ZÁKLADY MATEMATIKY PRO OBOR INFORMATIKA - ČERVEN 2006

Řešení písemky

Úloha 1. Uvažujte funkci

$$f(x) = (5 - |x-3|)\,\mathrm{e}^x .$$

($|a|$ značí absolutní hodnotu.)

(1) Najděte množinu $M = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \geq 0\}$.
(2) Najděte bod, v němž f nabývá svého globálního maxima, a bod, v němž nabývá svého globálního minima.
(3) Vypočtěte určitý integrál funkce f přes množinu M.

Řešení.
(1) Protože $\mathrm{e}^x > 0$, stačí pro nalezení množiny M vyřešit nerovnost

$$5 - |x-3| \geq 0.$$

Tedy $M = [-2, 8]$.

(2) Globální maximum funkce f stačí hledat na množině M. Na ní je totiž f kladná, jinde je záporná. Na intervalu $[-2, 3]$ je:

$$f(x) = (5 - |x-3|)\,\mathrm{e}^x = (2+x)\,\mathrm{e}^x,$$
$$f'(x) = (3+x)\,\mathrm{e}^x > 0.$$

Tedy f je na intervalu $[-2, 3]$ rostoucí. Na intervalu $[3, 8]$ máme:

$$f(x) = (5 - |x-3|)\,\mathrm{e}^x = (8-x)\,\mathrm{e}^x,$$
$$f'(x) = (7-x)\,\mathrm{e}^x > 0.$$

Na intervalu $[3, 7]$ je f rostoucí, na intervalu $[7, 8]$ klesající. Proto svého globálního maxima nabývá v bodě 7.

Globálního minima funkce f nenabývá, neboť

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

(3) Integrací per partes dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{8} f(x)dx &= \int_{-2}^{3} (2+x)\,\mathrm{e}^{x}\,dx + \int_{3}^{8} (8-x)\,\mathrm{e}^{x}\,dx \\
&= \int_{-2}^{3} 2\,\mathrm{e}^{x}\,dx + [x\,\mathrm{e}^{x}]_{-2}^{3} - \int_{-2}^{3} \mathrm{e}^{x}\,dx + \int_{3}^{8} 8\,\mathrm{e}^{x}\,dx - [x\,\mathrm{e}^{x}]_{3}^{8} + \int_{3}^{8} \mathrm{e}^{x}\,dx \\
&= 2[\mathrm{e}^{x}]_{-2}^{3} + [x\,\mathrm{e}^{x}]_{-2}^{3} - [\mathrm{e}^{x}]_{-2}^{3} + 8[\mathrm{e}^{x}]_{3}^{8} - [x\,\mathrm{e}^{x}]_{3}^{8} + [\mathrm{e}^{x}]_{3}^{8} \\
&= \mathrm{e}^{3} - \mathrm{e}^{-2} + 3\,\mathrm{e}^{3} + 2\,\mathrm{e}^{-2} + 8\,\mathrm{e}^{8} - 8\,\mathrm{e}^{3} - 8\,\mathrm{e}^{8} + 3\,\mathrm{e}^{3} + \mathrm{e}^{8} - \mathrm{e}^{3} \\
&= \mathrm{e}^{8} - 2\,\mathrm{e}^{3} + \mathrm{e}^{-2}
\end{aligned}
$$

Úloha 2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ polynomů stupně nejvýše 4 s reálnými koeficienty najděte bázi vektorového podprostoru

$$U = \{p \in \mathbb{R}_4[x];\ p(\mathrm{i}) = 0,\ p''(-1) = 0\},$$

kde $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ je imaginární jednotka a $p''(-1)$ je druhá derivace polynomu p v bodě -1.

