, že $A_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Proto se pokusíme vyjádřit A_{n+1} pomocí A_k pro $k < n+1$.
   Snadno se přesvědčíme, že platí $A_{n+1} = A_1 A_n - A_{n-1}$. Dle indukčního předpokladu $A_1 \in \mathbb{Z}$, $A_{n-1} \in \mathbb{Z}$ a $A_n \in \mathbb{Z}$. Proto i $A_{n+1} = A_1 A_n - A_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

6. Indukcí vzhledem k počtu vrcholů.
   1. Pro $n = 3$ platí.
   2. Nechť tvrzení platí pro n a ukažme, že pak platí i pro $n+1$. Uvažujme tedy konvexní $(n+1)$-úhelník $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$. Rozdělme jej nyní úhlopříčkou $A_1 A_n$ na n-úhelník $A_1 A_2 \dots A_n$ a trojúhelník $A_1 A_n A_{n+1}$. Součet vnitřních úhlů v n-úhelníku $A_1 A_2 \dots A_n$ je dle indukčního předpokladu $\pi \cdot (n-2)$ a součet vnitřních úhlů v trojúhelníku $A_1 A_n A_{n+1}$ je π. Celkem je tedy součet vnitřních úhlů v $(n+1)$-úhelníku $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ roven $\pi \cdot (n-1)$, což jsme měli dokázat.

7. Dokážeme silnější tvrzení o nesousedních vrcholech.
   1. Pro $n = 4$ evidentně platí. (V případdě $n = 3$ "slabší" tvrzení též platí.)
   2. Nechť máme $(n+1)$-úhelník $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, kde $n \geq 4$, a předpokládáme, že tvrzení platí pro libovolný k-úhelník, kde $k \leq n$.
   Uvažme některou sestrojenou úhlopříčku v $(n+1)$-úhelníku $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ (pokud tam, žádná není, tvrzení platí). Tato úhlopříčka, např. $A_i A_j$ rozdělí $(n+1)$-úhelník na dva mnohoúhelníky s menším počtem vrcholů kde $A_i A_j$ je stranou. Ukážeme, že v obou existuje vrchol, různý od A_i i A_j z něhož nevychází žádná úhlopříčka. Pokud je tímto "menším" mnohoúhelníkem trojúhelník, pak je hledaným vrcholem třetí vrchol (různý od A_i a A_j). Pokud je "menším" mnohoúhelníkem k-úhelník, kde $4 \leq k \leq n$, pak můžeme využít indukčního předpokladu. Existují zde tedy dva nesousední vrcholy, z nichž nevychází žádná úhlopříčka. Protože jsou nesousední, je alespoň jeden z nich různý od A_i i A_j. V obou "menších" mnohoúhelnících jsme našli jeden vrchol, z něhož nevychází žádná úhlopříčka. A tyto dva vrcholy jsou nesousední, neboť jsou "odděleny" úhlopříčkou $A_i A_j$.

8. Označme $A_n = l^n \cdot \cos n\gamma$. Dle návodu máme $\cos n\gamma + \cos(n-2)\gamma = 2\cos(n-1)\gamma\cos\gamma$, z čehož po pronásobení l^n dostaneme $A_n + l^2 \cdot A_{n-2} = 2A_{n-1}A_1$ pro libovolné $n > 2$.
1. Pro $n = 1$ platí $A_1 \in \mathbb{Z}$. Dále $A_2 = 2A_1^2 - 1$, tj. $A_2 \in \mathbb{Z}$.
2. Pro $n > 2$, pokud $A_1, A_{n-2}, A_{n-1} \in \mathbb{Z}$ pak dle předchozího vztahu i $A_n \in \mathbb{Z}$.

9. Indukcí vzhledem k $m \cdot n$.
1. Pro 1×1 platí.
2. Pokud máme tabulku $m \times n$ pak po prvním rozlomení dostaneme dvě menší tabulky, a to buď $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, kde $m_1 + m_2 = m$, nebo $m \times n_1$, $m \times n_2$, kde $n_1 + n_2 = n$. Použitím indukčního předpokladu dostaneme celkový počet lámání jako $1 + (m_1 \cdot n - 1) + (m_2 \cdot n - 1) = (m_1 + m_2) \cdot n - 1$ v prvním případě a podobně $m \cdot (n_1 + n_2) - 1$ ve druhém případě.
Jiné řešení je založeno na myšlence, že každé rozlomení tabulky zvýší počet kusů o jeden. Na začátku máme jeden kus a na konci $m \cdot n$ kusů, proto je počet lámání $m \cdot n - 1$. Tvrzení tedy není nutné dokazovat indukcí.

2 Logika a přirozená čísla

1. Napišme tabulku pravdivostních hodnot zadaných výroků.

(a)

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \to B$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

(b)

A	B	$A \wedge B$	$\neg B$	$A \to \neg B$	$\neg(A \to \neg B)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0

(c)

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

(d)

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg g$	$\neg(p \wedge \neg g)$	$\neg q \wedge \neg r$	$\neg(p \wedge \neg g) \wedge (\neg q \wedge \neg r)$	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1

2. Pokud hledáme formuli, jejíž sloupec v tabulce pravdivostních hodnot má v prvním řádku 1 a ve zbylých 0, pak snadno nahlédneme, že takovou formulí je $A \wedge B \wedge C$.
Podobně, pokud hledáme formuli, jejíž sloupec v tabulce pravdivostních hodnot obsahuje právě jednu 1 (např. v šestém řádku), pak lze uvažovat konjunkci příslušných atomických výroků (tj. např. $\neg A \wedge B \wedge \neg C$).
V našem případě je ve sloupci hodnota 1 vícekrát, takže jej budeme uvažovat jako disjunkci příslušných sloupců s jednou hodnotou 1. Tzn. hledaným výrokem je např. $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$.
Z popsaného je zřejmé, že takto lze postupovat pro libovolný sloupec.

3. (a) Pro $\mathbb{C}$ nedává smysl, neb nemáme $<$.
V $\mathbb{R}$ platí; takovým z je například $\frac{x+y}{2}$.
V $\mathbb{Z}$ ani $\mathbb{N}$ neplatí; např. pro $x = 1$, $y = 2$ takové z neexistuje.

(b) V $\mathbb{N}$ neplatí; např. pro $x = 4$, $y = 1$ takové $z \in \mathbb{N}$ neexistuje.
V $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{Z}$ platí; takovým z je vždy $y - x$.

(c) Formule říká, že existuje nejmenší prvek z.
Pro $\mathbb{C}$ nedává smysl.
V $\mathbb{N}$ je takovým prvkem 1.
V $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ neplatí. Platí zde opak, tj. $(\forall z)(\exists x)(\neg(z \leq x))$. Pro libovolné z je takovým prvkem např. $z - 1$.

(d) Formule říká, že existuje nevětší společný dělitel z dvou čísel x, y. To platí v $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. (Pozn.: v $\mathbb{N}$ je jednoznačně určen; v $\mathbb{Z}$ je jednoznačně určen až na znaménko.)
Formule je pravdivá taktéž i v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, protože zde se navzájem dělí všechna nenulová čísla a cokoli dělí nulu. Proto zde lze za nevětšího společného dělitele brát 1 nebo 0.

(e) Formule vyjadřuje existenci "nulového prvku". Číslo 0 je takové x, a formule je tedy splněna v $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$. Není splněna v $\mathbb{N}$, kde prvek 0 není a žádný jiný prvek $x \in \mathbb{N}$ nemůže splňovat $x + y = y$, neboť pro $x, y \in \mathbb{N}$ máme $x + y > y$.

4. (a) $(\exists x)(\exists y)(x < y \wedge (\forall z)(\neg(x < z) \vee \neg(z < y))$. Odpověď $(\exists x)(\exists y)(x < y \wedge (\forall z)(z \leq x \vee y \leq z))$ není zcela správná, protože o relaci $<$ nevíme, že je to "uspořádání podle velikosti" i když v tomto příkladě jsme ji tak interpretovali.

(b) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(x + z \neq y)$

(c) $(\forall z)(\exists x)(\neg(z \leq x))$. Komentář viz (a).

(d) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(z \not| x \vee z \not| y \vee (\exists u)(u|x \wedge u|y \wedge \neg(u|z)))$

(e) $(\forall x)(\exists y)(y + x \neq y \vee x + y \neq y)$

5. (a) Nejdříve vytvoříme formuli, která o p říká, že je prvočíslo. Dle definice je p prvočíslo právě tehdy, když není 1 a má pouze triviální dělitele (1 a sebe sama). Formulí:

$$Prv(p) \equiv (p \neq 1) \wedge (\forall x)(x|p \implies (x = 1 \vee x = p)).$$

Hledaná formule tedy je, že každé číslo je dělitelné prvočíslem: $(\forall y)(\exists p)(Prv(p) \wedge p|y)$ tzn. jde o formuli $(\forall y)(\exists p)((p \neq 1) \wedge (\forall x)(x|p \implies (x = 1 \vee x = p)) \wedge p|y)$.
V $\mathbb{N}$ to neplatí. Číslo 1 není dělitelné prvočíslem.

(b) Podobně jako u největšího společného dělitele. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x|z \wedge y|z \wedge (\forall u)((x|u \wedge y|u) \to z|u))$.

6. Implikace $(\forall x)(\exists y)f(x, y) \implies (\exists y)(\forall x)f(x, y)$ neplatí; stačí vzít příklad, který byl již dříve: $(\forall x)(\exists y)(x \leq y)$ platí např. v $\mathbb{N}$, ale $(\exists y)(\forall x)(x \leq y)$ v $\mathbb{N}$ neplatí, neboť zde není největší prvek.
Implikace $(\exists y)(\forall x)f(x, y) \implies (\forall x)(\exists y)f(x, y)$ platí.

7. Uvažujme množinu $M = \{a - bx \geq 0 | x \in \mathbb{Z}\}$. Vidíme, že M je neprázdná: pro $a \geq 0$ volba $x = 0$ dá $a \in M$; pro $a < 0$ volba $x = -a$ dá $a(1 - b) \in M$. Vezměme nejmenší prvek $a - by$ v množině M. Takový prvek jistě existuje, protože se jedná o neprázdnou podmnožinu množiny všech přirozených čísel.
Pokud by $b \leq a - by$, odečtením b od obou stran nerovnosti dostaneme $0 \leq a - b(y + 1)$, ale protože $a - b(y + 1) < a - by$ jsme ve sporu s tím, že $a - by$ je nejmenší prvek v M.
Dostáváme tedy, že $0 \leq a - by < b$ a hledaná čísla jsou $q := y$, $r := a - by$.
Zbývá dokázat jednoznačnost. Mějme $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$. Odečtením dostaneme $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Protože $-b < r_2 - r_1 < b$ a $b \mid r_2 = r_1$, máme $r_2 - r_1 = 0$. Konečně, protože $b \neq 0$, platí $q_1 - q_2 = 0$. Tím je věta dokázána.

3 Množinová algebra a kartézské součiny množin

1. (a) ano; (b) ano; (c) ne ; (d) ano; (e) ano; (f) ne ; (g) ano; (h) ne.

2. (a) 2; $\{\{\emptyset,\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\},\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\},\{\emptyset,\emptyset\}\} \neq \emptyset$;
   (b) 1 pokud $A = B = C$; 2 pokud $A = B \neq C$ nebo $A = C \neq B$ nebo $A \neq B = C$; 3 jinak;
   (c) 1 pokud $A = \{B, C\}$, 2 jinak;
   (d) 2 pokud $A = \emptyset$ nebo $A = \{B\}$, 3 jinak (vždy $\{B\} \neq \emptyset$).

3. (a) Pro libovolné x platí:
   $x \in (A - (A - B)) \iff$
   $x \in A \wedge x \notin (A - B) \iff$
   $x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B) \iff$
   $x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \iff$
   $(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \iff$
   $x \in A \cap B$;

   (b) Pro libovolné x platí:
   $x \in (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) \iff$
   $x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \vee x \in (A \cap B) \iff$
   $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \iff$
   $(x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \iff$
   $x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \iff$
   $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \iff$
   $x \in (A \cup B)$;

   (c) Pro libovolné x platí:
   $x \in A - (B \cap C) \iff$
   $x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \iff$
   $x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \iff$
   $x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \iff$
   $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \iff$
   $x \in (A - B) \vee x \in (A - C) \iff$
   $x \in (A - B) \cup (A - C)$;

   (d) Po nakreslení diagramů zjistíme, že prvek x by měl být v daných množinách právě tehdy, když je ve všech třech množinách A, B, C nebo právě v jedné z nich. Tento fakt bychom měli ověřit formálně.
   Pro libovolné x platí:
   $x \in A \div (B \div C) \iff$
   $x \in [(A - (B \div C)) \cup ((B \div C) - A)] \iff$
   $x \in (A - (B \div C)) \vee x \in ((B \div C) - A) \iff$
   $(x \in A \wedge x \notin (B \div C)) \vee (x \in (B \div C) \wedge x \notin A)$
   Snadno se ověří $x \notin B \div C \iff (x \in B \wedge x \in C) \vee (x \notin B \wedge x \notin C)$.
   Podobně $x \in B \div C \iff (x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in C)$.
   Tedy
   $x \in A \div (B \div C) \iff$
   $(x \in A \wedge x \notin (B \div C)) \vee (x \notin A \wedge x \in (B \div C)) \iff$
   $(x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C)$.
   Což je fakt, který jsme chtěli ověřit.
   Operace $\div$ je komutativní, tj. $x \in X \div Y \iff x \in Y \div X$. Proto $x \in (A \div B) \div C \iff x \in C \div (B \div A)$.
   Podle předchozího odvození máme $x \in C \div (B \div A) \iff$
   $(x \in C \wedge x \in B \wedge x \in A) \vee (x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin A) \vee (x \notin C \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \notin C \wedge x \notin B \wedge x \in A)$.
   Což je stejná podmínka jako v předchozím, tj. dostáváme $x \in A \div (B \div C) \iff x \in C \div (B \div A) \iff x \in (A \div B) \div C$.

