MASARYKOVA UNIVERZITA

PŘÍRODOVĚDECKÁ
FAKULTA

Sbírka příkladů do cvičení

M1100

Matematická analýza I

verze 13. listopadu 2024

Mgr. Jakub Juránek, Ph.D.

Obsah

1. Polynomy a základní vlastnosti funkcí

Příklad 1.1. Určete všechny kořeny polynomu a napište jeho rozklad na kořenové činitele v $\mathbb{R}$.

1. $P_1(x) = x^4 - 1$
2. $P_2(x) = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$
3. $P_3(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$
4. $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$
5. $P_5(x) = 12x^3 + 11x^2 - 7x - 6$
6. $P_6(x) = 2x^4 + 5x^3 - 28x^2 - 87x - 36$
7. $P_7(x) = 6x^4 - 13x^3 - 5x^2 - 11x + 8$
8. $P_8(x) = 2x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 81$
9. $P_9(x) = 6x^5 + 29x^4 + 31x^3 - 32x^2 - 102x - 72$

Příklad 1.2. Určete definiční obory funkcí.

1. $f_1(x) = \sqrt{3x - x^3}$
2. $f_2(x) = \ln\left(9 - x^2\right)$
3. $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$
4. $f_4(x) = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2(\pi x)}$
5. $f_5(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x$
6. $f_6(x) = \arcsin \log \dfrac{x}{10}$

Příklad 1.3. Načrtněte grafy funkcí.

1. $f_1(x) = 3 - x$
2. $f_2(x) = -x^2 + 3x + 10$
3. $f_3(x) = \dfrac{2x - 4}{1 - x}$
4. $f_4(x) = \sqrt{1 - x} + 2$
5. $f_5(x) = \log_3(2 - x)$
6. $f_6(x) = -8 + 2^{2-3x}$
7. $f_7(x) = 1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$
8. $f_8(x) = 1 + \operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
9. $f_9(x) = \pi - \dfrac{1}{2}\arccos(3x + 1)$
10. $f_{10}(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(1 - 2x)$

Příklad 1.4. Rozhodněte o paritě daných funkcí (zda jsou sudé či liché). Svá tvrzení zdůvodněte.

1. $f_1(x) = \dfrac{3x - 1}{6x - 2}$
2. $f_2(x) = x - \sin x$
3. $f_3(x) = x^2 - 3\cos|x|$
4. $f_4(x) = \dfrac{2^{|x|}}{x^3}$

Vzorový příklad 1.1. Rozložte polynom

$$P(x) = 4x^7 - 16x^6 - 23x^5 + 115x^4 + 40x^3 - 207x^2 - 27x + 54.$$

Hledáme kořeny $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $p \mid a_0$ a $q \in \mathbb{N}$, $q \mid a_n$.

$p \mid 54 \Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54\}$.

$q \mid 4 \Rightarrow q \in \{1, 2, 4\}$.

$(p-q) \mid P(1)$, zde $(p-q) \mid -60$, červeným zvýrazněním „škrtneme“ ta čísla, která to nesplňují.
$(p+q) \mid P(-1)$, zde $(p+q) \mid -48$, modrým zvýrazněním „škrtneme“ ta čísla, která to nesplňují.
Tučně jsou zvýrazněni kandidáti, kteří nám zbyli, a které vyzkoušíme Hornerovým schématem.

$\frac{p}{q}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\mathbf{\frac{2}{1}}$	$\mathbf{\frac{-2}{1}}$	$\mathbf{\frac{3}{1}}$	$\mathbf{\frac{-3}{1}}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{-6}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\mathbf{\frac{-9}{1}}$	$\frac{18}{1}$	$\frac{-18}{1}$	$\frac{27}{1}$	$\frac{-27}{1}$	$\frac{54}{1}$	$\frac{-54}{1}$
$p-q$			1	−3	2	−4	5	−7	8	−10	17	−19	26	−28	53	−55
$p+q$			3	−1	4	−2	7			−8						