Řešení. Polynom p z podprostoru U má reálné koeficienty, proto kromě kořene i má také kořen $-\mathrm{i}$. Tedy p je tvaru

$$p(x) = (x^2+1)(ax^2+bx+c) = ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + bx + c.$$

Dále

$$p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2(a+c).$$

Proto

$$p''(-1) = 12a - 6b + 2(a+c) = 14a - 6b + 2c = 0.$$

Zvolme a, b za parametry. Potom $c = 3b - 7a$. Tedy

$$\begin{aligned} U &= \{ax^4 + bx^3 + (3b-6a)x^2 + bx + 3b - 7a;\ a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(x^4 - 6x^2 - 7) + b(x^3 + 3x^2 + 3);\ a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= [x^4 - 6x^2 - 7, x^3 + 3x^2 + x + 3] \end{aligned}$$

Tedy vektory $x^4 - 6x^2 - 7$ a $x^3 + 3x^2 + x + 3$ tvoří bázi prostoru U.

Úloha 3. Čtvercovou tabulku s 5 řádky a 5 sloupci vyplníme přirozenými čísly 1, 2, 3, ...,24, 25 tak, že v každém políčku je jiné číslo. Sousedními políčky budeme nazývat ta políčka, která mají společnou stranu. Vypočtěte (samotný výsledek nestačí):

(1) Kolik je možných vyplnění tabulky, v nichž lichá čísla sousedí pouze se sudými čísly?
(2) Kolik je takových vyplnění tabulky, v nichž čísla 4 a 5 nejsou v sousedních políčkách?
(3) Kolik je takových vyplnění tabulky, v nichž jsou násobky 3 pouze v políčkách nad hlavní diagonálou a násobky 4 pouze v políčkách nad vedlejší diagonálou.

Výsledky zapisujte pomocí kombinačních čísel, faktoriálů, mocnin a početních operací.

Řešení. (1) Představme si tabulku obarvenou jako šachovnici, kde v horním levém rohu je černé pole. Pak je na šachovnici 13 černých a 12 bílých polí. Tedy jedno z lichých čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 24, 25\}$ je vždy na černém poli. Nemá-li tedy sousedit s dalším lichým číslem, musí být všechna lichá čísla na černých polích. Takových vyplnění tabulky, kde lichá čísla jsou na černých polích a sudá na bílých, je

$$13! \cdot 12!$$

(2) Obdélník 1×2 můžeme na políčka tabulky umístit 20 způsoby horizontálně a 20 způsoby vertikálně. Čísla 4 a 5 můžeme do dvou daných políček zapsat dvěma způsoby. Zbývající čísla do 23 políček zapíšeme 23! způsoby. Počet vyplnění tabulky, kde čísla 4 a 5 jsou sousední, je proto $(20 + 20) \cdot 2 \cdot 23!$. Tedy počet vyplnění tabulky, kde čísla 4 a 5 nejsou sousední, musí být

$$25! - 80 \cdot 23!$$

(3) Společné násobky 3 a 4, to jsou čísla 12 a 24, musí ležet nad oběma diagonálami. Tam jsou čtyři políčka. Proto počet jejich umístění je

$$\binom{4}{2} \cdot 2 = 4 \cdot 3.$$

Zbývající 4 násobky 4 musíme umístit do volných 8 políček nad vedlejší diagonálou, zbývajících 6 násobků čísla 3 musíme umístit do volných políček nad hlavní diagonálou. Musíme však rozlišit 3 případy podle počtu dalších násobků 4, které jsou ve dvou volných políčkách nad vedlejší i hlavní diagonálou. Tam mohou být 2, 1 nebo žádné z těchto 4 čísel. Různých rozmístění dalších násobků 4 a 3 je tedy

$$(\binom{6}{2}\binom{6}{6} + 2\binom{6}{3}\binom{7}{6} + \binom{6}{4}\binom{8}{6}) \cdot 4! \cdot 6! = 715 \cdot 4! \cdot 6!$$

Zbývajících 13 čísel můžeme rozmístit na zbývajících políčkách 13! způsoby. Tedy celkový počet vyplnění je

$$2\binom{4}{2} \cdot (\binom{6}{2} + 2\binom{6}{3}\binom{7}{6} + \binom{6}{4}\binom{8}{4}) \cdot 4! \cdot 6! \cdot 13! = 12 \cdot 715 \cdot 4! \cdot 6! \cdot 13!$$