(e) "$\Rightarrow$" Nechť $A \cap B \subseteq C$. Dokazujeme $A \cap (B - C) = \emptyset$.
Sporem. Předpokládejme, že existuje $x \in A \cap (B - C)$. Pak $x \in A \wedge x \in B - C \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \Rightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin C$. Spor s předpokladem $A \cap B \subseteq C$.
"$\Leftarrow$" Buď $A \cap (B - C) = \emptyset$. Dokazujeme $A \cap B \subseteq C$.
Sporem. Nechť existuje x takové, že $x \in A \cap B$ a zároveň $x \notin C$. Potom $x \in A \wedge x \in B$, a vzhledem k $x \notin C$ také $x \in B - C$. Proto $x \in A \cap (B - C)$, což je spor s $A \cap (B - C) = \emptyset$.

(f) Buď $A \subseteq C$. Dokážeme ekvivalenci $A \subseteq B \iff (C - B) \subseteq (C - A)$.
"$\Rightarrow$" Nechť $A \subseteq B$. Ukážeme, že $C - B \subseteq C - A$.
Buď $x \in C - B$ libovolný, pak $x \in C \wedge x \notin B$. Protože $A \subseteq B$ dostáváme i $x \notin A$. Tedy $x \in C \wedge x \notin A$, tj. $x \in C - A$.
"$\Leftarrow$" Nechť $C - B \subseteq C - A$. Ukážeme, že $A \subseteq B$.
Sporem. Předpokládejme, že existuje $x \in A$ takový, že $x \notin B$. Protože $A \subseteq C$, máme $x \in C$ a tedy i $x \in C - B$. Odtud (vzhledem k předpokladu $C - B \subseteq C - A$) dostaneme $x \in C - A$, což je spor s předpokladem $x \in A$.

4. (a) Ano.
Pro libovolné x platí:
$x \in A \cap (B - C) \iff$
$x \in A \wedge x \in B - C \iff$
$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \iff$
$x \in A \cap B \wedge x \notin C \iff$
$x \in (A \cap B) - C$.

(b) Ne. Stačí vzít $A = B = C$ neprázdnou množinu, např. $A = B = C = \{1\}$.

(c) Ne. Stačí vzít $A = \emptyset$, $B = C = \{1\}$.

5. (a) Průnik prázdného systému se obvykle nedefinuje. Někdy se lze setkat s definicí, kde průnik je vybrán ze sjednocení a tudíž roven prázdné množině. Někdy se definuje jako *třída* všech množin. (Pozor, zde použitý pojem třída jsme nedefinovali a nelze jej zaměnit slovem množina, protože množina všech množin neexistuje.);

$\emptyset$ v (b) – (d);

A v (e).

6. (a) Pro libovolné x platí:
$x \in A \cap \bigcup_{i \in I} B_i \iff$
$x \in A \wedge x \in \bigcup_{i \in I} B_i \iff$
$x \in A \wedge (\exists i \in I)(x \in B_i) \iff$
$(\exists i \in I)(x \in A \wedge x \in B_i) \iff$
$(\exists i \in I)(x \in A \cap B_i) \iff$
$x \in \bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)$;

(b) Pro libovolné x platí:
$x \in A \cup \bigcap_{i \in I} B_i \iff$
$x \in A \vee x \in \bigcap_{i \in I} B_i \iff$
$x \in A \vee (\forall i \in I)(x \in B_i) \iff$
$(\forall i \in I)(x \in A \vee x \in B_i) \iff$
$(\forall i \in I)(x \in A \cup B_i) \iff$
$x \in \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$;

(c) Pro libovolné x platí:
$x \in A - \bigcap_{i \in I} B_i \iff$
$x \in A \wedge x \notin \bigcap_{i \in I} B_i \iff$
$x \in A \wedge \neg(x \in \bigcap_{i \in I} B_i) \iff$
$x \in A \wedge \neg((\forall i \in I)(x \in B_i)) \iff$
$x \in A \wedge (\exists i \in I)(x \notin B_i) \iff$
$(\exists i \in I)(x \in A \wedge x \notin B_i) \iff$

$(\exists i \in I)(x \in A - B_i) \iff$
$x \in \bigcup_{i\in I}(A - B_i)$;

(d) "$\subseteq$" Pro libovolné x platí:
$x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \div C_j) \implies$
$(\exists i \in I)(\exists j \in J)(x \in B_i \div C_j) \implies$
$(\exists i \in I)(\exists j \in J)((x \in B_i \wedge x \notin C_j) \vee (x \notin B_i \wedge x \in C_j) \implies$
$(\exists i \in I)(\exists j \in J)((x \in B_i \vee x \in C_j) \wedge (x \notin B_i \vee x \notin C_j)) \implies$
$(x \in \bigcup_{i\in I} B_i \cup \bigcup_{j\in J} C_j) \wedge (x \notin \bigcap_{i\in I} B_i \cap \bigcap_{j\in J} C_j) \implies$
$x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cup C_j) \wedge x \notin \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cap C_j) \implies$
$x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cup C_j) - \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cap C_j)$.

"$\supseteq$" Nechť $x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cup C_j) - \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cap C_j)$, tedy $x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cup C_j) \wedge x \notin \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cap C_j)$.
Zvolme $i_0 \in I$, $j_0 \in J$ pevně (to lze neboť $I \neq \emptyset \neq J$). Pokud $x \in B_{i_0} \div C_{j_0}$ pak $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \div C_j)$.
Předpokládejme tedy, že $x \notin B_{i_0} \div C_{j_0}$. Tudíž buď $x \notin B_{i_0} \cup C_{j_0}$ nebo $x \in B_{i_0} \cap C_{j_0}$. Rozlišme tyto dvě možnosti.
V prvním případě víme, že $x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cup C_j)$ a tedy buď existuje $i \in I$ takové, že $x \in B_i$, potom ovšem $x \in B_i \div C_{j_0}$, nebo existuje $j \in J$ takové, že $x \in C_j$, potom ovšem $x \in B_{i_0} \div C_j$. Vždy tedy $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \div C_j)$.
V druhém případě, tj. $x \in B_{i_0} \cap C_{j_0}$, víme, že $x \notin \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cap C_j)$. Tedy buď existuje $i \in I$ takové, že $x \notin B_i$, potom ovšem $x \in B_i \div C_{j_0}$, nebo existuje $j \in J$ takové, že $x \notin C_j$, potom ovšem $x \in B_{i_0} \div C_j$.
Ve všech případech jsme tedy dostali $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \div C_j)$ a inkluze je dokázána.

7. Pokud je I jednoprvková obě tvrzení zřejmě platí. Nechť dále I obsahuje aspoň dva prvky.

(a) Platí.
Nechť $x \in \bigcap_{i\in I}(A \div B_i)$. Pak pro každé $i \in I$ platí $x \in A \div B_i$, tzn. buď $x \in A \wedge x \notin B_i$ nebo $x \notin A \wedge x \in B_i$. Rozlišíme dva případy $x \in A$ a $x \notin A$ a v obou ukážeme, že $x \in A \div \bigcap_{i\in I} B_i$.
Nechť nejdříve $x \in A$. Pak podle předchozího $x \notin B_i$ (pro libovolné $i \in I$), protože druhá možnost $(x \notin A \wedge x \in B_i)$ nemůže nastat. Tedy $x \in A \wedge x \notin \bigcap_{i\in I} B_i$. Odtud $x \in A \div \bigcap_{i\in I} B_i$.
Předpokládejme nyní, že $x \notin A$. Pak podle předchozího $x \in B_i$ pro libovolné $i \in I$ (opět možnost $(x \in A \wedge x \notin B_i)$ nemůže nastat) a tedy $x \notin A \wedge x \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Odtud opět $x \in A \div \bigcap_{i\in I} B_i$.

(b) Neplatí.
Stačí vzít $j \in I$ pevné a uvážit $A = B_j \neq \emptyset$, $B_i = \emptyset$ pro $i \neq j$. Potom $\bigcap_{i\in I} B_i = \emptyset$ a tedy $A \div \bigcap_{i\in I} B_i = A$, přičemž $A \div B_j = \emptyset$ a tedy $\bigcap_{i\in I}(A \div B_i) = \emptyset$. Uvědomme si, že předpoklad $I \neq \{j\}$ jsme skutečně v tomto případě využili.

8. (a) $A \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.
Zdůvodnění: pokud $\emptyset \in A$ pak $\emptyset \notin A - \{\emptyset\}$, ale $\emptyset \in A \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ což je spor a tedy $\emptyset \notin A$. Proto je levá strana rovnosti rovna A a pravá strana je rovna $A \cap \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Rovnost $A = A \cap \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ je ekvivalentní s $A \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

(b) $A = \{\{\emptyset\}\}$ nebo $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Zdůvodnění: nutně $A \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Pokud $\{\emptyset\} \notin A$ pak $\bigcup A = \emptyset$, tzn. $A \cup \bigcup A = A \subseteq \{\emptyset\}$, tj. rovnost neplatí. Tedy $A = \{\{\emptyset\}\}$ nebo $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ a v obou případech se snadno ověří zadaná rovnost.

(c) 10 řešení. Označme $a = \emptyset, b = \{\emptyset\}$. Potom nutně $A \subseteq \mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, tj. $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$. Počet prvků množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$ je 16, ne každý má však požadovanou vlastnost, např. $A = \{\emptyset, \{a\}\}$ ji nemá ($A = \emptyset$, $A = \{\emptyset\}$ také ne). Přesněji: pokud $\{a,b\} \in A$, pak $\bigcup A = \{a,b\}$ což dá 8 řešení; pokud $\{a,b\} \notin A$, pak $\{a\}, \{b\} \in A$ což dá 2 řešení.

(d) systémy sestávající z jedné množiny.
Zdůvodnění: Pro $A = \emptyset$ není $\bigcap A$ definováno. Pro A jednoprvkový systém $A = \{B\}$ máme $\bigcup A = B = \bigcap A$. Pro $B_1, B_2 \in A$, $B_1 \neq B_2$ máme $\bigcap A \subseteq B_1 \cap B_2 \subset B_1 \cup B_2 \subseteq \bigcup A$, kde v $B_1 \cap B_2 \subset B_1 \cup B_2$ nemůže nastat rovnost, která by musela platit v případě, že $\bigcap A = \bigcup A$.

(e) $A = \{B \cup \{\emptyset\}\}$ nebo $A = \{B, B \cup \{\emptyset\}\}$, kde $\emptyset \notin B$.
Zdůvodnění: $A = \emptyset$ nemá smysl.
Pokud $A = \{C\}$ je jednoprvkový systém, pak $\bigcup A = C$, $(\bigcap A) \cup \{\emptyset\} = C \cup \{\emptyset\}$. Odtud $C = C \cup \{\emptyset\}$ a tedy $\emptyset \in C$. Celkem $A = \{B \cup \{\emptyset\}\}$.
Nechť A je aspoň dvouprvkový systém. Prvek $\emptyset$ náleží do množiny na pravé straně rovnosti a tedy i $\emptyset \in \bigcup A$. Proto existuje $C \in A$, tak že $\emptyset \in C$. Nyní $C \subseteq \bigcup A = (\bigcap A) \cup \{\emptyset\} \subseteq C$ a proto dostáváme $C = \bigcup A$. Je-li nyní B libovolný prvek množiny A různý od C, pak vidíme, že $B \subseteq \bigcup A = C$. Dále $\bigcap A \subseteq B$ a tedy $C = (\bigcap A) \cup \{\emptyset\} \subseteq B \cup \{\emptyset\}$. Vlastnosti $B \subseteq C$, $B \neq C$, $C \subseteq B \cup \{\emptyset\}$ určují množinu B jednoznačně, totiž $B = C - \{\emptyset\}$, $C = B \cup \{\emptyset\}$. To znamená, že existuje právě jeden prvek v množině A různý od C, totiž popsaná množina B jež neobsahuje prvek $\emptyset$.

9. Uvědomme si, že množina A_p je množina čísel, která mají v rozkladu na prvočinitele prvočíslo p.

(a) "$\subseteq$" Zřejmě pro libovolné prvočíslo p platí $A_p \subseteq \mathbb{N} - \{1\}$ a tedy platí i $\bigcup_{p \in I} A_p \subseteq \mathbb{N} - \{1\}$.
"$\supseteq$" Libovolné přirozené číslo n, které je různé od 1, je dělitelné nějakým prvočíslem p a proto $n \in A_p$ pro toto prvočíslo p. Odtud $\mathbb{N} - \{1\} \subseteq \bigcup_{p \in I} A_p$.

(b) Sporem. Nechť $x \in \bigcap_{p \in I} A_p$. Prvočísel je nekonečně mnoho, proto existuje prvočíslo $q > x$. Vidíme, že $x \notin A_q$, což je spor s což je spor s předpokladem $x \in \bigcap_{p \in I} A_p$.

(c) Buď J neprázdná, konečná podmnožina I. Tj. $J = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\}$. Potom $n = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_k} \in \bigcap_{p \in J} A_p$.

10. (a) "$\subseteq$" Nechť $x \in A \times (B \cup C)$, pak $x = (y, z)$, kde $y \in A, z \in B \cup C$. Proto $z \in B \vee z \in C$. Tudíž $(y, z) \in A \times B \vee (y, z) \in A \times C$. Odtud $x = (y, z) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
"$\supseteq$" Nechť $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Potom $x \in A \times B \vee x \in A \times C$, tedy $x = (a, b)$, kde $a \in A$, $b \in B$, nebo $x = (k, l)$, kde $k \in A$, $l \in C$. Protože $b \in B \cup C$ a $l \in B \cup C$ v obou případech máme $x \in A \times (B \cup C)$.

(b) "$\subseteq$" Nechť $x \in (A - B) \times C$, pak $x = (y, z)$, kde $y \in A - B, z \in C$. Proto $y \in A \wedge y \notin B$. Odtud $(y, z) \in A \times C$ ale $(y, z) \notin B \times C$. Celkem tedy $x = (y, z) \in (A \times C) - (B \times C)$.
"$\supseteq$" Nechť $x \in (A \times C) - (B \times C)$. Potom $x \in (A \times C) \wedge x \notin (B \times C)$. Tedy $x = (y, z)$, kde $y \in A, z \in C$. Pokud by $y \in B$, pak $x = (y, z) \in (B \times C)$, což je spor, a tedy $y \notin B$. Proto $y \in A - B$ a tedy $x = (y, z) \in (A - B) \times C$.