$\frac{p}{q}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{-1}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\mathbf{\frac{-3}{2}}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{-9}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{-27}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{-1}{4}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{-9}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{-27}{4}$
$p-q$	−1	−3	1	−5	7	−11	25	−29	−3	−5	−1	−7	5	−13	23	−31
$p+q$	3	1	5	−1					5	3	7		13			

	4	−16	−23	115	40	−207	−27	54
1	4	−12	−35	80	120	−87	−114	−60
−1	4	−20	−3	118	−78	−129	102	−48
2	4	−8	−39	37	114	21	15	84
−2	4	−24	25	65	−90	−27	27	0
−2	4	−32	89	−113	136	−299	625	
3	4	−12	−11	32	6	−9	0	
3	4	0	−11	−1	3	0		
3	4	12	25	74	225			
−3	4	−12	25	−76	231			
−9	4	−36	313	−2818	25365			
$\frac{1}{2}$	4	2	−10	−6	0			
$\frac{1}{2}$	4	4	−8	−10				
$-\frac{1}{2}$	4	0	−10	−1				
$-\frac{3}{2}$	4	−4	−4	0				

Zbyl nám kvadratický polynom, který snadno dořešíme a případně rozložíme přes diskriminant.

$$4x^2-4x-4, \qquad D=(-4)^2-4(4)(-4)=80, \quad \frac{4\pm\sqrt{80}}{8}=\frac{4\pm4\sqrt{5}}{8}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Tedy

$$4x^2-4x-4=4\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Celkem:

$$\begin{aligned}P(x)&=4(x+2)(x-3)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\\&=(x+2)(x-3)^2(2x-1)\,(2x+3)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\end{aligned}$$

2. Racionální lomená funkce

Příklad 2.1. Rozložte na parciální zlomky.

1. $R_1(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$
2. $R_2(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$
3. $R_3(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x}$
4. $R_4(x) = \dfrac{x^5 + x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2 + x}$
5. $R_5(x) = \dfrac{3x^3 + 3x^2 - 1}{2x^4 + x^3 + 2x^2 + x}$
6. $R_6(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$
7. $R_7(x) = \dfrac{2x^6 - 10x^5 + 13x^4 - 57x^3 + 5x^2 - 75x - 18}{x(x-2)(x+1)(x^2+3)^2}$

3. Vlastnosti a limita posloupnosti

Příklad 3.1. Rozhodně o monotonii a ohraničenosti následujících posloupností. Svá tvrzení dokažte.

1. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \dfrac{n+1}{n}$
2. $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$
3. $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, $c_n = 3^n$
4. $(d_n)_{n=1}^{\infty}$, $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
5. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, $e_n = n^2 - 8n - 9$
6. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n = \dfrac{n}{2n-11}$

Příklad 3.2. Přímo z definice limity posloupnosti dokažte.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n+1}}{3^n} = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+4}{2-3n} = -1$

Příklad 3.3. Vypočtěte

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n^2+1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{16n^3-9n^5}{6n^2+5n^4-n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-7n^2-6n^3+3n}{n-3n^3+8}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{n^7}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} n-\sqrt{n^2+n}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{6n}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{7n+6}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n+3}\right)^{3n-1}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Před dalšími limitami připomeňme Stirlingovu formuli: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ s relaticní chybou cca $\dfrac{1}{12n}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}$

Příklad 3.4. Určete hromadné body následujících posloupností, jejich limitu inferior i limitu superior.

1. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = (-1)^n$
2. $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_n = (-3)^n$
3. $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, $c_n = n\,[1+(-1)^n]$
4. $(d_n)_{n=1}^{\infty}$, $d_n = (-1)^n\left(3-\dfrac{5}{n}\right)$
5. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, $e_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$
6. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n = n^2\cos\dfrac{n\pi}{2}$

4. Limita a spojitost funkce

Příklad 4.1. Vypočtěte

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^n}{1-x^m}$, pro $n,m\in\mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^4+3-2x^6-12x}{7+8x^2+6x+3x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^3}{1+x^3}+3^{\frac{1}{x}}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-4}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{5x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(4x)}{2x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x}-1)(\sin 5x)}{3x^2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3-2x}{2+5x}\right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$
16. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4)^3\cos^2\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$

Příklad 4.2. Najděte body nespojitosti a určete jejich typ.

