

**ZÁKLADY MATEMATIKY PRO OBOR INFORMATIKA
- ÚNOR 2007**

1. Uvažujte funkci

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

- (1) Najděte její definiční obor.
- (2) Najděte jednostranné limity funkce $f(x)$ v krajních bodech definičního oboru, případně v $\pm\infty$.
- (3) Vypočtěte $f'(x)$.
- (4) Určete intervaly monotonie funkce f .
- (5) Najděte její globální extrémy.
- (6) Napište obor hodnot funkce f .
- (7) Načrtněte její graf.

2. Nechť n je libovolné přirozené číslo. Najděte součet

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2,$$

víte-li, že pro všechna čísla n je výsledek tvaru

$$a + bn + cn^2 + dn^3,$$

kde čísla a, b, c, d nezávisí na čísle n . (Návod: Sestavte soustavu rovnic pro neznámé a, b, c, d .)

3. V rovině je dána čtvercová síť soustavou přímk o rovnicích $x = n$, $y = m$, kde n a m probíhají množinou všech celých čísel. Nechť pro pevná celá čísla $p \geq 0$ a $q \geq 0$ číslo $C(p, q)$ označuje počet cest, kterými se z bodu $[0, 0]$ dostaneme do bodu $[p, q]$ tak, že jdeme po přímkách sítě vždy jen nahoru nebo doprava. Nechť $C(0, 0) = 1$.

- (1) Čemu se rovná $C(3, 2)$?
- (2) Jaký je vztah mezi čísly $C(p-1, q)$, $C(p, q-1)$ a $C(p, q)$, pokud $p \geq 1$ a $q \geq 1$?
- (3) Vypočtěte číslo $C(p, q)$ pomocí čísel p a q . (Návod: Zakódujte každou cestu pomocí 0 a 1 a použijte své znalosti z kombinatoriky.)
- (4) Nechť $0 < a < p$, $0 < b < q$ jsou přirozená čísla. Kolik cest z bodu $[0, 0]$ do bodu $[p, q]$ (jdoucích jen nahoru nebo doprava) prochází přes bod $[a, b]$?