(c) "$\subseteq$" Nechť $x \in A \times \bigcup_{i \in I} A_i$, pak $x = (y, z)$, kde $y \in A, z \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Existuje tedy $j \in I$ takové, že $z \in A_j$ a proto $x = (y, z) \in A \times A_j$. Odtud $x \in \bigcup_{i \in I}(A \times A_i)$.
"$\supseteq$" Nechť $x \in \bigcup_{i \in I}(A \times A_i)$. Potom existuje $j \in I$ takové, že $x \in A \times A_j$. Tudíž $x = (y, z)$, kde $y \in A, z \in A_j$. Odtud $z \in \bigcup_{i \in I} A_i$ a celkem $x = (y, z) \in A \times \bigcup_{i \in I} A_i$.

(d) Sporem. Nechť $A \cap B = \emptyset$ a buď $x \in (A \times B) \cap (B \times A)$. Potom $x \in (A \times B) \wedge x \in (B \times A)$. Proto $x = (a, b)$, kde $a \in A, b \in B$ a zároveň $x = (y, z)$, kde $y \in B, z \in A$. Protože $x = (a, b) = (y, z)$ dostáváme $a = y$ (a $b = z$). Ovšem $a \in A$, $y \in B$ a tedy $a \in A \cap B$, což je spor s předpokladem $A \cap B = \emptyset$.

11. (a) Inkluze není splněna nikdy.
Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{P}(A - B)$, ale protože $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ a $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$ tak $\emptyset \notin \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$.

(b) 1. Pokud $A \subseteq B$ potom $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, tedy $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \emptyset \subseteq \mathcal{P}(A - B)$.
2. Pokud $A \cap B = \emptyset$ potom $A - B = A$ a tedy $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A - B)$.
3. V ostatních případech neplatí.
Podmínka $A \not\subseteq B$ znamená existenci prvku $a \in A$, $a \notin B$. Podmínka $A \cap B \neq \emptyset$ znamená existenci prvku $b \in A$, $b \in B$. Nyní $\{a, b\} \not\subseteq A - B$ neboť $b \notin A - B$. Na druhou stranu $\{a, b\} \subseteq A$, $\{a, b\} \not\subseteq B$ a tedy $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$, $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(B)$, celkem $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$.

(c) Pro $I = \emptyset$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ není definován. (Kdybychom definovali průnik prázdného systému jako $\emptyset$, potom $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$, $\mathcal{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \{\emptyset\}$, $\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) = \emptyset$ a rovnost neplatí.)
Pokud $I \neq \emptyset$, pak rovnost platí. Důkaz:
Pro libovolné X platí:
$X \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) \iff$
$(\forall i \in I)(X \in \mathcal{P}(A_i)) \iff$
$(\forall i \in I)(X \subseteq A_i) \iff$
$X \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \iff$
$X \in \mathcal{P}(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

(d) Pokud $I = \emptyset$, potom $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$, $\mathcal{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \{\emptyset\}$, $\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) = \emptyset$ a rovnost neplatí.
Předpokládejme, že rovnost platí a označme $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Protože $A \in \mathcal{P}(A)$ dostáváme $A \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$. Existuje tedy $j \in I$ tak, že $A \in \mathcal{P}(A_j)$. Tzn. pro libovolné $i \in I$ platí $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i = A \subseteq A_j$.
Naopak, pokud existuje $j \in I$ tak, že pro libovolné $i \in I$ platí $A_i \subseteq A_j$, pak zřejmě $\mathcal{P}(A_i) \subseteq \mathcal{P}(A_j)$ a tedy $\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) = \mathcal{P}(A_j)$; na druhou stranu $\bigcup_{i\in I} A_i = A_j$ a tedy rovnost platí.
Ukázali jsme, že rovnost platí pro systémy, které splňují podmínku $(\exists j \in I)(\forall i \in I)(A_i \subseteq A_j)$. Poznamenejme, že tato podmínka zahrnuje i případ jednoprvkové množiny I.

4 Zobrazení

1. Existuje 8 zobrazení $f : A \to B$ a 9 zobrazení $g : B \to A$.

$f(1) = f(2) = f(3) = a$	$g(a) = g(i) = 1$
$f(1) = f(2) = f(3) = i$	$g(a) = g(i) = 2$
$f(1) = f(2) = a,\ f(3) = i$; surjekce	$g(a) = g(i) = 3$
$f(1) = f(3) = a,\ f(2) = i$; surjekce	$g(a) = 1,\ g(i) = 2$; injekce
$f(2) = f(3) = a,\ f(1) = i$; surjekce	$g(a) = 1,\ g(i) = 3$; injekce
$f(1) = f(2) = i,\ f(3) = a$; surjekce	$g(a) = 2,\ g(i) = 3$; injekce
$f(1) = f(3) = i,\ f(2) = a$; surjekce	$g(a) = 2,\ g(i) = 1$; injekce
$f(2) = f(3) = i,\ f(1) = a$; surjekce	$g(a) = 3,\ g(i) = 1$; injekce
	$g(a) = 3,\ g(i) = 2$; injekce

2. Počet všech zobrazení je b^a.
Injektivní zobrazení existuje právě tehdy, když $a \leq b$.
Surjektivní zobrazení existuje právě tehdy, když $a \geq b$.
Bijektivní zobrazení existuje právě tehdy, když $a = b$.

3. Pro n-prvkovou množinu A má množina $\{0,1\}^A$ právě 2^n prvků a množina $A \times A$ má n^2 prvků. Pro $n \geq 6$ platí $2^n > (n+1)^2 > n^2$ dle příkladu z kapitoly o indukci. Taktéž pro $n = 1, 5$ je $2^n > n^2$. My však chceme, aby $2^n \leq n^2$ a tedy v (a) je odpověď $n \in \{2,3,4\}$.
V příkladě (b) chceme, aby $n^2 \geq n^n$ což platí pouze pro $n \in \{1,2\}$.
Zvlášť je třeba diskutovat případ $A = \emptyset$. Existuje právě jedno zobrazení z množiny $\emptyset$ do množiny $\{0,1\}$. Neexistuje tedy injektivní zobrazení z jendoprvkové množiny $\{0,1\}^\emptyset$ na množinu $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$. Dále existuje právě jedno zobrazení z množiny $\emptyset$ do množiny $\emptyset$ a neexistuje surjektivní zobrazení z $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ na jendoprvkovou množinu $\emptyset^\emptyset$.

4. (a) Např. $(\exists b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$.
   (b) Např. $A = \{1,2\},\ B = \{a\}$.

5. (a) Není zobrazení; $f(2) = |2| \notin]0,1[$.
   (b) Není zobrazení; $f(0)$ není určeno jednoznačně.
   (c) Je zobrazení, surjekce, není injekce; $f(3) = f(0)$.
   (d) Je zobrazení, injekce, není surjekce; $1 \notin Im(f)$.
   (e) Je zobrazení, není injekce ani surjekce; $f(0) = f(2)$, $3 \notin Im(f)$.

(f) Není zobrazení; $f(2)$ není určeno jednoznačně.

(g) Je zobrazení, není injekce ani surjekce; $f((1,3)) = f((3,1))$, $\emptyset \notin Im(f)$.

(h) Není zobrazení; $f(\mathbb{Z})$ není určeno (obecněji není určeno $f(A)$ pro A nekonečnou množinu).

(i) Není zobrazení; $f(\emptyset)$ není určeno.

6. Například, je-li $a = 4 \wedge b = 0$, jde o injektivní zobrazení, je-li $a = 1 \wedge b = 0$, jde o surjektivní zobrazení. (Obecně pro $|a| \geq 2$ je f injekce; pro $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$ je f surjekce.)

7. $f \circ g(x) = 2x+1,\ f^{-1}(x) = x+2,\ g^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2},\ g \circ f = 2x-1,\ f \circ g^{-1} = \frac{x}{2} - \frac{7}{2},\ g \circ f^{-1} = 2x+7$
Při nahrazení množiny $\mathbb{R}$ množinou $\mathbb{Z}$ se výsledné předpisy nezmění, pouze zobrzení g^{-1} (a tedy i $f \circ g^{-1}$) nebude existovat.

8. (a) Injektivita:
Dokážeme, že $f((x_1, y_1)) = f((x_2, y_2)) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$; tj.

$$2^{x_1-1}(2y_1 - 1) = 2^{x_2-1}(2y_2 - 1) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

Z jednoznačného rozkladu na prvočinitele máme (vzhledem k tomu, že 2^{x-1} je mocnina 2 a $2y-1$ je liché číslo)

$$2^{x_1-1}(2y_1 - 1) = 2^{x_2-1}(2y_2 - 1) \Rightarrow 2^{x_1-1} = 2^{x_2-1},\ 2y_1 - 1 = 2y_2 - 1.$$

Odtud $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, což jsme měli ukázat.
Surjektivita:
Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje dvojice $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tak, že $n = 2^{x-1}(2y-1)$.
$1 = 2^0 \cdot (2 \cdot 1 - 1)$, tedy $f((1,1)) = 1$
Libovolné přirozené číslo n (dle jednoznačnosti rozkladu na prvočinitele) lze zapsat ve tvaru $n = 2^k \cdot l$, kde $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ liché. Potom $f((k+1, \frac{l+1}{2})) = n$, přičemž $(k+1, \frac{l+1}{2}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Inverze: Dle druhé části důkazu f^{-1} :
$mathbbN \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je dáno předpisem $f^{-1}(n) = (k+1, \frac{n+2^k}{2^{k+1}})$, kde $k \in \mathbb{N}$ je největší číslo s vlastností $2^k | n$.

(b) Injektivita:
Dokážeme, že $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$; tj.

$$\frac{x_1 - a}{b - x_1} = \frac{x_2 - a}{b - x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Pokud jsou zlomky nalevo rovny, pak pronásobením a úpravou dostaneme $(a-b)x_1 = (a-b)x_2$, což vzhledem k $a < b$ dává požadované.
Surjektivita:
Dokážeme, že pro každé $y \in \mathbb{R}^+$ existuje $x \in]a, b[$ tak, že $y = \frac{x-a}{b-x}$. Toto x najdeme tak, že vztah $y = \frac{x-a}{b-x}$ pronásobíme $b - x$, dostaneme tak $yb - yx = x - a$ odkud vyjádříme x. Hledané x je tedy

$$x = \frac{yb + a}{1 + y}$$

(vzhledem k $y \in \mathbb{R}^+$ lze provést dělení kladným číslem $y+1$ a x je reálné čílso) a snadno se ověří, že opravdu $f(x) = y$. Zbývá ověřit, že $x \in]a, b[$:

$$b = \frac{yb + b}{1 + y} > \frac{yb + a}{1 + y} > \frac{ya + a}{1 + y} = a.$$

Inverze: Dle druhé části důkazu $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to]a, b[$ je dáno předpisem $f^{-1}(y) = \frac{yb+a}{1+y}$.

9. Spočítáme kompozice:
1. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((-1)^x \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)$. Pro přehlednost rozlišme dva případy: x sudé nebo liché.
Pro x sudé, tj. $x = 2a$, kde $a \in \mathbb{N}$, máme $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = a$. Proto $(g \circ f)(x) = g((-1)^{2a} a) = g(a) = 2|a - \frac{1}{4}| + \frac{1}{2} = 2(a - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2a = x$.

Pro x liché, tj. $x = 2a+1$, kde $a \in \mathbb{N}_0$, máme $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = a$. Proto $(g \circ f)(x) = g((-1)^{2a+1}a) = g(-a) = 2|-a-\frac{1}{4}| + \frac{1}{2} = 2(a+\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2a+1 = x$. V obou případech tedy $(g \circ f)(x) = x$ a proto $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$.
2. $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(2|y-\frac{1}{4}| + \frac{1}{2})$. Pro přehlednost rozlišme dva případy: $y \geq 1$ nebo $y \leq 0$.
Pro $y \geq 1$, máme $2|y-\frac{1}{4}| + \frac{1}{2} = 2y$ a tedy $(f \circ g)(y) = f(2y) = (-1)^{2y}\lfloor \frac{2y}{2} \rfloor = y$.
Pro $y \leq 0$, máme $2|y-\frac{1}{4}| + \frac{1}{2} = -2y+1$ a tedy $(f \circ g)(y) = f(-2y+1) = (-1)^{-2y+1}\lfloor \frac{-2y+1}{2} \rfloor = (-1)\lfloor -y+\frac{1}{2} \rfloor = (-1)\cdot(-y) = y$. V obou případech tedy $(f \circ g)(y) = y$ a proto $f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$.