1. $f_1(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$
2. $f_2(x)=\dfrac{1+x}{1+x^3}$
3. $f_3(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$
4. $f_4(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$
5. $f_5(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x-4\pi}$
6. $\chi(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Příklad 4.3. Jak je třeba dodefinovat funkci $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x-\cos 2x}{\sqrt{2\sin x}-1}$ v bodě $x=\dfrac{\pi}{6}$, aby v něm byla spojitá?

5. Derivace funkce a Taylorův polynom

Příklad 5.1. Z definice odvoďte derivace funkcí v libovolném bodě x_0.

1. $f\colon y = x^n, n \in \mathbb{N}$
2. $g\colon y = \sqrt{x}$
3. $h\colon y = \mathrm{e}^x$
4. $i\colon y = \sin(x)$

Příklad 5.2. Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2 \cdot \sin(x-2)$.

Příklad 5.3. Spočtete derivace následujících funkcí a upravte je do co nejjednoduššího tvaru.

1. $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
2. $f_2(x) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$
3. $f_3(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$
4. $f_4(x) = \arccos \dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$
5. $f_5(x) = \ln \ln \ln x$
6. $f_6(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
7. $f_7(x) = x\sqrt{1+x^2}$
8. $f_8(x) = x \cdot (\sin \ln x - \cos \ln x)$
9. $f_9(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$
10. $f_{10}(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x}$
11. $f_{11}(x) = \dfrac{(\ln 3)\sin x + \cos x}{3^x}$
12. $f_{12}(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$
13. $f_{13}(x) = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
14. $f_{14}(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

Příklad 5.4. Zderivujte a dále neupravujte.

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln \sin \operatorname{arctg}(x^4) \cdot \arcsin \frac{3^{x \log_\pi (3x)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}}}$$

Příklad 5.5. Určete 759. derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

Příklad 5.6. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bodě $T[0;?]$.

Příklad 5.7. Určete všechny body, ve kterých je tečna ke grafu funkce $f\colon y = 2 + x - x^2$ rovnoběžná

1. s osou x;
2. s osou prvního kvadrantu.

Příklad 5.8. Je dána funkce $f\colon y = x\ln x$ a přímka $p\colon 2x - 2y + 3 = 0$. Určete rovnici normály ke grafu funkce f rovnoběžné s přímkou p.

Příklad 5.9. Určete diferenciály daných funkcí v libovolném bodě x_0.

1. $f_1(x) = xe^x$
2. $f_2(x) = 2^{-\frac{\ln x}{x}}$

Příklad 5.10. Určete přibližnou hodnotu $\operatorname{arctg} 1{,}1$ pomocí diferenciálu a porovnejte ji s přesnější hodnotou na kalkulačce.

Příklad 5.11. Rozviňte polynom $P(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ do Taylorova polynomu se středem 2.

Příklad 5.12. Pomocí vhodného Taylorova polynomu třetího stupně přibližně určete $\sqrt{0{,}98}$.

Příklad 5.13. Určete Taylorův polynom 3. řádu se středem v $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$. Poté pomocí něj odhadněte hodnotu $f(1{,}1)$ a určete, s jakou přesností je odhad proveden.
(Polynom vypočítejte pomocí derivací, není nutné ho roznásobovat. Výslednou hodnotu i chybu napište jako jednoduché zlomky.)

Příklad 5.14. Pomocí co nejjednoduššího Maclaurinova polynomu (tj. Taylorova polynomu se středem v nule co nejnižšího řádu) funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

odhadněte hodnotu Eulerova čísla e s chybou menší než $\frac{1}{100}$. Výsledek zapište jako jeden jednoduchý zlomek.

