ZÁKLADY MATEMATIKY PRO OBOR INFORMATIKA - ÚNOR 2007

Řešení písemky

Úloha1. Uvažujte funkci

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(1) Najděte její definiční obor.
(2) Najděte jednostranné limity funkce $f(x)$ v krajních bodech definičního oboru, případně v $\pm\infty$.
(3) Vypočtěte $f'(x)$.
(4) Určete intervaly monotonie funkce f.
(5) Najděte její globální extrémy.
(6) Napište obor hodnot funkce f.
(7) Načrtněte její graf.

Řešení. (1) Definiční obor funkce je $Df = (0, \infty)$.

(2) Protože $\lim_{x\to 0_+} \ln x = -\infty$ a $\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty$, je

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = -\infty.$$

Podle l'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

(3) Derivace funkce je

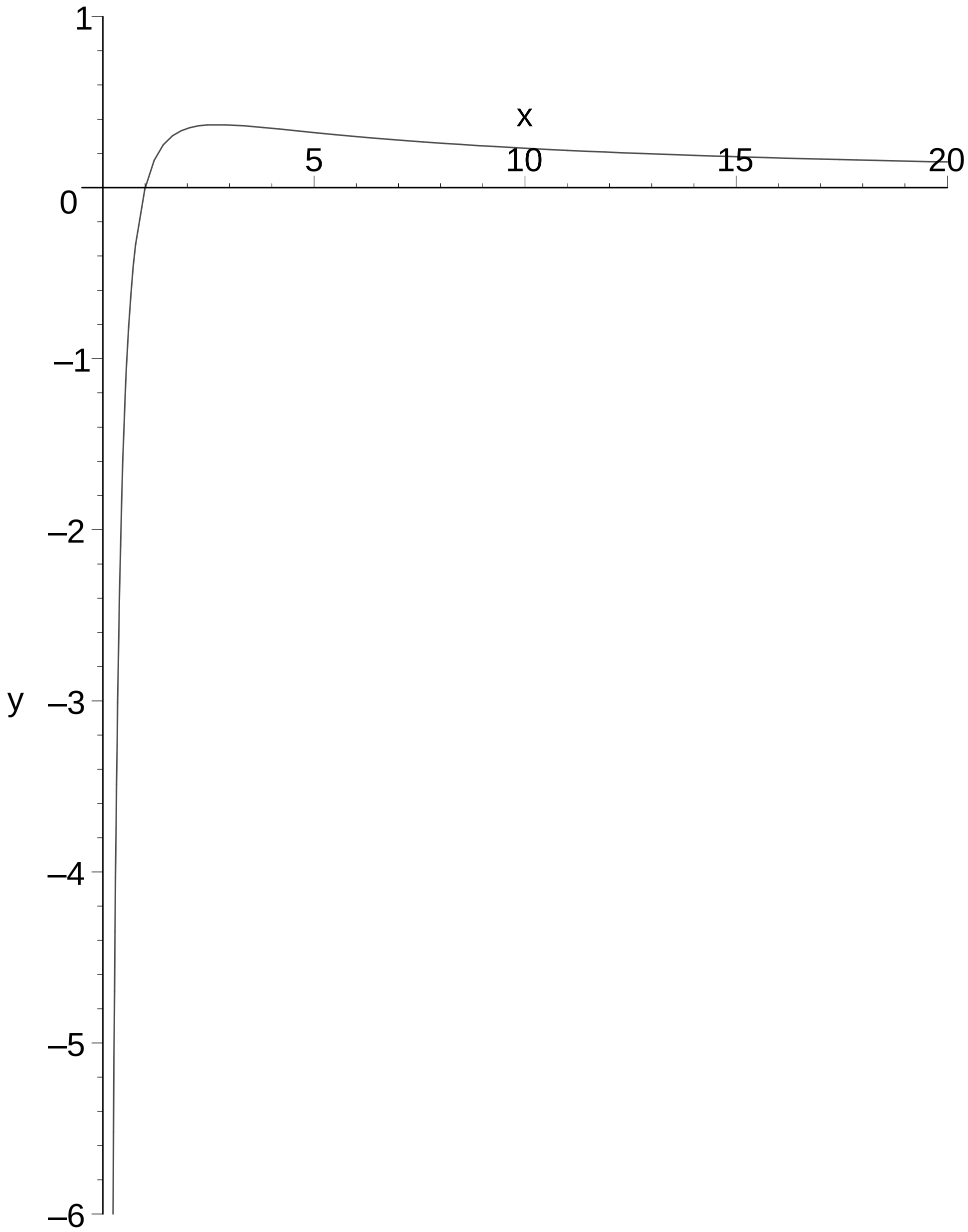
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

(4) Funkce f je rostoucí v intervalu $(0, \mathrm{e}]$, neboť je v tomto intervalu spojitá a její derivace je v intervalu $(0, \mathrm{e})$ kladná. f je klesající v intervalu $[\mathrm{e}, \infty)$, neboť je spojitá a její derivace je v intervalu (e, ∞) záporná.