10. Injektivita. Dokážeme, že $f(X) = f(Y) \Rightarrow X = Y$. Platí

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B),\ f(Y) = (Y \cap A, Y \cap B),$$

tj. pro $X, Y \subseteq A \cup B$ platí $X \cap A = Y \cap A \wedge X \cap B = Y \cap B$. Odtud $X = Y$; skutečně, pokud $x \in X \subseteq A \cup B$, pak buď $x \in A$ nebo $x \in B$, proto v prvním případě $x \in X \cap A = Y \cap A \implies x \in Y$ a podobně v druhém případě $x \in X \cap B = Y \cap B \implies x \in Y$, tzn. $X \subseteq Y$ a pro opačnou inkluzi stačí zaměnit X a Y.
Surjektivita:
Dokážeme, že pro každé dvě množiny $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ existuje množina $X \subseteq A \cup B$ taková,že $f(X) = (A_1, B_1)$. Stačí položit $X = A_1 \cup B_1$. Kontrola: $f(A_1 \cup B_1) = ((A_1 \cup B_1) \cap A, (A_1 \cup B_1) \cap B) = ((A_1 \cap A) \cup (B_1 \cap A), (A_1 \cap B) \cup (B_1 \cap B)) = (A_1 \cup \emptyset, \emptyset \cup B_1) = (A_1, B_1)$. Využili jsme předpoklad, že A, B jsou disjunktní a tedy $B_1 \cap A = \emptyset$ i $A_1 \cap B = \emptyset$.
Zobrazení inverzní k f:

$$f^{-1} : P(A) \times P(B) \longrightarrow P(A \cup B), \quad f^{-1}(A_1, B_1) = A_1 \cup B_1 \ .$$

11. Tedy $f(B) = \varphi_B$, kde $\varphi_B : A \to \{0,1\}$, $\varphi_B(x) = 1 \iff x \in B$.
Injektivita: Dokážeme, že $f(B) = f(C) \Rightarrow B = C$, kde $B, C \subseteq A$. Rovnost $f(B) = f(C)$ znamená, že množinám B a C je přiřazena stejná charakteristická funkce $\varphi_B = \varphi_C : A \to \{0,1\}$, přičemž z definice charakteristické funkce plyne, že $x \in B \iff \varphi_B(x) = 1 \iff \varphi_C(x) = 1 \iff x \in C$. Tedy $B = C$.
Surjektivita: Dokážeme, že pro každé zobrazení $\varphi : A \to \{0,1\}$ existuje $B \subseteq A$ tak, že $f(B) = \varphi$. Pro zobrazení φ je hledanou množinou $B = \{x \in A | \varphi(x) = 1\}$.

12. Buď $f : \mathcal{P}(A \cup B) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ z příkladu 10. Dále značme $\Psi_A : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ přiřezení charakteristické funkce. A konečně $p_1 : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, $p_2 : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$ projekce.
Pak hledáme $F : \{0,1\}^{A \cup B} \to \{0,1\}^A \times \{0,1\}^B$ odpovídající zobrazení f. Tj.

$$F(\varphi) = (\Psi_A \circ p_1 \circ f \circ \Psi_{A \cup B}^{-1}(\varphi), \Psi_B \circ p_2 \circ f \circ \Psi_{A \cup B}^{-1}(\varphi)).$$

Tedy pro $\varphi : A \cup B \to \{0,1\}$ je $\Psi_{A \cup B}^{-1}(\varphi) = \{x \in A \cup B \mid \varphi(x) = 1\}$, dále $p_1 \circ f \circ \Psi_{A \cup B}^{-1}(\varphi) = \{x \in A \cup B \mid \varphi(x) = 1\} \cap A = \{x \in A \mid \varphi(x) = 1\}$. Odtud $\Psi_A \circ p_1 \circ f \circ \Psi_{A \cup B}^{-1}(\varphi) = \varphi|_A$ a stejně pro druhou souřadnici vyjde $\varphi|_B$. Celkem $F(\varphi) = (\varphi|_A, \varphi|_B)$.
Zobecněním dostáváme zobrazení $F : C^{A \cup B} \to C^A \times C^B$, $F(\varphi) = (\varphi|_A, \varphi|_B)$ viz skripta prof. Rosického.

13. Injektivita:
Dokážeme, že $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ pro libovolné dva prvky $x_1, x_2 \in A$.
Pokud na prvek $f(x_1) = f(x_2)$ aplikujeme zobrazení f^{n-1} dostaneme $f^n(x_1) = f^n(x_2)$, tedy $\mathrm{id}_A(x_1) = \mathrm{id}_A(x_2)$. Protože $\mathrm{id}_A(x_1) = x_1$ a $\mathrm{id}_A(x_2) = x_2$, injektivita je dokázána.
Surjektivita:
Dokážeme, že pro libovolné $a \in A$ existuje $b \in A$ tak, že $f(b) = a$.
Hledaným prvkem je $b = f^{n-1}(a)$.

14. (a) 1. pokud f a g jsou injektivní, pak $g \circ f$ je injektivní.
Důkaz: Nechť $x, y \in A$ jsou taková, že $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Odtud $g(f(x)) = g(f(y))$ a protože g je injektivní, máme $f(x) = f(y)$. Odtud z injektivity f plyne $x = y$ a zobrazení $g \circ f$ je injektivní.
2. pokud $g \circ f$ je injektivní, pak f je injektivní.
Důkaz: Nechť $x, y \in A$ jsou taková, že $f(x) = f(y)$. Pak aplikací g dostaneme $g(f(x)) = g(f(y))$, tedy $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Z injektivity $g \circ f$ tedy plyne $x = y$.
Pozn: g nemusí být injektivní, viz např. $A = \{1\}, B = \mathbb{N}, C = A$; $f(1) = 1$, $g(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{N}$.

(b) 1. pokud f a g jsou surjektivní, pak $g \circ f$ je surjektivní.
Důkaz: Nechť $c \in C$ libovolný. Pak existuje $b \in B$ takové, že $g(b) = c$, protože g je surjektivní. Pro toto $b \in B$ pak existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$ (f je surjektivní). Celkem $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ a zobrazení $g \circ f$ je surjektivní.
2. pokud $g \circ f$ je surjektivní, pak g je surjektivní.
Důkaz: Nechť $c \in C$ libovolný. Pak existuje $a \in A$ takové, že $(g \circ f)(a) = c$, neboť $g \circ f$ je surjektivní. Tedy $g(f(a)) = c$ a zobrazení g je surjektivní, protože prvek $f(a) \in B$ je vzor prvku c.
Pozn: f nemusí být surjektivní, viz protipříklad z řešení části (a).

15. (a) $\Rightarrow$: Množina A je neprázdná, označme tedy nějaký její prvek $a \in A$. Zobrazení f je injektivní, tj. pro každé $b \in Im(f)$ existuje právě jedno $x \in A$ s vlastností $f(x) = b$. Proto následující předpis korektně definuje zobrazení:
$$g : B \to A, \quad g(b) = \begin{cases} a, & b \notin Im(f) \\ x, & b \in Im(f), f(x) = b. \end{cases}$$
Snadno se vidí, že skutečně $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
$\Leftarrow$: id_A je injektivní a tedy f je injektivní dle předchozího příkladu část (a).

(b) $\Rightarrow$: Zobrazení f je surjektivní, tj. pro každé $b \in B$ existuje $x \in A$ s vlastností $f(x) = b$. Pro každé $b \in B$ označme některý prvek s touto vlastností x_b. Můžeme definovat zobrazení $h : B \to A$, $h(b) = x_b$. Pak $f \circ h = \mathrm{id}_B$.
$\Leftarrow$: Opět použitím předchozího příkladu část (b).

16. (a) Například $g = f$. Zde nejsou třeba předpoklady (tj. f může být i identita.

(b) Protože f není identita, existuje prvek $a \in A$ s vlastností $f(a) \neq a$. Definujme nyní zobrazení $h : A \to A$ předpisem $h(x) = a$. Potom $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = a$ avšak $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(a) \neq a$, tudíž $f \circ h \neq h \circ f$.

17. Stačí dokázat, že pokud f je bijekce, potom F je bijekce. (Výrok $A \implies B$ je ekvivalentní s výrokem $\neg A\ veeB$.)
Nechť tedy f je bijekce, tj. existuje $f^{-1} : B \to A$. Definujme zobrazení $G : B^C \to A^C$ vztahem $G(\phi) = f^{-1} \circ \phi$. Snadno se ověří, že F a G jsou vzájemně inverzní zobrazení.

5 Relace na množině, ekvivalence a rozklady množin

1. Relace na $\{0, 1\}$: (pozor, značení (a) — (p) neodpovídá bodům (a) — (f) v zadání, teď (a) — (p) jsou jednotlivé relace.)

(a) $\emptyset$ (prázdná relace) – sym., tranz., antisym.;

(b) $\{(0, 0)\}$ sym., tranz., antisym.;

(c) $\{(1, 1)\}$ sym., tranz., antisym.;

(d) $\{(0, 1)\}$ tranz., antisym.;

(e) $\{(1, 0)\}$ tranz., antisym.;

(f) $\{(0, 0), (1, 1)\}$ reflex., sym., tranz., antisym.;

(g) $\{(0, 0), (0, 1)\}$ tranz., antisym.;

(h) $\{(0, 0), (1, 0)\}$ tranz., antisym.;

(i) $\{(1, 1), (0, 1)\}$ tranz., antisym.;

(j) $\{(1, 1), (1, 0)\}$ tranz., antisym.;

(k) $\{(0, 1), (1, 0)\}$ sym.;

(l) $\{(0, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ reflex., tranz., antisym.;

(m) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 0)\}$ reflex., tranz., antisym.;

(n) $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ sym.;

(o) $\{(1,1),(0,1),(1,0)\}$ sym.;

(p) $\{(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)\}$ reflex., sym., tranz.

Odpovědi na otázky tedy jsou:

(a) 4 reflexivní relace. Každá reflexivní relace musí obsahovat dvojice $(0,0)$ a $(1,1)$. Pro zbylé dva prvky $(1,0)$ $(0,1)$ máme na výběr zda je do relace dáme či nikoli.

(b) 8 symetrických relací. Každá symetrická relace obsahující dvojici $(1,0)$ obsahuje i dvojici $(0,1)$ a naopak. Proto $(0,0)$ máme dvě možnosti, buď ji do relace dát či nikoli, taktéž pro dvojici $(1,1)$ a pro dvojice $(1,0)$ a $(0,1)$ dáme do relace buď obě nebo ani jednu. Tzn. máme $2 \cdot 2 \cdot 2$ možností.

(c) tranzitivní jsou všechny kromě tří relací. Relace které nejsou tranzitivní musí obsahovat dvojice $(0,1)$ a $(1,0)$, ale neobsahují buď $(0,0)$ nebo $(1,1)$ nebo obě tyto dvojice. Jsou tedy opravdu 3.

(d) Relace ekvivalence jsou dvě. Podle části (a) musí obsahovat $(0,0)$ i $(1,1)$ a podle části (b) obsahuje buď obě dvojice $(1,0)$ a $(0,1)$ nebo ani jednu dvojici.

(e) Je jich 5, což plyne z rozboru v částech (b) a (c).

(f) Jsou 4. Podle (b) takové relace obsahují buď obě dvojice $(1,0)$ a $(0,1)$ nebo ani jednu dvojici. Antisymetrie znamená, že nesmí obsahovat obě. Tedy neobsahuje ani $(0,1)$ ani $(1,0)$. Takové relace jsou opravdu 4.

Relace na $\{0\}$:
prázdná relace — sym., tranz., antisym.;
$\{(0,0)\}$ — reflex., sym., tranz., antisym.

Relace na $\emptyset$:
prázdná relace — reflex., sym., tranz., antisym.

2. Relace ekvivalence na množině $A = \{1,2,3\}$:

   (a) $id_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$;

   (b) $\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(3,3)\}$;

   (c) $\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)\}$;

   (d) $\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$;

   (e) $A \times A$.

3. (a) např: $f = \{(1,1),(2,1),(3,3)\}, g = \{(1,2),(2,2),(3,3)\}$; zde $f \circ g = f \neq g \circ f = g$;

   (b) např: $f = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$;

   (c) např: $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$;

   (d) např: $f = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$;

   (e) např: $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}, S = R \cup \{(1,2)\}$.

4. (a) $R = \emptyset$.

   (b) např: $R = R_<$ nebo $R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nebo $R_\leq = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$. Pozn: nestačí vzít $s \cup s^2 = s \cup \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{N}\}$, neboť to není tranzitivní relace. Nejmenší relace (vzhledem k inkluzi) s požadovanou vlastností je relace $R_<$.

   (c) např: $R = R_<$ nebo $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \neq b\}$. Pozn: nikoli $R_\leq = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$, neboť $R_\leq \circ R_\leq = R_\leq$. Všimněme si, že $R_< \circ R_< = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b - a > 1\}$.

   (d) např: zobrazení dané předpisem $f(n) = 1$ nebo zobrazení dané předpisem $f(n) = 2n$. Pozn: nikoli relace s^{-1}, která není zobrazením (1 nic nepřiřazuje).

   (e) např: $R = \{(n,1) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2,3)\}$.