6. L'Hospitalovo pravidlo a lokální extrémy

Příklad 6.1. Vypočtěte

1. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-x}{1+3x-2x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x}{8-x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-x}{x^n-1}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$
7. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x-x)$
10. $\lim\limits_{x\to1^-} \ln x \ln(1-x)$
11. $\lim\limits_{x\to0^+} x^a \ln x$, kde $a>0$
12. $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$
13. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$
14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
15. $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$
16. $\lim\limits_{x\to0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$
17. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
18. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
19. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Příklad 6.2. Najděte lokální extrémy daných funkcí.

1. $f_1(x) = x + \dfrac{1}{x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$
4. $f_4(x) = \mathrm{e}^x \sin x$

7. Globální extrémy – slovní úlohy

Příklad 7.1. Ze všech obdélníků, které mají obsah S, určete ten s nejmenším obvodem.

Příklad 7.2. Pro jaký poloměr podstavy r a výšku v bude mít válec s daným objemem V nejmenší povrch.

Příklad 7.3. Do koule o poloměru r vepište válec s co možná největším objemem. Určete poloměr ρ tohoto válce.

Příklad 7.4. Kužel má vrchol ve středu kulové plochy s poloměrem r a podstavná kružnice leží na povrchu koule. Určete, jaký největší objem může tento kužel mít.

Příklad 7.5. Drát délky a máme rozdělit na dvě části. Z první části chceme vyrobit čtverec, ze druhé kruh. Jak velkou část máme použít na čtvrec, aby součet ploch obou útvarů co možná nejmenší. Určete tento součet obsahů. Jak se změní situace, budeme-li chtít součet ploch co možná největší.

Příklad 7.6. Z ostrova vzdáleného 5 km od rovného břehu jezera se chceme dostat v nejkratší době do města na břehu jezera. Ve kterém místě na břehu máme lodí přistát, je-li rychlost lodě 4 km/h a rychlost chodce 6 km/h.

Příklad 7.7. Určete vzdálenost bodu $A = [1,1]$ od paraboly $p\colon\ y^2 = 2x$.

Příklad 7.8. Určete rozměry pravoúhelníku, který je vepsán do elipsy o rovnici $9x^2 + 4y^2 = 72$ tak, aby měl maximální možný obsah. Vypočtěte i tento obsah.

Příklad 7.9. Z obdélníkového plechu o velikosti $80\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$ se má po odstřižení stejně velkých čtverců v rozích plechu vyrobit krabice bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstřihnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem, a jak velký bude tento objem?

Příklad 7.10. Hodláme koupit obdélníkovou parcelu o rozloze $200\,\mathrm{m}^2$, jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Dokažte, že obdélník lze zvolit tak, aby plot měl minimální délku, a najděte délky příslušných stran.

Příklad 7.11. Obdélníková parcela o rozměrech $5a \times b$ se má oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 (shodných) parcel o rozměrech $a \times b$. Dokažte, že při dané celkové délce plotů c lze a a b zvolit tak, že rozloha $P = 5ab$ parcely je maximální. Určete takové rozměry a, b a P.

Příklad 7.12. Dokažte, že do trojúhelníka, jehož nejdelší stranou je strana c, lze vepsat obdélník se základnou obsaženou v c a s maximálním obsahem. Najděte vztah mezi obsahem trojúhelníka a vepsaného obdélníka.

Příklad 7.13. V divadle se bude hrát premiéra nové činohry. Sál má kapacitu 620 míst, přičemž bude zaplněn, pokud bude vstupenka stát 200 Kč. Každé zdražení vstupenky o 1 Kč přinese snížení počtu prodaných vstupenek o 2. Jakou má divadlo nastavit cenu, aby maximalizovalo svůj zisk? Tento zisk určete.

8. Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce f můžeme postupovat podle následujícího schématu:

- f: definiční obor $D(f)$, parita, periodicita, průsečíky s osami a znaménka funkce;
- f': intervaly monotonie, lokální extrémy;
- f'': zakřivení, inflexní body;
- asymptoty – bez směrnice, se směrnicí;
- (limity do $\pm\infty$), graf, globalita extrémů, obor hodnot $H(f)$.

Příklad 8.1. Vyšetřete průběh funkce.

1. $f(x) = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x+1}$
4. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x}$
5. $f(x) = x^x, D(f) = \mathbb{R}^+$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

9. Neurčitý integrál 1

Příklad 9.1. Zintegrujte – parciální zlomky

1. $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x^4+2+x^{-4}}{x^3} \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x-2} \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{2}{(3x+4)^3} \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2} \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2} \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1-x} \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} \mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} \mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1} \mathrm{d}x$

Před dalšími integrály připomeňme rekuretntní vzorec

$$J_n(x,a) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)J_{n-1}\right]$$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{5x+3}{(x^2+3)^2} \mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{[(3x-5)^2+4]^3}$

Příklad 9.2. Zintegrujte – substituce

1. $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)\, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int x e^{-x^2} \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x} \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x} \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int a^x\sqrt{1+a^x}\,\mathrm{d}x, \quad a>0$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x^2} \mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{16-x^4} \mathrm{d}x$

10. Neurčitý integrál 2

Příklad 10.1. Zintegrujte – per-partes

1. $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$
4. $\int \mathrm{e}^{3x}\cos 4x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \ln x\,\mathrm{d}x$
7. $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$
8. $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$
9. $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
10. $\int \dfrac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

Příklad 10.2. Zintegrujte – $R(\sin x, \cos x)$

1. $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$
3. $\int \dfrac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \dfrac{\sin x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \dfrac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,\mathrm{d}x$

Příklad 10.3. Zintegrujte – substituce, odmocniny

1. $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$
4. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \dfrac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}},\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{\frac{x}{2-x}}+3}{x^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}\,\mathrm{d}x$

11. Určitý a nevlastní integrál

Příklad 11.1. Vyčíslete

1. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_{0}^{\ln 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_{0}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$
8. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,\mathrm{d}x$
9. $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$
10. $\int_{a}^{b} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x, \quad a<0, b>0$

Příklad 11.2. Vyčíslete

1. $\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a>0$
2. $\int_{1}^{2} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_{1}^{3} \sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

Příklad 11.3. Vhodnou úvahou zintegrujte

1. $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+4\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{-12}^{12} \frac{6x^5-2x+17x^3}{1-x^4+x^8}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_{-1}^{1} \frac{\sin^3 x - x^2\sin x\cos x + x\cos^5 x\sin^4 x}{\cos^3 x + x^2\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + x^6}\,\mathrm{d}x$, víte-li, že jmenovatel nemá reálný kořen

Příklad 11.4. Vyčíslete

1. $\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a>0$
2. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_{0}^{a} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a>0$
4. $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_{0}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
8. $\int_{2}^{\infty} \frac{2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$
9. $\int_{0}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$
10. $\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
11. $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathrm{d}x$
12. $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

12. Aplikace integrálního počtu

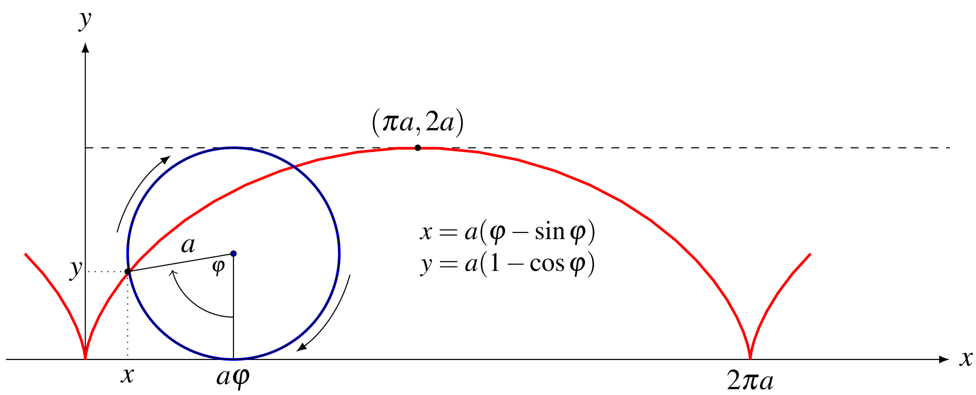
Příklad 12.1. Vypočtěte obsah rovinných ploch vymezených danými křivkami.

