ZÁKLADY MATEMATIKY PRO OBOR INFORMATIKA - ČERVEN 2007

Řešení písemky

Úloha 1. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{1+x^2}\right).$$

(1) Najděte její definiční obor. (1 bod)
(2) Najděte jednostranné limity funkce $f(x)$ v krajních bodech definičního oboru, případně v $\pm\infty$. (1 bod)
(3) Vypočtěte $f'(x)$. (2 body)
(4) Zjistěte, v kterých intervalech je derivace kladná a v kterých záporná. Určete intervaly monotonie funkce f. (2 body)
(5) Bez počítání 2. derivace najděte její lokální a globální extrémy. (2 body)
(6) Načrtněte graf funkce f. (2 body)

Řešení. (1) Definiční obor funkce je $Df = (-\infty, \infty)$.

(2)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \sin\left(\pi \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\right) = \sin\pi = 0.$$

(3) Derivace funkce je

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{1+x^2}\right) \cdot \frac{2\pi x(1+x^2) - \pi x^2(2x)}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{2\pi x^3}{(1+x^2)^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x^2}{1+x^2}\right)$$

(4) Funkce cos je kladná na $[0, \pi/2)$ a záporná na $(\pi/2, \pi]$, proto $f'(x)$ je kladná na intervalech, kde

$$x > 0 \quad \text{a} \quad 0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} < \frac{1}{2}$$

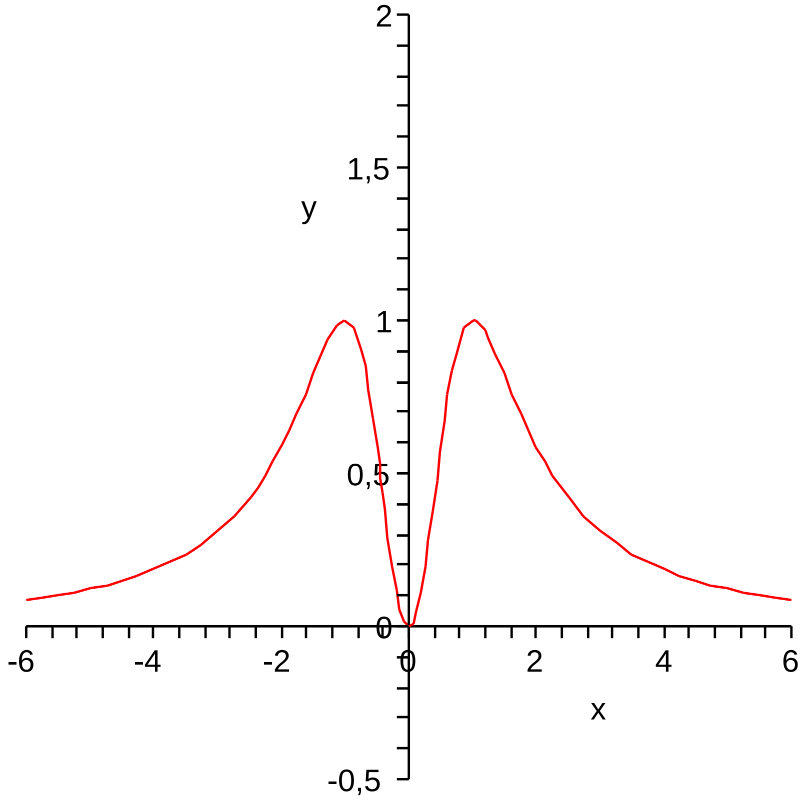
nebo

$$x < 0 \quad \text{a} \quad \frac{x^2}{1+x^2} > \frac{1}{2},$$

tj. na intervalech $(0,1)$ a $(-\infty,-1)$. Analogicky ukážeme, že $f'(x)$ je záporná na intervalech $(-1,0)$ a $(1,-\infty)$. Tedy funkce f je rostoucí v intervalech $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$, klesající v intervalech $(-1,0)$ a $(1,\infty)$.

(5) Globální maximum nabývá funkce v bodech -1 a 1 a jeho hodnota je $f(1) = f(-1) = 1$. Globálního minima nabývá funkce f v bodě 0, $f(0) = 0$. f nemá žádné další lokální extrémy.

(6) Graf funkce f:



Úloha 2. Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je určeno pomocí násobení s maticí A tvaru 3×3 předpisem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A.$$

Najděte matici A, víte-li, že

$$\varphi(2,1,1) = (-1,0,0), \quad \varphi(1,1,1) = (0,4,0), \quad \varphi(1,0,2) = (0,0,2).$$

Bodování: Sestavení soustavy rovnic nebo maticové rovnice nebo jiná správná idea, jak úlohu řešit, 4 body. Výpočet inverzní matice, správné úpravy matice soustavy 3 body. Správný výsledek 3 body.

Řešení. Uvedené vztahy můžeme napsat pomocí maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tu lze řešit řádkovými úpravami matice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \text{na tvar} \quad \left(E \mid A \right),$$

nebo výpočtem pomocí inverzní matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1/2 & 6 & -1 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 3. Sedmiciferné číslo je číslo zapsané pomocí cifer $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ ve tvaru

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7, \quad \text{kde} \quad a_1 \neq 0.$$

(1) Určete počet sedmiciferných čísel, která ve svém zápisu mají cifru 7 právě jednou. (2 body)
(2) Určete počet sedmiciferných čísel, která ve svém zápisu mají nějakou sudou cifru. (2 body)
(3) Určete počet sedmiciferných čísel, která ve svém zápisu mají cifru 7 právě třikrát. (3 body)
(4) Určete počet sedmiciferných čísel, která ve svém zápisu mají každou z cifer 7 a 8 právě dvakrát. (3 body)

Výsledky stačí zapisovat s použitím základních početních operací, které nemusíte vyčíslit.

Řešení. (1) Sedmiciferných čísel, která obsahují cifru 7 pouze na 1. místě, je 9^6, těch, která obsahují cifru 7 na druhém až sedmém místě právě jednou, je $6 \cdot 8 \cdot 9^5$. Výsledek je tedy

$$9^6 + 6 \cdot 8 \cdot 9^5.$$

Lze rovněž spočítat jako počet všech přirozených čísel menších než 10^8 s právě jednou sedmičkou minus počet čísel menších než 10^7 s právě jednou sedmičkou:

$$7 \cdot 9^6 - 6 \cdot 9^5.$$

(Přesvědčete se, že oba výpočty dávají stejný výsledek!)

(2) Počet sedmiciferných čísel, která mají ve svém zápisu nějakou sudou cifru, je roven počtu všech minus počtu těch sestavených pouze z lichých cifer:

$$9 \cdot 10^6 - 5^7.$$

(3) Počet sedmiciferných čísel, která mají ve svém zápisu cifru 7 právě 3krát je roven počtu těch, co ji mají na 1. místě plus počtu těch, co ji na 1. místě nemají:

$$\binom{6}{2} \cdot 9^4 + \binom{6}{3} \cdot 8 \cdot 9^3$$

nebo podobně jako v (1)

$$\binom{7}{3} \cdot 9^4 - \binom{6}{3} \cdot 9^3.$$

(4) Počet sedmiciferných čísel, která mají ve svém zápisu každou z cifer 7 a 8 právě dvakrát je roven počtu těch, co mají cifru 7 na 1. místě,

plus počtu těch, co mají cifru 8 na 1. místě, plus počtu těch, co na 1. místě mají jinou cifru:

$$6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 8^3 + 6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 8^3 + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 7 \cdot 8^2.$$

Alternativním postupem popsaným v (1) lze totéž spočítat takto:

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 8^3 - \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2.$$