5. (a) sym., tranz.; (není reflexivní, protože například $(2,2) \notin \rho$; není antisymetrická — $(1,3) \in \rho, (3,1) \in \rho$);
   (b) sym.; (není reflexivní — $(2,2) \notin \rho$; není tranzitivní — $(2,1) \in \rho, (1,4) \in \rho, (2,4) \notin \rho$; není antisymetrická — $(2,3) \in \rho, (3,2) \in \rho$);
   (c) reflex., antisym.; (není symetrická — $(1,2) \in \rho$, $(2,1) \notin \rho$; není tranzitivní — $(1,2) \in \rho, (2,4) \in \rho, (1,4) \notin \rho$);
   (d) reflex., sym. (není antisymetrická — $(1,4) \in \rho, (4,1) \in \rho$; není tranzitivní — $(1,4) \in \rho, (4,7) \in \rho, (4,7) \notin \rho$).
6. (a) sym.;
   (b) tranz., antisym.;
   (c) antisym.;
   (d) tranz., antisym.;
   (e) sym.;
   (f) reflex., sym., tranz.;
   (g) reflex., tranz.
7. (a) sym.;
   (b) tranz., je-li A jednoprvková: reflex., sym., tranz.;
   (c) sym., je-li A jednoprvková: sym., tranz. antisym.;
   (d) reflex., sym., tranz. je-li A jednoprvková: reflex., sym., tranz., antisym.
8. $M/\rho = \{\{1,10\},\{2,11,20\},\{3,12\},\{4,13\},\{5,14\},\{6,15\},\{7,16\},\{8,17\},\{9,18\},\{19\}\}$.
9. (a) není ekviv.;
   (b) je ekviv.;
   (c) není ekviv.;
   (d) není ekviv.;
   (e) je ekviv.
10. (a) $\mathbb{Z}\backslash\rho = \mathbb{Z}_4$;
    (b) $\mathbb{Z}\backslash\rho = \{[0]_7, [1]_7 \cup [6]_7, [2]_7 \cup [5]_7, [3]_7 \cup [4]_7\}$, zde $[i]_7 \in \mathbb{Z}_7$, tj. $[i]_7 = \{i + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
    (c) $\mathbb{Z}\backslash\rho = \{R_k | k \in \mathbb{Z}\}$, $R_k = \{k, -k-2\}$, tj. $R_{-1} = \{-1\}$ a pro ostatní k je R_k dvouprvková, tzn. lze též psát $\mathbb{Z}\backslash\rho = \{R_k | k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\{-1\}\}$;
    (d) $\mathbb{Z}\backslash\rho = \{S, L\}$, S, resp. L, je množina všech sudých, resp. lichých, celých čísel. Tj. $\mathbb{Z}\backslash\rho = \mathbb{Z}_2$.
11. $(\mathbb{Z} - \{0\})\backslash\rho = \{\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-\}$.
12. (a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\rho$ je množina všech přímek rovnoběžných s osou y;
    tj. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\rho = \{P_r \mid r \in \mathbb{R}\}$, $P_r = \{(r, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
    (b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\rho$ je množina všech navzájem rovnoběžných přímek tvaru $y = 2x + r$, kde r je libovolné reálné číslo; $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\rho = \{P_r \mid r \in \mathbb{R}\}$, $P_r = \{(x, 2x + r) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
    (c) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\rho$ je množina soustředných kružnic se středem v počátku, včetně počátku (který zde lze chápat jako kružnici s nulovým poloměrem);
    $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\rho = \{K_r \mid r \in \mathbb{R}_0^+\}$, $K_r = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = r^2\}$.
    (d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\rho$ je množina všech kružnic se středem v bodě $S = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ včetně kružnice s poloměrem 0, tj. bodem S;
    $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\rho = \{K_r \mid r \in \mathbb{R}_0^+\}$, $K_r = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = r^2\}$.
13. (a) $J_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\}$, $\mathbb{R}\backslash J_f = \{R_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, kde $R_i =< i, i + 1)$;

(b) $J_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$, $\mathbb{R}\backslash J_f = \{R_a \mid a \in \mathbb{R}_0^+\}$, kde $R_a = \{a, -a\}$;

(c) $J_f = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x \equiv y (\mathrm{mod}\ n)\}$, $\mathbb{Z}\backslash J_f = \mathbb{Z}_n$;

(d) $J_f = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid \lfloor \frac{x}{n} \rfloor = \lfloor \frac{y}{n} \rfloor\}$, $\mathbb{Z}\backslash J_f = \{R_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, kde $R_i = \{x \in \mathbb{Z} \mid \lfloor \frac{x}{n} \rfloor = i\} = \{ni, ni+1, ni+2, .., ni+n-1\}$.

14. Ukážeme, že pokud $(x,y) \in R \cap S$ potom též $(y,x) \in R \cap S$.
Nechť $(x,y) \in R \cap S$, potom $(x,y) \in R \wedge (x,y) \in S$. Protože R i S jsou podle předpokladu symetrické relace, dostáváme $(y,x) \in R \wedge (y,x) \in S$. Odtud $(y,x) \in R \cap S$.

15. (a) Ano. Ukážeme, že $(x,x) \in R \circ S$ pro libovolné $x \in A$.
Pro libovolné $x \in A$ máme $(x,x) \in R \wedge (x,x) \in S$, protože R i S jsou reflexivní. Odtud podle definice skládání relací dostaneme $(x,x) \in R \circ S$.

(b) Ne. Např. pro $A = \{a,b\}$ jsou relace $R = \{(a,b),(b,a)\}, S = \{(a,a)\}$ symetrické, ovšem relace $R \circ S = \{(a,b)\}$ symetrická není.

(c) Ne. Např. pro $A = \{a,b,c\}$ jsou relace $R = \{(a,b),(c,c)\}, S = \{(a,a),(b,c)\}$ tranzitivní, ovšem relace $R \circ S = \{(a,b),(b,c)\}$ tranzitivní není.

16. (a) Pro $a,b \in A$:
$(a,b) \in (R^{-1})^{-1} \iff (b,a) \in R^{-1} \iff (a,b) \in R$.

(b) Pro $a \in A$, $z \in D$:
Jednak $(a,z) \in T\circ(S\circ R) \iff (\exists y \in C)((a,y) \in S\circ R \wedge (y,z) \in T) \iff (\exists y \in C)(\exists b \in B)((a,b) \in R \wedge (b,y) \in S \wedge (y,z) \in T)$.
Dále $(a,z) \in (T\circ S)\circ R \iff (\exists b \in B)((a,b) \in R \wedge (b,z) \in T\circ S) \iff (\exists b \in B)(\exists y \in C)((a,b) \in R \wedge (b,y) \in S \wedge (y,z) \in T)$ a rovnost tudíž platí.

(c) Pro $y \in A$, $x \in C$:
$(x,y) \in (S\circ R)^{-1} \iff (y,x) \in S\circ R \iff (\exists z \in B)((y,z) \in R \wedge (z,x) \in S) \iff (\exists z \in B)((x,z) \in S^{-1} \wedge (z,y) \in R^{-1}) \iff (x,y) \in R^{-1}\circ S^{-1}$.

(d) Pro $x \in A$, $y \in C$:
$(x,y) \in S\circ(R_1 \cup R_2) \iff (\exists z \in B)((x,z) \in R_1 \cup R_2 \wedge (z,y) \in S) \iff [(\exists z \in B)((x,z) \in R_1 \wedge (z,y) \in S) \vee (\exists z \in B)((x,z) \in R_2 \wedge (z,y) \in S)] \iff [(x,y) \in S\circ R_1 \vee (x,y) \in S\circ R_2] \iff (x,y) \in (S\circ R_1) \cup (S\circ R_2)$.

(e) Pro $x \in A$, $y \in C$:
$(x,y) \in S\circ(R_1 \cap R_2) \iff (\exists z \in B)((x,z) \in R_1 \cap R_2 \wedge (z,y) \in S) \implies [(\exists z \in B)((x,z) \in R_1 \wedge (z,y) \in S) \wedge (\exists z \in B)((x,z) \in R_2 \wedge (z,y) \in S)] \iff [(x,y) \in S\circ R_1 \wedge (x,y) \in S\circ R_2] \iff (x,y) \in (S\circ R_1) \cap (S\circ R_2)$.
Opačná inkluze neplatí; stačí například zvolit $A = B = C = \{a,b\}$, $R_1 = \{(a,a)\}, R_2 = \{(a,b)\}, S = \{(a,b),(b,b)\}$, kde $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, tj. $S\circ(R_1 \cap R_2) = \emptyset$, ale $S\circ R_1 = S\circ R_2 = \{(a,b)\}$.

(f) Pro $a,b \in A$:
$(a,b) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \iff (b,a) \in R_1 \cup R_2 \iff (b,a) \in R_1 \vee (b,a) \in R_2 \iff (a,b) \in R_1^{-1} \vee (a,b) \in R_2^{-1} \iff (a,b) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

(g) Pro $a,b \in A$:
$(a,b) \in (R_1 \cap R_2)^{-1} \iff (b,a) \in R_1 \cap R_2 \iff (b,a) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_2 \iff (a,b) \in R_1^{-1} \wedge (a,b) \in R_2^{-1} \iff (a,b) \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

(h) Pro $x \in A$, $y \in C$:
$(x,y) \in S\circ R_1 - S\circ R_2 \implies ((x,y) \in S\circ R_1 \wedge ((x,y) \notin S\circ R_2)$.
Existuje tedy $z \in B$, takové, že $(x,z) \in R_1 \wedge (z,y) \in S$. Pokud by $(x,z) \in R_2$, pak by $(x,y) \in S\circ R_2$, což neplatí a tedy $(x,z) \notin R_2$. Odtud $(x,z) \in R_1 - R_2$ a proto platí $(x,y) \in S\circ(R_1 - R_2)$.
Opačná inkluze neplatí; stačí například zvolit $A = B = C = \{a,b\}$, $R_1 = \{(a,a),(b,a),(b,b)\}, R_2 = \{(b,b)\}, S = \{(a,b),(b,b)\}$, kde $S\circ R_1 = \{(a,b),(b,b)\}, S\circ R_2 = \{(b,b)\}, S\circ(R_1 - R_2) = \{(a,b),(b,b)\}$.

17. (a) např. $x\rho y \Leftrightarrow (x = 1) \wedge (y = 1)$; nejmenší $\rho = \emptyset$.

(b) např. $x\rho y \Leftrightarrow x = y$; nejmenší $\rho = \emptyset$.

(c) např. $x\rho y \Leftrightarrow (y = 1) \vee (y = 2)$; nejmenší vzhledem k inkluzi neexistuje, minimální vzhledem k inkluzi jsou relace $\rho = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$, kde $a \neq b, c \neq d, (c, d) \notin \{(a, b), (b, a)\}$.

(d) např. $x\rho y \Leftrightarrow x, y$ dávají stejný zbytek po dělení 2; nejmenší vzhledem k inkluzi neexistuje, minimální vzhledem k inkluzi jsou relace $\rho = \{(a, b), (b, a)\}$, kde $a \neq b$.

(e) např. $x\rho y \Leftrightarrow x \leq y$; nejmenší vzhledem k inkluzi neexistuje, minimální vzhledem k inkluzi jsou relace $\rho = \{(a, b)\}$, kde $a \neq b$.

(f) $x\rho y \Leftrightarrow (x \leq y) \vee (x = 2)$; nejmenší vzhledem k inkluzi neexistuje, minimální vzhledem k inkluzi jsou např. relace $\rho = \{(a, b), (b, a), (c, d)\} \cup \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$, kde a, b, c, d jsou navzájem různé prvky.

(g) neexistuje.

18. (a) f je injektivní zobrazení;

    (b) f je surjektivní zobrazení.

19. Sjednocení libovolného počtu reflexivních, resp. symetrických relací je rexlexivní, resp. symetrická relace. Sjednocení tranzitivních relací nemusí být tranzitivní relace. Např. pro dvouprvkovou množinu $A = \{a, b\}$ jsou relace $\{(a, b)\}$ i $\{(b, a)\}$ tranzitivní ale jejich sjednocení tranzitivní relace není.
Průnik libovolného počtu reflexivních, resp. symetrických, resp. tranzitivních relací je reflexivní, resp. symetrická, resp. tranzitivní relace.
Zde jsme měli na mysli vždy neprázdné sjednocení a průniky.

20. Odpověď je kladná v příkladech (a) — (g) pro nejmenší relace β "nad" danou relací; vždy se jedná o průnik všech relací s touto vlastností. (Relace $A \times A$ je relace ekvivalence a jedná se tedy vždy o neprázdný systém, který obsahuje tuto relaci $A \times A$ — viz předchozí příklad.)
V případě (h) je odpověď ne; stačí vzít libovolnou relaci α, která není antisymetrická a potom neexistuje antisymetrická relace β s vlastností $\alpha \subseteq \beta$.
Odpovědi v případě největší relace obsažené v dané relaci α jsou většinou negativní. V následujících protipříkladech máme na mysli relaci α na množině $A = \{a, b, c\}$, pro niž neexistuje největší relace $\beta \subseteq \alpha$ dané vlastnosti.

    (a) $\emptyset$;

    (b) existuje; β je sjednocení všech symetrických relací obsažených v α;

    (c) $\{(a, b), (b, a)\}$;

    (d) $\emptyset$;

    (e) $\emptyset$;

    (f) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$;

    (g) $\emptyset$;

    (h) $\{(a, b), (b, a)\}$.

21. Dichotomická relace je vždy reflexivní.
Pro libovolné $a \neq b \in A$ obsahuje dichotomická relace R buď (a, b) nebo (b, a). Tj. pro tuto dvojici $a \neq b \in A$ máme tři možnosti jak vypadá neprázdná množina $R \cap \{(a, b), (b, a)\}$. Existuje celkem $3^{\binom{n}{2}}$ dichotomických relací.
Existuje pouze jedna relace na množině A, která je symetrická a dichotomická zároveň — $A \times A$.
Tvrzení o složení reflexivních relací platí, podstatná vlastnost tohoto složení totiž je, že obsahuje sjednocení všech těchto relací.
Opak tvrzení neplatí — $A = \{a, b\}$, $R_1 = R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$ nejsou rexflexivní relace ale $R_1 \circ R_2 = A \times A$.

22. (a) Neplatí. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4)$ je 3-tranzitivní, není tranzitivní.
(b) Platí. Nechť R je tranzitivní relace. Buď $a, b, c, d \in A$ libovolné, takové, že $(a, b) \in R, (b, c) \in R, (c, d) \in R$. Chceme ukázat, že $(a, d) \in R$. To skutečně platí, neboť z tranzitivity a předpokladu $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ dostaneme $(a, c) \in R$ a potom z tranzitivity a předpokladu $(a, c) \in R, (c, d) \in R$ dostaneme $(a, d) \in R$.
Obecně lze dokázat, že n-tranzitivita implikuje m-tranzitivitu, pokud $n - 1$ dělí $m - 1$.

6 Uspořádané množiny

1. (a) uspořádání, které není lineární, různé prvky jsou nesrovnatelné, tj. protiřetězec;
   (b) lineární uspořádání;
   (c) není uspořádání, neboť není reflexivní relací;
   (d) uspořádání, které není lineární, od (a) se liší pouze tím, že 4 je největším prvkem který pokrývá ostatní nesrovnatelné prvky;
   (e) není uspořádání, neboť není antisymetrickou relací;
   (f) není uspořádání, neboť nesplňuje žádnou z definičních podmínek;
   (g) lineární uspořádání; diagram: nejdříve lichá čísla dle velikosti a "nad" nimi všechna sudá čísla opět dle velikosti.

2. (a) jednoprvková uspořádaná množina;
   (b) dvouprvková uspořádaná množina, $\emptyset$ nejmenší prvek a A největší prvek;
   (c) čtyřprvková uspořádaná množina, diagram: "kosočtverec postavený na špičku";
   (d) osmiprvková uspořádaná množina, diagram: "krychle postavená na špičku".

