ZÁKLADY MATEMATIKY PRO OBOR APLIKOVANÁ INFORMATIKA - ÚNOR 2007

Řešení písemky

Úloha 1. Uvažujte funkci

$$f(x) = \ln(x - x^2).$$

(1) Najděte její definiční obor.
(2) Najděte jednostranné limity funkce $f(x)$ v krajních bodech definičního oboru, případně v $\pm\infty$.
(3) Vypočtěte $f'(x)$.
(4) Určete intervaly monotonie funkce f.
(5) Najděte její globální extrémy.
(6) Napište obor hodnot funkce f.
(7) Načrtněte její graf.

Řešení.
(1) Definiční obor funkce je $Df = (0, 1)$.

(2) Limity jsou

$$\lim_{x\to 0_+} \ln(x - x^2) = \lim_{y\to 0_+} \ln y = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 1_-} \ln(x - x^2) = \lim_{y\to 0_+} \ln y = -\infty.$$

(3) Derivace je

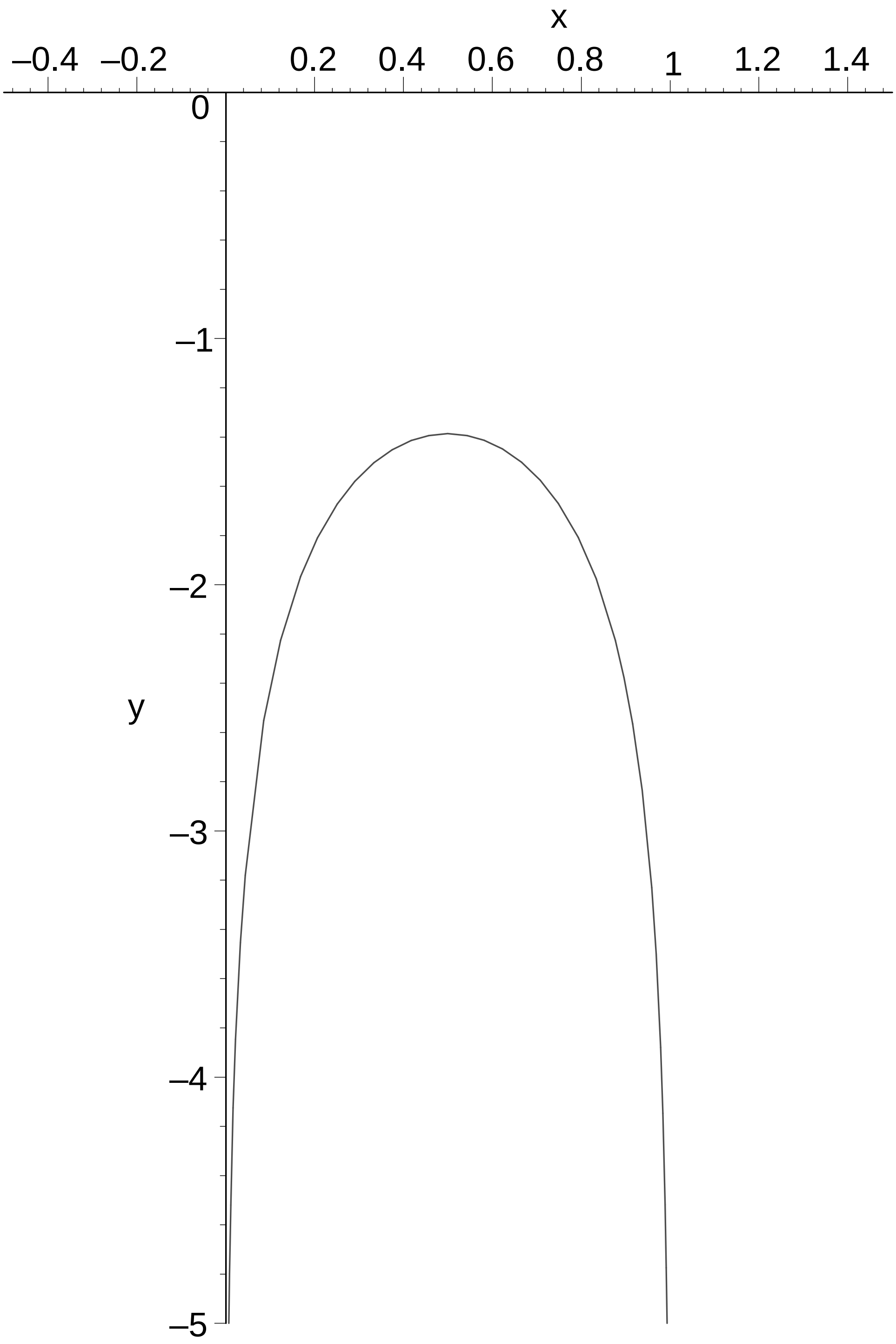
$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{x - x^2}$$

(4) f je rostoucí v intervalu $(0, 1/2]$, neboť je v tomto intervalu spojitá a její derivace je v intervalu $(0, 1/2)$ kladná. f je klesající v intervalu $[1/2, 0)$, neboť je spojitá a její derivace je v intervalu $(1/2, 1)$ záporná.

