ZÁKLADY MATEMATIKY PRO OBOR APLIKOVANÁ INFORMATIKA - ČERVEN 2006

Řešení písemky

Úloha 1. Uvažujte funkci

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(1) Najděte limity funkce $f(x)$ v $\pm\infty$.
(2) Vypočtěte $f'(x)$.
(3) Určete intervaly monotonie funkce f.
(4) Najděte její lokální a globální extrémy.
(5) Napište obor hodnot funkce f.
(6) Načrtněte její graf.

Řešení.
(1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Analogicky

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

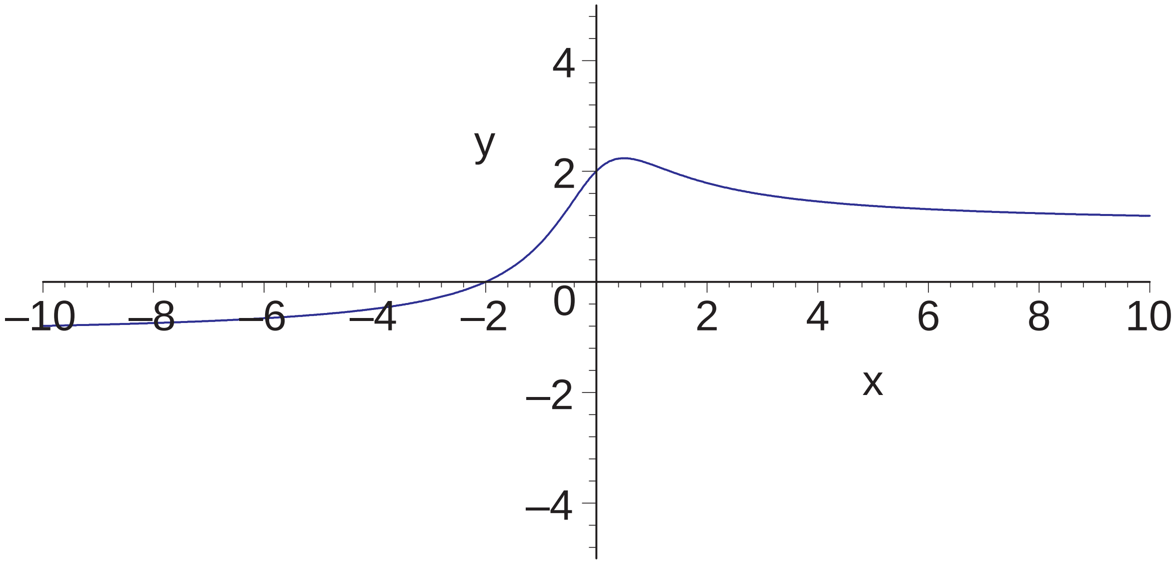
(2)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+2)\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2-2x}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{1-2x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

(3) f je rostoucí v intervalu $(-\infty, 1/2]$, neboť v tomto intervalu je f' kladná. f je klesající v intervalu $[1/2, \infty)$, neboť v tomto intervalu je f' záporná.

(4) Globální maximum nabývá funkce v bodě $x_0 = 1/2$ a jeho hodnota je $f(1/2) = \sqrt{5}$. Globálního minima ani dalších lokálních extrémů funkce f nenabývá.

(5) Obor hodnot funkce f je $f(\mathbb{R}) = (-1; \sqrt{5}]$.


4
y
2
0
–10
–8
–6
–4
–2
2
4
6
8
10
–2
x
–4

Úloha 2. V $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory

$$U = [(1,2,1,0),\ (-1,1,1,1)]\ , \quad V = [(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)].$$

(Hranaté závorky značí lineární obal.) Najděte bázi průniku a vypočtěte dimenzi součtu těchto podprostorů.

Řešení. Vektory generující podprostory U a V označme postupně u_1, u_2, v_1, v_2. Vektor w leží v $U \cap V$, právě když existují reálná čísla a, b, c, d taková, že

$$w = au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2.$$

Hledáme tedy čísla a, b, c, d taková, že ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ platí rovnice

$$au_1 + bu_2 - cv_1 - dv_2 = 0.$$

Porovnáním souřadnic dostaneme soustavu 4 homogenních rovnic o 4 neznámých. Tu vyřešíme provedením Gaussovy eliminace:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stačí spočítat neznámé c a d:

$$d = -t, \qquad c = 3t,$$

kde t je reálný parametr. Všechny vektory $w \in U \cap V$ jsou tvaru

$$cv_1 + dv_2 = 3t(2,-1,0,1) - t(1,-1,3,7) = (5t,-2t,-3t,-4t) = t(5,-2,-3,-4).$$

Tedy průnik podprostorů $U \cap V$ má bázi tvořenou vektorem $(5,-2,-3,-4)$. Jeho dimenze je tedy 1.

Dimenzi součtu spočítáme ze vztahu

$$\dim (U+V) = \dim U + \dim V - \dim (U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Úloha 3. Při písemce z matematiky řešilo 200 studentů 3 úlohy. Každý z nich vyřešil aspoň jednu úlohu, přitom první úlohu vyřešilo 128 studentů, druhou 156 studentů a třetí 126 studentů. Právě dvě úlohy vyřešilo 48 studentů. Kolik studentů vyřešilo všechny tři úlohy? (Zapište postup výpočtu, samotný výsledek nestačí.)

Řešení. Označme postupně A_1, A_2, A_3 množiny studentů, kteří vyřešili úlohu 1, 2 a 3. Dále označme $A_{ij} = A_i \cap A_j$ množinu studentů, kteří vyřešili současně úlohu i a j a konečně označme $A_{123} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ množinu těch studentů, kteří vyřešili všechny tři úlohy. Podle principu inkluze a exkluze platí pro počty prvků těchto množin

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{12}| - |A_{13}| - |A_{23}| + |A_{123}|.$$

Nyní si stačí uvědomit, že podle zadání

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 200$$

a že pro počet $d = 48$ těch, kteří vyřešili právě dvě úlohy, platí

$$|A_{12}| + |A_{13}| + |A_{23}| = d + 3|A_{123}| = 48 + 3|A_{123}|.$$

Dosazením do prvé rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 200 = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (d + 3|A_{123}|) + |A_{123}| \\ &= 128 + 156 + 126 - 48 - 2|A_{123}|. \end{aligned}$$

Odtud už je lehké spočítat, že

$$|A_{123}| = 81.$$

Všechny tři úlohy vyřešilo 81 studentů.