1. $y = 2x - x^2$ a $x + y = 0$
2. $y = x$ a $y = x + \sin^2 x$
3. $y = |\log x|$, $y = 0$, $x = 0{,}1$ a $x = 10$
4. $y = 2^x$, $y = 2$, a $x = 0$

Příklad 12.2. Spočtěte délku křivky

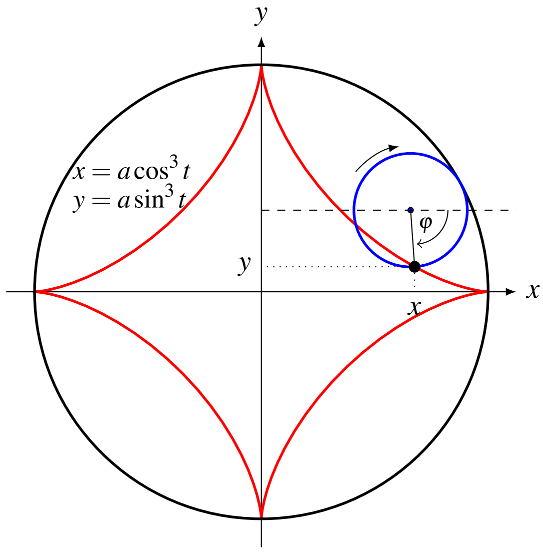
1. $y = x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$
2. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \le y \le \mathrm{e}$

Příklad 12.3. Vypočtěte obsah rovinné plochy vymezené jedním „kopečkem" cykloidy (a osou x). Cykloida je křivka, kterou opíše bod na kružnici, která se kotálí po ose x. Označíme-li poloměr kružnice a, a je-li náš sledovaný bod někdy (pro $t = 0$) v počátku, má cykloida parametrické vyjádření $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Dále určete délku této části cykloidy.



Příklad 12.4. Vypočtěte obsah a obvod kruhu o poloměru r (zkuste parametricky i neparametricky zadaný).

Příklad 12.5. Vypočtěte obvod a obsah asteroidy, tj. křivky, kterou opíše bod na kružnici, která se kotálí po vnitřní straně nehybné kružnice čtyřnásobného poloměru. Označíme-li poloměr větší kružnice a, má asteroida parametrické vyjádření $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. Využijte jednak parametrického vyjádření, jednak ekvivalentní rovnice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.



Příklad 12.6. Vypočtěte objemy těles ohraničených plochami, které vzniknou rotací následujících křivek

1. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, $0 \le x \le a$, kolem osy x
2. $y = 2x - x^2$ a $y = 0$
   (a) kolem osy x
   (b) kolem osy y
3. $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y = 0$, $0 \le x < \infty$
   (a) kolem osy x
   (b) kolem osy y

Příklad 12.7. Vypočtěte objem a povrch pláště

1. rotačního kužele výšky v a poloměrem podstavy r
2. koule o poloměru r
3. anuloidu, který vznikne rotací kruhu o poloměru r kolem přímky vzálené R od jeho středu, $0 < r < R$

Výsledky

1 Polynomy a základní vlastnosti funkcí

Výsledky 1.1.

