ZÁKLADY MATEMATIKY PRO OBOR APLIKOVANÁ INFORMATIKA - ČERVEN 2007

Řešení písemky

Úloha 1. Uvažujte funkci

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

(1) Najděte její definiční obor. (1 bod)
(2) Najděte jednostranné limity funkce $f(x)$ v krajních bodech definičního oboru, případně v $\pm\infty$. (3 body)
(3) Vypočtěte $f'(x)$. (1 bod)
(4) Určete intervaly monotonie funkce f. (2 bod)
(5) Najděte její globální extrémy. (1 bod)
(6) Najděte její lokální extrémy. (1 bod)
(7) Načrtněte její graf. (1 bod)

Řešení.
(1) Definiční obor funkce je $Df = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

(2) Limity jsou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = -1,$$
$$\lim_{y \to -1_-} f(x) = \lim_{y \to 1_+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -1_+} f(x) = \lim_{y \to 1_-} f(x) = \infty.$$

(3) Derivace je

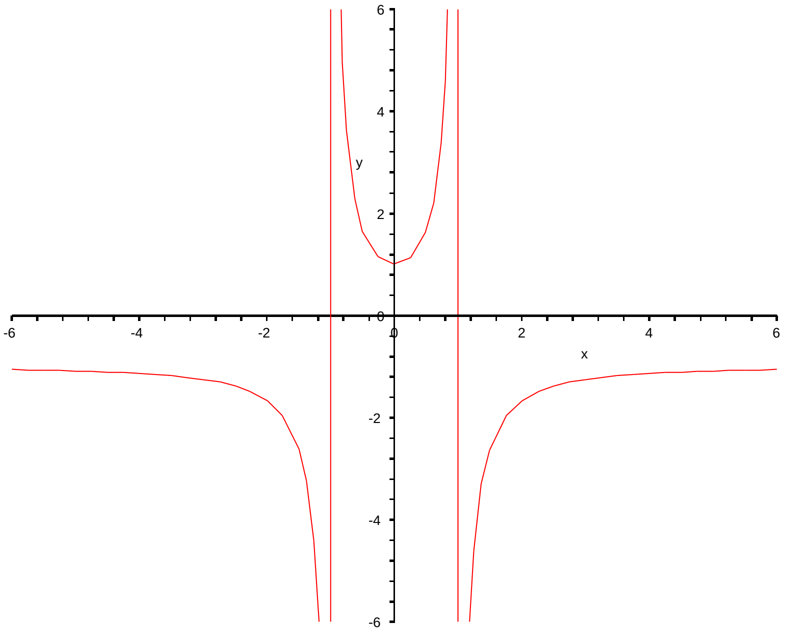
$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

(4) f je rostoucí v intervalu $(0, 1)$ a v $(1, \infty)$, neboť její derivace je v těchto intervalech kladná.
f je klesající v intervalu $= (-\infty, -1)$ a v $(-1, 0)$, neboť její derivace je v těchto intervalech záporná.

(5) Funkce nemá globální extrémy, neboť dvě z limit v (2) jsou $-\infty$ a dvě ∞.

(6) Lokálního minima nabývá funkce pouze v bodě $x_0 = 0$ a jeho hodnota je $f(0) = 1$. Lokálního maxima funkce f nenabývá.

(7) Graf funkce f:



Úloha 2. Zjistěte, pro které parametry $a \in \mathbb{R}$ je množina řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + \ x_3 + ax_4 &= 2 \\ x_1 + \ x_2 + ax_3 + \ x_4 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + \ x_3 + \ x_4 &= 0 \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 &= 7 \end{aligned}$$

o neznámých $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ neprázdná. Pro tyto parametry soustavu vyřešte.

Řešení. Matici soustavy upravíme pomocí elementárních řádkových operací do schodovitého tvaru"

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & -5 \end{array}\right)$$

Pro $a = 1$ nemá soustava řešení. Pro $a \neq 1$ je řešením

$$x_4 = \frac{5}{1-a}, \quad x_3 = x_2 = \frac{7}{1-a}, \quad x_1 = \frac{-7a-12}{1-a}.$$

Úloha 3. Anička má oblíbené číslo 6, oblíbená čísla Bédi jsou 4 a 5 a Cyrila 1, 2 a 3. Střídavě v pořadí Anička, Béďa, Cyril, Anička, Béďa, Cyril atd. každý z nich hází jedenkrát hrací kostkou. Hra končí v okamžiku, kdy někomu z nich padne jeho oblíbené číslo. Ten, komu oblíbené číslo padlo, vyhrává. Řekneme, že hra končí v n-tém kole, jestliže některý hráč vyhrál svým n-tým hodem.

(1) Jaká je pravděpodobnost, že Cyril vyhraje v 1. kole? (2 body)
(2) Jaká je pravděpodobnost, že Anička vyhraje v 2. kole? (2 body)
(3) Jaká je pravděpodobnost, že Béďa vyhraje v 1. nebo v 2. kole? (3 body)
(4) Jaká je pravděpodobnost, že hra bude mít více než 5 kol? (3 body)

Řešení jednotlivých úkolů stručně, ale jasně zdůvodněte. Výsledky stačí zapisovat s použitím základních početních operací, které nemusíte vyčíslit.

Řešení. (1) Pravděpodobnost, že Cyril vyhraje v 1. kole je

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}.$$

(2) Pravděpodobnost, že Anička vyhraje v 2. kole je

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{108}.$$

(3) Pravděpodobnost, že Béďa vyhraje v 1. nebo v 2. kole je

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{115}{364}.$$

(Pozor, zde byla do 31. 1. chyba! Děkuji panu Jakubu Vejmolovi za upozornění.)

(4) Pravděpodobnost, že hra bude mít více než 5 kol je

$$\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{18}\right)^5.$$