3. (a) Maximální prvky: a, b, c; minimální prvky: a, b, c; největší ani nejmenší prvek neexistuje.
   (b) Maximální a největší prvek: c; minimální a nejmenší prvek: a.
   (c) Maximální prvky: b, c, d; minimální prvky: a, d; největší ani nejmenší prvek neexistuje.
   (d) Maximální a největší prvekk: $\{a, b\}$; minimální a nejmenší prvek: $\emptyset$.

4. (a) dva maximální a dva minimální, žádný nejmenší a žádný největší;
   (b) jeden největší a tedy i maximální, dva minimální, žádný nejmenší;
   (c) jeden nejmenší a tedy i minimální, dva maximální, žádný největší;
   (d) jeden prvek který je zároveň minimální i maximální, kromě něj jeden minimální a jeden maximální, žádný nejmenší a žádný největší.

5. (a) 3 relace uspořádání, pouze 2 pokud nás zajímá celkový počet uspořádání až na přejmenování prvků;
   (b) 19 uspořádání, resp. 5 až na přejmenování prvků.

6. $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, R)$: maximální prvky $4, 5, 6, 7$, nejmenší prvek 1, největší prvek neexistuje.
   $(\mathbb{N}, R)$: maximální prvek neexistuje, nejmenší prvek 1.

7. Ad 1: a) infima a suprema existují pouze pro jednoprvkové množiny.
   b) existují libovolná neprázdná infima a konečná suprema.
   d) existují libovolná neprázdná suprema a infima pouze pro jednoprvkové množiny.
   g) existují libovolná neprázdná infima, některá (i nekonečná) suprema.
   Ad 2: Jedná se obecně o úplný svaz.
   Ad 3: v b),d) — úplné svazy.
   Ad 4: žádný svaz.
   Ad 5: existuje jeden dvojprvkový a jeden trojprvkový svaz (až na přejmenování prvků).
   Ad 6: a) $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, R)$ není svaz přestože existují neprázdná infima;
   b) Supremum a infimum libovolné konečné neprázdné podmnožiny $M \subset \mathbb{N}$ existuje; infimum je největší společný dělitel, supremum je nejmenší společný násobek. Infimum existuje dokonce i pro nekonečné podmožiny, supremum existuje pro prázdnou podmnožinu.

8. Relace R je reflexivní, stačí za c zvolit 1.
   Tranzitivita: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (\exists c \in \mathbb{R})(c \geq 1 \wedge cx = y) \wedge (\exists d \in \mathbb{R})(d \geq 1 \wedge dy = z)$. Odtud $z = dcx$ kde $dc \geq 1$ a tedy $(x, z) \in R$.
   Antisymetrie: $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies (\exists c \in \mathbb{R})(c \geq 1 \wedge cx = y) \wedge (\exists d \in \mathbb{R})(d \geq 1 \wedge dy = x)$. Odtud $x = dcx$. Pokud $x = 0$ pak $y = cx = 0$ a $x = y$. Pokud $x \neq 0$ pak z $x = dcx$ plyne $dc = 1$, což vzhledem k

$c \geq 1, d \geq 1$, dává $c = d = 1$ a tedy $x = y$.
Diagram: má tři vzájemně nesrovnatelné části. Jednak reálná kladná čísla uspořádaná podle velikosti, dále reálná záporná čísla uspořádaná opačně podle velikosti, a konečně nulu, která není srovnatelná s žádným prvkem. Množina obsahuje prvek 0, který je minimální a maximální zároveň. Další minimální ani maximální prvky tam nejsou. Úplný svaz to není.

9. (a) např. první příklad z 4;
   (b) čtyřprvkový protiřetězec;
   (c) nelze, konečná uspořádaná množina musí mít aspoň jeden maximální prvek.

10. (a) např. první příklad z 4, nebo čtyřprvkový protiřetězec;
    (b) např. množina všech přirozených čísel uspořádaná dle velikosti s přidaným jedním nesrovnatelným prvkem;
    (c) nelze, má-li množina nejmenší prvek, pak se jedná o jediný minimální prvek;
    (d) např. celá čísla uspořádaná dle velikosti s přidaným jedním prvkem, který je menší než kladná, větší než záporna a nesrovnatelný s 0;
    (e) protiřetězec.

11. (a) je uspořádání;
    (b) není uspořádání, např. pro lineární uspořádání R není $R \cup R^{-1}$ uspořádání;
    (c) je uspořádání;
    (d) není uspořádání, např. pro $A = \{a, b\}$ a uspořádání $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, $R_2 = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$ je $R_1 \circ R_2 = A \times A$.

12. Ukážeme, že $\preceq$ je uspořádání, tedy relace která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

    Pro libovolné $(a, b) \in A \times B$ máme $a \leq a$ a $b \sqsubseteq b$, protože $\leq$ i $\sqsubseteq$ jsou reflexivní relace. Proto $(a, b) \preceq (a, b)$ a reflexivita je dokázána.

    Pokud $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ a zároveň $(a_2, b_2) \preceq (a_1, b_1)$ pak podle definice $\preceq$ dostáváme $a_1 \leq a_2$, $a_2 \leq a_1$, $b_1 \sqsubseteq b_2$ a $b_2 \sqsubseteq b_1$. Protože $\leq$ i $\sqsubseteq$ jsou antisymetrické relace dostáváme $a_1 = a_2$ a $b_1 = b_2$. Odtud $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ a antisymetrie je dokázána.

    Pokud $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ a zároveň $(a_2, b_2) \preceq (a_3, b_3)$ pak podle definice $\preceq$ dostáváme $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ a $b_1 \sqsubseteq b_2 \sqsubseteq b_3$. Protože $\leq$ i $\sqsubseteq$ jsou tranzitivní relace dostáváme $a_1 \leq a_3$ a $b_1 \sqsubseteq b_3$. Odtud $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$ a tranzitivita je dokázána.

    Hasseovský diagram uspořádání $\preceq$ na množině $\mathcal{P}(\{a, b\}) \times \{1, 2\}$ vypadá jako krychle postavená na špičku.

    Součin řetězců obecně není řetězec; stačí vzít dva řetězce délky dva a součin bude kosočtverec.

    Pro systém uspořádaných množin $\{(A_i, \leq_i) | i \in I\}$ můžeme definovat na součinu $\prod_{i \in I} A_i$ relaci $\preceq$ takto:

$$a \preceq b \iff (\forall i \in I)(a_i \leq_i b_i)\ .$$

13. Ukážeme, že $\preceq$ je uspořádání, tedy relace která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

    Reflexivita: Pro libovolné $a \in A \bigcup_{i \in I}$ existuje $i \in I$ tak, že $a \in A_i$. Potom $a \preceq_i a$ a odtud $a \preceq a$.

    Antisymetrie: Pokud $a \preceq b$ pak existuje i tak, že $a \preceq_i b$. Proto $a, b \in A_i$. Podobně $b \preceq a$ pak existuje j tak, že $b \preceq_j a$, tj. $a, b \in A_j$. Pokud $i \neq j$ pak $a \in A_i \cap A_j = \emptyset$, což je spor. Tedy $i = j$ a z antisymetrie $\preceq_i$ a předpokladů $a \preceq_i b$, $b \preceq_i a$ dostáváme $a = b$.

    Tranzitivita: Pokud $a \preceq b$ pak existuje i tak, že $a \preceq_i b$. Proto $a, b \in A_i$. Podobně $b \preceq c$ pak existuje j tak, že $b \preceq_j c$, tj. $b, c \in A_j$. Pokud $i \neq j$ pak $b \in A_i \cap A_j = \emptyset$, což je spor. Tedy $i = j$ a z tranzitivity $\preceq_i$ a předpokladů $a \preceq_i b$, $b \preceq_i c$ dostáváme $a \preceq_i b$. Odtud $a \preceq b$.

    Hasseovský diagram bude vytvořen sjednocením původních hasseovských diagramů. Jinými slovy stačí dát diagramy vedle sebe.

14. Relace $\leq$ je lineární $\iff$ relace $\preceq$ je lineární.

15. (a) je izotonní, není izomorfismus;
   (b) je izotonní, je izomorfismus;
   (c) je izotonní, není izomorfismus;
   (d) není izotonní, např. $-3 \leq 1$ ale $(-3)^2 \leq 1^2$ neplatí;
   (e) není izotonní, např. $-4 \leq 2$ ale $|-4| \leq |2|$ neplatí;
   (f) je izotonní, není izomorfismus; to platí pro libovolné konstantní zobrazení;
   (g) je izotonní, není izomorfismus; to platí pro libovolnou "inkluzi";
   (h) je izotonní, není izomorfismus.

16. Celkem 15 izotonních zobrazení.

17. Existuje celkem 8 automorfismů uspořádané množiny $\{a, b, c, d, e, f\}$:
   1) id;
   2) $b \mapsto b, a \mapsto a, c \mapsto c, f \mapsto f, d \mapsto e, e \mapsto d$;
   3) $b \mapsto b, a \mapsto c, c \mapsto a, f \mapsto f, d \mapsto d, e \mapsto e$;
   4) $b \mapsto b, a \mapsto c, c \mapsto a, f \mapsto f, d \mapsto e, e \mapsto d$;
   5) $b \mapsto f, f \mapsto b, a \mapsto d, c \mapsto e, d \mapsto a, e \mapsto c$;
   6) $b \mapsto f, f \mapsto b, a \mapsto d, c \mapsto e, d \mapsto c, e \mapsto a$;
   7) $b \mapsto f, f \mapsto b, a \mapsto e, c \mapsto d, d \mapsto a, e \mapsto c$;
   8) $b \mapsto f, f \mapsto b, a \mapsto e, c \mapsto d, d \mapsto c, e \mapsto a$.

18. (a) Takový příklad nelze zkonstruovat na konečné množině.
   Vezměme množinu celých čísel $\mathbb{Z}$ a označme S, resp. L, podmnožinu všech sudých, resp. lichých, čísel. Na $\mathbb{Z}$ definujeme uspořádání $\preceq$ následujícím předpisem:

$$x \preceq y \iff x \leq y \wedge (x \in S \vee y \in L).$$

   Tzn. diagram vypadá tak, že máme podmnožiny S i L (každou zvlášť) uspořádány podle velikosti a navíc každé liché číslo l je větší než libovolné sudé číslo, které je menší než l podle velikosti. Přičemž žádné sudé číslo není větší než některé liché.
   Nyní předpis $\varphi(s) = s$ pro $s \in S$, $\varphi(l) = l + 2$ pro $l \in L$ zadává bijekci na $\mathbb{Z}$, která je zřejmě izotonní. Inverze izotonní není, protože např. $2 \preceq 3$ ovšem pro vzory $2 \preceq 1$ neplatí.
   (b) Pětiprvkový protiřetězec, kdy se právě tři prvky zobrazí samy na sebe a zbylé dva se vymění.

19. Jednak máme dvě konstantní zobrazení, která jsou izotonní.
   Dále pro každé racionální číslo q existuje izotonní zobrazení φ dané předpisem: $\varphi(x) = 0 \iff x \leq q$ a dále jedno izotonní zobrazení ϵ dané předpisem: $\epsilon(x) = 0 \iff x < q$.
   Konečně pro libovolné iracionální číslo r existuje izotonní zobrazení ω dané předpisem: $\omega(x) = 0 \iff x < r$. Tato zobrazení odpovídají řezům v $(\mathbb{Q}, \leq)$ používaným v konstrukci množiny $\mathbb{R}$ — viz. skripta.

20. Pro ω existuje pouze jeden automorfismus a to identita, pro $\omega \times \omega$ existuje kromě identity ještě jeden automorfismus a to výměna souřadnic.
   Pro $\mathbb{Z}$ existuje nekonečně mnoho izotonních zobrazení: pro $k \in \mathbb{Z}$ předpis $x \mapsto x + k$ zadává automorfismus; žádný další není. Pro $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se nakombinují tyto automorfismy s identitou a výměnou souřadnic. Tj. pro $k, l \in \mathbb{Z}$ máme automorfismus daný předpisem $(x, y) \mapsto (x + k, y + l)$ a také automorfismus daný předpisem $(x, y) \mapsto (y + k, x + l)$.

7 Úplné svazy

21. (a) není svaz, dvouprvková podmnožina prvků z "druhého patra" nemá supremum;

(b) je svaz;

(c) je svaz;

(d) je svaz.

22. Je jich pět (až na izomorfismus, tj. přejmenování prvků). K libovolné tříprvkové uspořádané množině se přidá nejmenší a největší prvek.

23. (a) je úplný svaz; supremum je sjednocení, infimum průnik;

(b) je svaz, infimum konečné množiny je průnik, supremum konečné množiny je interval jehož krajní bod dostaneme jako nejmenší, resp. největší, krajní bod jednotlivých intervalů. Úplný svaz to je také, když za prvky množiny M považejeme i intervaly $(-\infty, a)$, (b, ∞) a $(-\infty, \infty)$. Potom nevětší prvek je $(-\infty, \infty)$ a nejmenší prvek je $\emptyset$. Nelze již ale říci, že infimum je průnik, protože ten nemusí být otevřený interval. Vezměme například systém intervalů $\{(0, x) \mid x > 1\}$, pak průnik je interval $(0, 1]$, který není otevřený a infimem je interval $(0, 1)$. Obecně, pro libovolný systém intervalů $X = \{(a_i, b_i) | i \in I\}$ musíme rozlišit dva případy: pokud $\bigcap_{i\in I}(a_i, b_i)$ obsahuje aspoň dva prvky, pak $inf X = (\ sup\{a_i\}_{i\in I}\ ,\ inf\{b_i\}_{i\in I}\ )$; pokud $\bigcap_{i\in I}(a_i, b_i)$ obsahuje nejvýše jeden prvek, pak $inf X = \emptyset$. Tedy, X má vždy infimum a M je úplný svaz. Poznamenejme, že $supX = (inf\{a_i\}_{i\in I}, sup\{b_i\}_{i\in I})$.