(5) Globální maximum nabývá funkce v bodě $x_0 = \mathrm{e}$ a jeho hodnota je $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{-1}$. Globálního minima ani dalších lokálních extrémů funkce f nenabývá.

(6) Obor hodnot funkce f je $f(\mathbb{R}) = (-\infty; \mathrm{e}^{-1}]$.

(7) Graf funkce f:



Úloha 2. Nechť n je libovolné přirozené číslo. Najděte součet

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2,$$

víte-li, že pro všechna čísla n je výsledek tvaru

$$a + bn + cn^2 + dn^3,$$

kde čísla a, b, c, d nezávisejí na čísle n. (Návod: Sestavte soustavu rovnic pro neznámé a, b, c, d.)

Řešení. Do rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = a + bn + cn^2 + dn^3$$

dosadíme postupně $n = 1, 2, 3, 4$ (šlo by rovněž dosazovat $n = 0, 1, 2, 3$ a bylo by to jednodušší, zkuste sami). Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + d \\ 5 &= a + 2b + 4c + 8d \\ 14 &= a + 3b + 9c + 27d \\ 30 &= a + 4b + 16c + 64d \end{aligned}$$

Matici soustavy upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 14 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & 13 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & 29 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Odtud dostaneme

$$d = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{6}, \quad a = 0.$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

Úloha 3. V rovině je dána čtvercová síť soustavou přímek o rovnicích $x = n$, $y = m$, kde n a m probíhají množinou všech celých čísel. Nechť pro pevná celá čísla $p \geq 0$ a $q \geq 0$ číslo $C(p, q)$ označuje počet cest, kterými se z bodu $[0, 0]$ dostaneme do bodu $[p, q]$ tak, že jdeme po přímkách sítě vždy jen nahoru nebo doprava. Nechť $C(0, 0) = 1$.

(1) Čemu se rovná $C(3, 2)$?
(2) Jaký je vztah mezi čísly $C(p-1, q)$, $C(p, q-1)$ a $C(p, q)$, pokud $p \geq 1$ a $q \geq 1$?
(3) Vypočtěte číslo $C(p, q)$ pomocí čísel p a q. (Návod: Zakódujte každou cestu pomocí 0 a 1 a použijte své znalosti z kombinatoriky.)
(4) Nechť $0 < a < p$, $0 < b < q$ jsou přirozená čísla. Kolik cest z bodu $[0, 0]$ do bodu $[p, q]$ (jdoucích jen nahoru nebo doprava) prochází přes bod $[a, b]$?

Řešení. (2) Cesty vedoucí do bodu $[p, q]$ jsou dvojího druhu; ty, které procházejí bodem $[p-1, q]$ a ty procházející bodem $[p, q-1]$. (Nakreslete si obrázek!) Proto

$$C(p, q) = C(p - 1, q) + C(p, q - 1).$$

(1) Z předchozího vztahu můžeme postupně spočítat, že

$$C(0, q) = C(p, 0) = 1, \quad C(1, q) = q + 1, \quad C(p, 1) = p + 1$$

a dále

$$C(2, 2) = C(2, 1) + C(1, 2) = 3 + 3 = 6,$$
$$C(3, 2) = C(2, 2) + C(3, 1) = 6 + 4 = 10.$$

(3) Každou cestu zakódujeme pomocí 0 a 1 takto: krok v síti doprava je 1, krok v síti nahoru je 0. Cest do bodu $[p, q]$ je tedy přesně tolik, kolik je posloupností p jedniček a q nul. Těch je

$$\frac{(p+q)!}{p!q!} = \binom{p+q}{p}.$$

(4) Z bodu $[0, 0]$ do bodu $[a, b]$ vede $C(a, b)$ cest. Z bodu $[a, b]$ do bodu $[p, q]$ vede stejný počet cest jako z bodu $[0, 0]$ do bodu $[p-a, q-b]$, tedy $C(p-a, q-b)$ cest. Počet cest z bodu $[0, 0]$ do bodu $[p, q]$ procházejících přes bod $[a, b]$ je proto

$$C(a, b) \cdot C(p - a, q - b) = \binom{a+b}{a} \cdot \binom{p+q-a-b}{p-a}.$$