(5) Globální maximum nabývá funkce v bodě $x_0 = 1/2$ a jeho hodnota je $f(1/2) = -\ln 4$. Globálního minima ani dalších lokálních extrémů funkce f nenabývá.

(6) Obor hodnot funkce f je $f(\mathbb{R}) = (-\infty; -\ln 4]$.

(7) Graf funkce f:



Úloha 2. Uvažujte polynomiální funkci

$$g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2.$$

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina bodů, které leží nad grafem funkce g a pod osou x. Najděte všechny kořeny polynomu g, víte-li, že dva z nich jsou $\pm i$, a vypočtěte obsah množiny M.

Řešení. Celočíselné kořeny polynomu g dělí absolutní člen polynomu, tj. číslo 2. Lze tedy uhodnout, že kořeny jsou $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$. Proto

$$g(x) = (x+1)(x-2)(x^2+1).$$

Tedy další kořeny jsou komplexní čísla $\pm i$. (Tuto informaci jsme měli již v zadání, ale, jak vidíme, není k řešení potřeba.)
Protože f je kladná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ a záporná na intervalu $(-1, 2)$, je obsah množiny M roven absolutní hodnotě určitého integrálu

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} g(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} (x^4 - x^3 - x^2 - x - 2)\,dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} \\
&= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 2 - 4\right) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) \\
&= \frac{147}{20} - \frac{300}{20} = -\frac{153}{20}.
\end{aligned}$$

Obsah množiny M je $\frac{153}{20}$.

Úloha 3. V loterii je z čísel $\{1, 2, 3, \dots, 34, 35\}$ taženo 5 čísel, přitom nezáleží na jejich pořadí. Sázející těchto 5 čísel tipuje a vyhrává 1. cenu, jestliže uhodne správně všech 5 čísel, vyhrává 2. cenu, jestliže tipuje správně 4 čísla, a vyhrává 3. cenu, jestliže uhodne správně 3 čísla.

(1) Jaká je pravděpodobnost získání 1. ceny?
(2) Jaká je pravděpodobnost, že budou tažena pouze sudá čísla?
(3) Jaká je pravděpodobnost získání 3. ceny?
(4) Jaká je pravděpodobnost, že budou tažena aspoň dvě sudá čísla?

Definujte, co je to kombinační číslo $\binom{n}{k}$, a výsledky jednotlivých úkolů zapisujte pomocí těchto kombinačních čísel.

Řešení. Kombinační číslo je definováno takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1}.$$

(1) Počet všech možných tahů v loterii je dán počtem 5-prvkových podmnožin možiny $\{1, 2, 3, \dots, 34, 35\}$. Těch je $\binom{35}{5}$. 1. cenu získává pouze jedna kombinace čísel, proto pravděpodobnost je

$$p_1 = \frac{1}{\binom{35}{5}}.$$

(2) Sudých čísel je 17. Tahů, které obsahují pouze sudá čísla, je $\binom{17}{5}$. Tedy pravděpodobnost, že budou tažena pouze sudá čísla je

$$p_2 = \frac{\binom{17}{5}}{\binom{35}{5}}.$$

(3) Počet tahů, které obsahují právě 3 čísla z vybraných 5, je $\binom{5}{3}\binom{30}{2}$. Pravděpodobnost získání 3. ceny je tedy

$$p_3 = \frac{\binom{5}{3}\binom{30}{2}}{\binom{35}{5}}.$$

(4) Počet tahů obsahujících právě k sudých čísel $(0 \le k \le 5)$ je

$$\binom{17}{k}\binom{18}{5-k}.$$

Proto pravděpodobnost, že budou tažena aspoň dvě sudá čísla je

$$p_4 = \frac{\binom{17}{2}\binom{18}{3} + \binom{17}{3}\binom{18}{2} + \binom{17}{4}\binom{18}{1} + \binom{17}{5}}{\binom{35}{5}}.$$

Totéž lze spočítat rovněž takto:

$$p_4 = 1 - \frac{\binom{17}{1}\binom{18}{4} + \binom{18}{5}}{\binom{35}{5}}.$$