(c) je svaz — infimum je průnik, supremum sjednocení, není úplný svaz — nemá největší prvek, neexistují nekonečná suprema;

(d) je úplný (jednoprvkový) svaz;

(e) je svaz — infima n.s.d, suprema n.s.n, není úplný svaz — neexistuje největší prvek;

(f) je úplný svaz — největší prvek 0, nejmenší 1, infima jsou n.s.d. (zjednodušeně řečeno: konečná suprema jsou n.s.n, nekonečná jsou rovna 0).

(g) je svaz, není úplný svaz — neexistuje největší prvek;

(h) je svaz, není úplný svaz — neexistuje nejmenší prvek;

(i) je úplný svaz — největší prvek $A \times A$, nejmenší prvek "diagonála", infima jsou průniky, suprema — tzv. tranzitivní obal sjednocení — zde je dobře vidět aplikace věty 4.2. ze skript, tj., že stačí existence všech infim.

24. Vše se počítá "po složkách". Přesněji, pro $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ označme $a = \sup\{a_1, a_2\}$ a $b = \sup\{b_1, b_2\}$, kde supremum a se počítá ve svazu $(A, \leq)$ a supremum b se počítá ve svazu $(B, \sqsubseteq)$. Ukážeme, že prvek (a, b) je supremum dvojice $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ v uspořádané množině $(A \times B, \preceq)$.

Nejdříve musíme ukázat, že (a, b) je horní závora $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$. Protože $a = \sup\{a_1, a_2\}$ máme $a_1 \leq a$. Podobně $a_2 \leq a$, $b_1 \sqsubseteq b$. $b_2 \sqsubseteq b$. Proto $(a_1, b_1) \preceq (a, b)$ a $(a_2, b_2) \preceq (a, b)$.

Nyní ukážeme, že (a, b) je nejmenší horní závora $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$. Buď tedy $(c, d) \in A \times B$ horní závora $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$. Tedy $(a_1, b_1) \preceq (c, d)$ a $(a_2, b_2) \preceq (c, d)$. Vzhledem k definici relace $\preceq$ dostáváme $a_1 \leq c$, $a_2 \leq c$, $b_1 \sqsubseteq d$ a $b_2 \sqsubseteq d$. Protože $a = \sup\{a_1, a_2\}$ a c je horní závora $\{a_1, a_2\}$, plyne odtud, že $a \leq c$. Podobně dostaneme $b \sqsubseteq d$. Tudíž $(a, b) \preceq (b, d)$, což jsme chtěli dokázat.

Z duality plyne stejné tvrzení pro infimum, tj. $\inf\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\} = (\inf\{a_1, a_2\}, \inf\{b_1, b_2\})$.

25. (a) Označme $A = a \wedge b, B = b \wedge c, C = c \wedge a$ a dále $X = a \vee b, Y = b \vee c, Z = c \vee a$.
Nyní vidíme, že $A \leq a \leq X$ a podobně $A \leq b \leq Y$, $A \leq a \leq Z$. Je tedy A dolní závora množiny $\{X, Y, Z\}$ a tedy menší než její infimum. Tzn. $A \leq X \wedge Y \wedge Z$.
Stejným způsobem dostaneme $B \leq X \wedge Y \wedge Z$, $C \leq X \wedge Y \wedge Z$. Prvek $X \wedge Y \wedge Z$ je tedy horní závora množiny $\{A, B, C\}$ a proto je větší než její supremum $A \vee B \vee C$, tzn. $A \vee B \vee C \leq X \wedge Y \wedge Z$ což jsme měli dokázat.

(b) Označme $A = a \vee b, C = b \wedge c$ a $L = a \vee C = a \vee (b \wedge c)$, tj. L je levá strana nerovnosti. Pak podle předpokladu $a \leq c$. Protože infimum je dolní závora, máme $C \leq c$. Protože c je horní závora dvojice $\{a, C\}$ a L je supremum této dvojice, dostáváme $L \leq c$.

Pro A máme $a \leq A$, $C \leq b \leq A$. Opět tedy A je horní závora $\{a, C\}$ a proto $L \leq A$. Celkem tedy L je dolní závora $\{c, A\}$ a proto, je menší nebo rovna jejímu infimu. Tedy $L \leq A \wedge c = (a \vee b) \wedge c$.

8 Základní algebraické struktury

1. a) Pologrupa, neutrální prvek je 0, nulový prvek neexistuje, je to komutativní grupa.
   b) Pologrupa, neutrální prvek 1, nulový prvek je 0, není grupa, je komutativní.
   c) Pologrupa to není: $1-(2-3) \neq (1-2)-3$, neutrální a nulový prvek nemá (pozor 0 je pouze pravý neutrální prvek), grupa není, není komutativní: $1-2 \neq 2-1$.
   d) Pologrupa, neutrální prvek nemá, nulový prvek je 1, grupa není, je komutativní.

2. a) Je komutativní pologrupa, neutrální prvek je X.
   b) Je komutativní pologrupa, neutrální prvek je $\emptyset$.
   c) Není pologrupa, není komutativní, neutrální prvek nemá.
   d) Je komutativní pologrupa, neutrální prvek je $\emptyset$ (dokonce je to i grupa).

   Pozn.: V př. a)-c) pro $X = \emptyset$ je to (triviální) grupa; pro $X \neq \emptyset$ to grupa není.

3. a) Komutativní je, asociativní není: $a \circ (b \circ c) \neq (a \circ b) \circ c$, neutrální prvek nemá.
   b) Komutativní je, asociativní není: $c \circ (a \circ a) \neq (c \circ a) \circ a$, neutrální prvek b.
   c) Komutativní není: $a \circ b \neq b \circ a$, asociativní je (poněvadž operace je daná vztahem $x \circ y = x$, platí $(x \circ y) \circ z = x = x \circ (y \circ z)$ pro libovolná $x, y, z \in \{a, b, c\}$), neutrální prvek nemá.

4.
$$(\rho \circ \pi) \circ \sigma = \{(x,y) | \exists z \in X : (x,z) \in \sigma, (z,y) \in \rho \circ \pi\} = \\ \{(x,y) | \exists z, u \in X : (x,z) \in \sigma, (z,u) \in \pi, (u,y) \in \rho\}$$

   podobně

$$\rho \circ (\pi \circ \sigma) = \{(x,y) | \exists a \in X : (x,a) \in \pi \circ \sigma, (a,y) \in \rho\} = \\ \{(x,y) | \exists a, b \in X : (x,b) \in \sigma, (b,a) \in \pi, (a,y) \in \rho\}$$

   a rovnost je evidentní. (Jiný zápis viz. př. 16(b) v kapitole o relacích.) Neutrálním prvkem je "diagonála" $\{(x,x) | x \in X\}$, nulový prvek je prázdná relace.

   Pro prázdnou a jednoprvkovou množinu X je každá relace symetrická a tudíž jde o grupoid. Pokud množina X obsahuje alespoň dva různé prvky a, b, pak pro $\rho = \{(b,b)\}$, $\pi = \{(a,b),(b,a)\}$ není relace $\rho \circ \pi = \{(a,b)\}$ symetrická. Obecně tedy nejde o grupoid.

   Pokud $|X| \leq 1$, je každá relace tranzitivní a jde tudíž o grupoid. Pokud množina X obsahuje aspoň tři různé prvky a, b, c, pak pro $\rho = \{(a,a),(b,c)\}$, $\pi = \{(a,b),(c,c)\}$ není relace $\pi \circ \rho = \{(a,b),(b,c)\}$ tranzitivní. V případě $|X| = 2$ lze ukázat, že složení dvou tranzitivních relací je tranzitivní relace. Intuitivně je důvodem fakt, že existuje velmi málo netranzitivních relací. Obecně tedy nejde o grupoid.

5. Skládání zobrazení i relací je asociativní operace, jak jsme již dokázali v předchozím. $(PT(X), \circ)$ je grupoid protože $\alpha, \beta \in PT \implies \alpha \circ \beta \in PT$. Složení injektivních (resp. surjektivních, resp. bijektivních) transformací je injektivní (resp. surjektivní, resp. bijektivní). Všechny množiny obsahují identitu a proto se jedná o monoidy. Pro konečnou množinu X jsou všechny tři množiny stejné a tvoří grupu. Pro nekonečnou množinu X tvoří grupu pouze bijekce.

6. Operace průniku je obecně asociativní, proto je asociativní i na dané množině $\mathcal{O}$. Prvek $\emptyset$ je nulový prvek, neutrální prvek neexistuje. Grupa to není.

7. a) Ne. Neexistuje neutrální prvek.
   b) Ano.
   c) Ano.

d) Ano.

e) Ano.

8. a) Předpokládáme, že platí $ab = ac$ a dokazujeme rovnost $b = c$. Protože jde o grupu, existuje prvek inverzní k a, označme ho a^{-1}, a vynásobme jím rovnici zleva. Pak

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab) &= a^{-1}(ac) \\ (a^{-1}a)b &= (a^{-1}a)c \\ eb &= ec \\ b &= c \end{aligned}$$

Přitom e je neutrální prvek.

Podobně pravý zákon o krácení, pouze prvkem a^{-1} násobíme zprava.

b) $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +)$;

c)

$\circ$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

Asociativní není, neboť $(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c)$.

d)

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\circ$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Tyto tři grupy jsou izomorfní (a jsou izomorfní $(\mathbb{Z}_3, +)$). Pokud zvolíme neutrální prvek, lze tabulku doplnit jediným způsobem: ze zákona o krácení plyne, že v žádném řádku se nemůže vyskytovat jeden prvek dvakrát. Totéž platí pro sloupce.

e) Je jich celkem 16 — po vybrání neutrálního prvku máme vždy 4 možnosti jak tabulku doplnit. Všechny grupy jsou komutativní. Až na izomorfismus jsou právě dvě — buď každý prvek x má vlastnost, že $x \cdot x$ je neutrální prvek, nebo tuto vlastnost nemá. Podle toho poznáme, zda je grupa izomorfní $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ nebo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

9. a) Sčítání je operace, množina všech matic nad celými čísly s operací sčítání je komutativní grupa, neutrální prvek je matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a prvky navzájem inverzní jsou matice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Násobení je operace, je asociativní, není komutativní. Neutrální prvek je

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

grupa vzhledem k násobení to není, např. k nulové matici neexistuje inverze.

Množina všech matic nad $\mathbb{Z}$ spolu s operacemi sčítání a násobení tvoří nekomutativní okruh, kvůli nekomutativitě není ani obor integrity, ani těleso.

b) Stejné.

c) Sčítání není operací. Např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde první dvě matice jsou regulární a jejich součet není regulární matice.
Násobení je operace. Matice spolu s násobením tvoří nekomutativní grupu, inverzní prvky vzhledem k násobení jsou matice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ a } \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

Množina všech regulárních matic nad $\mathbb{Q}$ spolu s operacemi sčítání a násobení netvoří okruh.

d) Sčítání není operace, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

neleží v dané množině matic.
Násobení je operace, je komutativní a asociativní, neutrální prvek je E, navzájem inverzní prvky jsou matice

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy množina takových matic spolu s násobením tvoří komutativní grupu. (Tato grupa je izomorfní grupě $(\mathbb{R}, +)$.)

e) Sčítání není operace.
Násobení je operace, je asociativní, není komutativní, neutrální prvek je E, není grupa.

10. $(A, +, \cdot)$ je obor integrity, inverze existuje ke všem prvkům množiny

$$\left\{ \frac{m}{p} \,|\, m, p \in \mathbb{Z} - \{0\}, 3 \nmid m, p \right\}.$$

$(B, +, \cdot)$ je obor integrity, inverze existuje ke všem prvkům množiny

$$\left\{ \frac{\pm 3^m}{3^n} \,|\, n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

11. $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ není oborem integrity, neboť obsahuje dělitele nuly:

$$([0]_2, [1]_3) \cdot ([1]_2, [0]_3) = ([0]_2, [0]_3).$$

Je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, protože existuje izomorfismus $f \colon \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ daný předpisem $f([i]_6) = ([i]_2, [i]_3)$, což není obtížné ukázat.

12. a) $\alpha(a+b) = 3^{a+b} = 3^a \cdot 3^b = \alpha(a) \cdot \alpha(b), \quad \ker \alpha = \{0\}, \quad Im\alpha = \mathbb{R}^+.$

b) $\beta(a+b) = i^{a+b} = i^a \cdot i^b = \beta(a) \cdot \beta(b), \quad \ker \beta = \{z \in \mathbb{Z}; 4|z\} = [0]_4, \quad Im\beta = \{1, -1, i, -i\}.$

c)

$$\begin{aligned} \gamma((a+bi)\cdot(c+di)) &= \gamma(ac - bd + (ad+bc)i) = \\ &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = \gamma(a+bi) \cdot \gamma(c+di), \end{aligned}$$

$\ker \gamma = \{a + bi \in \mathbb{C}^* | a^2 + b^2 = 1\}, \quad Im\gamma = \mathbb{R}^+.$

13. a) α homomorfismus, není izomorfismus, b) β není zobrazení, c) γ izomorfismus, d) δ izomorfismus, e) ϵ není zobrazení, f) ζ homomorfismus, není izomorfismus, g) η není zobrazení, h) θ je zobrazení, není homomorfismus, i) ι homomorfismus, není izomorfismus.

14. $\ker\alpha = \{([0]_4,[0]_3),([2]_4,[0]_3)\},\ Im\alpha = \{[0]_{12},[2]_{12},[4]_{12},[6]_{12},[8]_{12},[10]_{12}\}$
$\ker\gamma = \{1\},\ Im\gamma = \mathbb{Q}^*$
$\ker\delta = \{[0]_{15}\},\ Im\delta = \mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_3$
$\ker\zeta = \{[0]_4\},\ Im\zeta = \{1,-1,i,-i\}$
$\ker\iota = \{2k|k\in\mathbb{Z}\} = [0]_2,\ Im\iota = \mathbb{Z}_2$.

15.

$$f\left(\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&d&e\\0&1&f\\0&0&1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1&a+d&e+b+af\\0&1&f+c\\0&0&1\end{pmatrix}\right) = a+d-f-c,$$
$$f\left(\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}1&d&e\\0&1&f\\0&0&1\end{pmatrix}\right) = a-c+d-f.$$

16. Není homomorfismus okruhů. Snadno se ověří, že platí $f((a+bi)+(c+di)) = f(a+bi)+f(c+di)$, ovšem pro součin požadovaná rovnost nevyjde:

$$f((a+bi)\cdot(c+di)) = f(ac-bd+(bc+ad)i) = ac-bd+bc+ad$$
$$f(a+bi)\cdot f(c+di) = (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

Tedy konkrétně, např. $f(i\cdot i) = f(-1) = -1 \neq 1 = 1\cdot 1 = f(i)\cdot f(i)$.

17. Množina $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ je nekonečná (a tedy alespoň dvouprvková).
Zřejmě $0,1\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Snadno též nahlédneme, že množina je uzavřena na sčítání i násobení. Dále pro $a,b\in\mathbb{Q}$ platí $(a+b\sqrt{3})+((-a)+(-b)\sqrt{3}) = 0$ a existuje tedy prvek opačný. Pokud $c+d\sqrt{3}\neq 0$ (všimněme si, že $c+d\sqrt{3}=0, c,d\in\mathbb{Q}$ implikuje $c=d=0$), pak též $c-d\sqrt{3}\neq 0$ a platí:

$$\frac{1}{c+d\sqrt{3}} = \frac{1}{c+d\sqrt{3}}\cdot\frac{c-d\sqrt{3}}{c-d\sqrt{3}} = \frac{c-d\sqrt{3}}{c^2-3d^2} = \frac{c}{c^2-3d^2}+\frac{-d}{c^2-3d^2}\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Tedy $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}),+,\cdot)$ je těleso.

Buď $\alpha:\mathbb{Q}(\sqrt{3})\to\mathbb{C}$ okruhový homomorfismus. Potom $\alpha(1)=1$, tedy i $\alpha(2)=\alpha(1+1)=\alpha(1)+\alpha(1)=1+1=2$. Podobně lze nahlédnout, že $\alpha(n)=n$ pro libovolné $n\in\mathbb{N}$. Dále $0=\alpha(0)=\alpha(1+(-1))=\alpha(1)+\alpha(-1)=1+\alpha(-1)$ a odtud $\alpha(-1)=-1$. Použitím vlastnosti homomorfismu dostaneme pro libovolné $n\in\mathbb{N}$: $\alpha(-n)=\alpha((-1)\cdot n)=\alpha(-1)\cdot\alpha(n)=(-1)\cdot n=-n$. Tudíž $\alpha(n)=n$ pro libovolné $n\in\mathbb{Z}$. Ukážeme totéž pro libovolné $n\in\mathbb{Q}$ a to nejdříve pro čísla tvaru $\frac{1}{n}$.
Platí $\alpha(\frac{1}{n})\cdot n=\alpha(\frac{1}{n})\cdot\alpha(n)=\alpha(\frac{1}{n}\cdot n)=\alpha(1)=1$, tedy $\alpha(\frac{1}{n})=n^{-1}=\frac{1}{n}$. Pro libovolná $p,q\in\mathbb{Z}-\{0\}$ tedy máme $\alpha(\frac{p}{q})=\alpha(p)\cdot\alpha(\frac{1}{q})=p\cdot\frac{1}{q}=\frac{p}{q}$. Čímž jsme dokončili důkaz, že $\alpha(r)=r$ platí pro libovolné $r\in\mathbb{Q}$.

Označme dále $\omega=\alpha(\sqrt{3})\in\mathbb{C}$. Potom podle vlastností homomorfismu máme pro libovolný prvek $a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ následujícíc rovnost: $\alpha(a+b\sqrt{3})=\alpha(a)+\alpha(b)\cdot\alpha(\sqrt{3})=a+b\cdot\omega$. Tzn. homomorfismus je zcela popsán hodnotou $\omega\in\mathbb{C}$. Pokusme se tedy určit všechny možné hodnoty ω. Opět ze základních vlastností máme: $\omega^2=\alpha(\sqrt{3})\cdot\alpha(\sqrt{3})=\alpha(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})=\alpha(3)=3$. Tedy ω je takové komplexní číslo, pro něž platí $\omega^2=3$. Vidíme tedy, že buď $\omega=\sqrt{3}$ nebo $\omega=-\sqrt{3}$. První možnost vede k tomu, že α je identita, která je homomorfismem. Druhá vede k předpisu $\alpha(a+b\sqrt{3})=a-b\sqrt{3}$ o kterém se již snadno dokáže, že zadává homomorfismus. Existují tedy dva homomorfismy, které nejsou izomorfismy. Lze však nahlédnout, že se jedná o homomorfismy okruhu $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ do sebe.

9 Kombinatorika

1. Spočítáme postupně počet čtverců s délkou strany $n+1-i$. Celkový počet tedy je $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Soubor 28 kostek domina sestává z 7 kostek, které mají stejné poloviny, říkejme jim kostky typu A, a $21 = \binom{7}{2}$ kostek, které mají odlišné poloviny, typ B. Dvě kostky, které lze k sobě přiložit, lze vybrat tak, že buď vybereme dvě kostky typu B, nebo po jedné kostce od obou typů.
Dvě kostky typu B: Vybereme společnou hodnotu: 7 možností; posléze dvě čísla ze zbylých 6, kde nám nezáleží na pořadí: $\binom{6}{2}$, tj. dohromady $7 \cdot \binom{6}{2} = 7 \cdot 15 = 105$ možností.
Kostky obou typů: Vybereme kostku typu A: 7 možností; posléze doplníme jedno číslo ze zbylých 6, tj. dohromady $7 \cdot 6 = 42$.
Celkem 147.

3. (a) $5! = 120$;
   (b) $4! = 24$; z A a B uděláme "dvojpísmeno" AB;
   (c) 60; vybereme nejdříve dvě místa, kdy budou mluvit A a B (v tomto pořadí), tj. $\binom{5}{2} = 10$ a zbylá 3 místa obsadíme libovolně řečníky C, D, E, tj. $3! = 6$ možností.

4. (a) $4! = 24$;
   (b) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$;
   (c) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

   Sudá čísla:

   (a) $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$, začneme obsazovat odzadu;
   (b) $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$;
   (c) obsadíme nejdříve první a poslední místo: první sudé: $2 \cdot 2$ možnosti, první liché $3 \cdot 3$ možnosti, celkem 13 dvojic první+poslední. Zbylá dvě místa: $4 \cdot 3$. Celkem $13 \cdot 12 = 156$.

   Čísla dělitelná čtyřmi: Záleží na posledním dvojčíslí – musí být dělitelné 4, tj. především sudé.

   (a) Možná dvojčíslí: $12, 32, 24$. Tzn. celkem 6 čísel.
   (b) 8 možných dvojčíslí, celkem 96 čísel.
   (c) 4 dvojčíslí bez použití 0, lze doplnit $3 \cdot 3$ možnostmi, 3 dvojčíslí s použitím 0, lze doplnit $4 \cdot 3$ možnostmi. Celkem $4 \cdot 9 + 3 \cdot 12 = 72$ čísel.

5. $\binom{6}{2} = 15$.

6. Pokud vybereme dvě dívky máme $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} = 210$ možností, pokud tři dívky $\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} = 140$ možností, pokud čtyři dívky $\binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2} = 21$ možností. Celkem 371.

7. $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$.

8. Nejdřív vybereme osazenstvo dvoulůžkového pokoje: $\binom{8}{2} = 28$ možností. Poté vybereme osazenstvo prvního trojlůžkového pokoje: $\binom{6}{3} = 20$. Celkem $28 \cdot 20 = 560$ možností. K výsledku dojdeme i když začnem obsazovat nejdříve trojlůžkové pokoje: $\binom{8}{3}\binom{5}{3}$.

9. Použijeme distributivní zákon na součin $(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$. Potřebujeme pouze určit, kolikrát se objeví sčítanec $a^i b^{n-i}$ v součtu po roznásobení. Ten vznikne tak, že z i závorek vybereme a a ze zbylých b. Tj. sčítanec $a^i b^{n-i}$ tam bude $\binom{n}{i}$-krát.

10. Tradiční trik s přihrádkami.
Do 6 různých přihrádek rozdělujeme 15 předmětů. Každou konfiguraci tedy můžeme zakódovat jako posloupnost patnácti 0 (míčky) a pěti 1 (oddělovače přihrádek). Tzn. celkový počet určíme tak, že vybereme 5 míst v dvacetičlenné posloupnosti kam dáme 1 (oddělovač). Tj. $\binom{20}{5}$.
Varianta: Liší se pouze tím, že na začátku dáme každému dítěti po jednom míčku a poté řešíme stejnou úlohu jako byla předchozí pro 6 dětí a 9 míčků. Odpověď $\binom{14}{5}$ možností.

11. V podstatě se jedná o stejnou úlohu jako byla předchozí. Hodnota x_i značí kolik míčků (jednotek) dostane i-té dítě, přičemž celkový počet míčků (jednotek) je n.
Tedy $\binom{n+k-1}{k-1}$ řešení v množině celých nezáporných čísel.
V množině přirozených čísel nejdříve "rozdáme všem po míčku". Tj. pro $k > n$ nemá rovnice řešení. Pro $k \le n$ máme $\binom{n-1}{k-1}$ řešení.

12. Přidáme $k+1$ proměnnou $x_{k+1} = n - (x_1 + \dots x_k)$ a převedeme na předchozí úlohu. Tedy v množině celých nezáporných čísel má nerovnice $\binom{n+k}{k}$ řešení.
V množině přirozených čísel: nejdříve "rozdáme všem po míčku". A poté řešíme úlohu stejným trikem jako pro nezáporná čísla. Tj. pro $k > n$ nemá nerovnice řešení. Pro $k \le n$ máme $\binom{n}{k}$ řešení.

13. Označme postupně "přírůstky" $x_1 = a_1 - 1, x_2 = a_2 - a_1, \dots x_k = a_k - a_{k-1}$. Protože naopak z posloupnosti $(x_1, x_2, \dots x_k)$ je původní posloupnost $(a_1, a_2, \dots a_k)$ jednoznačně určena vztahy $a_1 = 1 + x_1, a_2 = 1 + x_1 + x_2, \dots, a_k = 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$, je počet posloupností stejný jako počet řešení nerovnosti $1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k \le n$ v množině nezáporných celých čísel (nerovnost jsme dostali z podmínky $a_k \le n$). Tedy hledaný počet je $\binom{n+k-1}{k}$.

14. Pokud $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ je jednoznačný rozklad na prvočinitele (tj. $p_1, \dots, p_k$ jsou různá prvočísla a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$), pak počet dělitelů je $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$, neboť každý dělitel d je tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, kde $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, tj. pro každé β_i máme $(\alpha_i + 1)$ možných hodnot.

15. Úloha na princip inkluze a exkluze.
Označme A (resp. N, resp. F) množinu osob hovořících anglicky (resp. německy, resp. francouzsky). Dle zadání tedy: $|A| = 6, |N| = 6, |F| = 7, |A \cap N| = 4, |N \cap F| = 3, |F \cap A| = 2, |A \cap N \cap F| = 1$.
    (a) $|A \cup F \cup N| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |N \cap F| - |F \cap A| + |A \cap N \cap F| = 11$;
    (b) $|A - (N \cup F)| = |A| - |A \cap N| - |F \cap A| + |A \cap N \cap F| = 1$;
    (c) $|F - (N \cup A)| = |F| - |F \cap N| - |F \cap A| + |A \cap N \cap F| = 3$.

16. Princip inkluze a exkluze.
Vlastnosti podle kterých dělíme všechna rozesazení jsou tři, a to, že tři angličani (resp. francouzi, resp. němci) sedí vedle sebe. Celkový počet všech rozesazení je 9!. Počet všech rozesazení, že sedí vedle sebe 3 angličani určíme takto: pořadí angličanů: 3!, rozesazení 6 lidí + trojice angličanů: 7!. Tzn. celkem $3! \cdot 7!$.
Stejný počet je těch rozesazení, kde sedí vedle sebe tři francouzi a těch, kde sedí vedle sebe tři němci.
Počet všech rozesazení, že sedí vedle sebe 3 angličani a zároveň 3 francouzi určíme podobně: počet pořadí angličanů, krát počet pořadí francouzů, krát počet rozesazení 3 němců + dvou trojic, tzn. $(3!)^2 \cdot 5!$.
Počet všech rozesazení, že sedí vedle sebe 3 angličani, zároveň 3 francouzi a zároveň 3 němci je $(3!)^4$.
Celkem podle principu inkluze a exkluze dostáváme $9! - \binom{3}{1} \cdot 3!7! + \binom{3}{2} \cdot (3!)^2 \cdot 5! - (3!)^4 = 283824$.

17. (a) $\binom{n}{k}$;
    (b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;
    (c) k^n;
    (d) $n!$
    (e) $\frac{n!}{(n-k)!}$;
    (f) viz text prof. Rosického. $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$;
    (g) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i = (k+1)^n$;
    (h) viz př. 13 kde jsou prohozeny role k a n; $\binom{n+k-1}{n}$
    (i) každá relace je podmnožina množiny $A \times A$, tj. $2^{(n^2)}$;
    (j) reflexivní relace obsahují všechny prvky tvaru (x, x) a doplníme tedy libovolnou podmnožinou $A \times A - \{(x, x) \mid x \in A\}$, tj. $2^{(n^2 - n)}$;
    (k) pro $x \neq y$ jsou v relaci buď (x, y) i (y, x), nebo ani jedno z nich. Stačí tedy brát dvojici (x, y) pro $x < y$. Tj. symetrických relací je stejně jako podmnožin množiny $\{(x, y) \mid x, y \in A, x \le y\}$, tedy hledaný počet je $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(l) Pro $x \neq y$ z dvou prvků (x, y) a (y, x) může být v relaci nejvýše jedna uspořádaná dvojice, tj. máme tři možnosti ((x, y) nebo (y, x) nebo nic). Pro (x, x) tato dvojice v relaci je nebo není. Tedy hledaný počet je $2^n \cdot 3^{\binom{n}{2}}$.