1. $P_1(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
2. $P_2(x) = (2x+5)^3$
3. $P_3(x) = (x-2)(x^2+4x+5)$
4. $P_4(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x-4)$
5. $P_5(x) = (x+1)(3x+2)(4x-3)$
6. $P_6(x) = (x-4)(x+3)^2(2x+1)$
7. $P_7(x) = (2x-1)(3x-8)(x^2+x+1)$
8. $P_8(x) = (x+3)^2(2x-3)(x^2+3)$
9. $P_9(x) = (x+3)(2x-3)(3x+4)(x^2+2x+2)$

Výsledky 1.2.

1. $D(f_1) = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle 0, \sqrt{3}\right\rangle$
2. $D(f_2) = (-3, 3)$
3. $D(f_3) = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$
4. $D(f_4) = \mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{Z}^-$
5. $D(f_5) = \langle 4, \infty)$
6. $D(f_6) = \langle 1, 100)$

Výsledky 1.3. Pro ověření použijte GeoGebru, WolframAlpha či jiný program dle vlastního uvážení.

Výsledky 1.4.

1. ani jedno, $D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$
2. lichá, $D(f_2) = \mathbb{R}$ a $f(-x) = -x - \sin(-x) = -x + \sin x = -(x - \sin x) = -f(x)$
3. sudá, $D(f_3) = \mathbb{R}$ a $f(-x) = (-x)^2 - 3\cos|-x| = x^2 - 3\cos|x| = f(x)$
4. lichá, $D(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $f(-x) = \dfrac{2^{|-x|}}{(-x)^3} = \dfrac{2^{|x|}}{-x^3} = -\dfrac{2^{|x|}}{x^3} = -f(x)$

2 Racionální lomená funkce

Výsledky 2.1.

1. $R_1(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$
2. $R_2(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+3}$
3. $R_3(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+x+1}$
4. $R_4(x) = x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$
5. $R_5(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x+1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$
6. $R_6(x) = \frac{x+2}{x^2+1} + \frac{2x-1}{(x^2+1)^2}$
7. $R_7(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x^2+3} + \frac{2x}{(x^2+3)^2}$

3 Vlastnosti a limita posloupnosti

Výsledky 3.1.

1. klesající, shora ohraničená např. 2, zdola 1
2. rostoucí, shora ohraničená např. 2, zdola 1
3. rostoucí, zdola ohraničená např. 3, shora neohraničená
4. není monotónní, shora ohraničená např. 1, zdola -1
5. není monotónní, zdola ohraničená např. -25, shora neohraničená
6. není monotónní, shora ohraničená např. 6, zdola -5

Výsledky 3.2.

1. $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$
2. $n > \dfrac{\ln \frac{K}{2}}{\ln \frac{4}{3}}$
3. $n > \dfrac{2}{\varepsilon} + \dfrac{3}{2}$

Výsledky 3.3.

1. 0
2. $-\infty$
3. 2
4. 0
5. 0
6. ∞
7. $\dfrac{1}{3}$
8. 0
9. $-\dfrac{1}{2}$
10. e
11. e^2
12. $\mathrm{e}^{\frac{7}{2}}$
13. e^{-6}
14. 1
15. ∞
16. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$
17. 5

Výsledky 3.4.

1. hromadné body: $-1, 1$; $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$
2. hromadné body: $-\infty, \infty$; $\liminf b_n = -\infty$, $\limsup b_n = \infty$
3. hromadné body: $0, \infty$; $\liminf c_n = 0$, $\limsup c_n = \infty$
4. hromadné body: $-3, 3$; $\liminf d_n = -3$, $\limsup d_n = 3$
5. hromadné body: $-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1$; $\liminf e_n = -1$, $\limsup e_n = 1$
6. hromadné body: $-\infty, 0, \infty$; $\liminf f_n = -\infty$, $\limsup f_n = \infty$

4 Limita a spojitost funkce

Výsledky 4.1.

1. 0
2. $\frac{n}{m}$
3. 0
4. ∞
5. 4
6. 2
7. $-\frac{1}{16}$
8. 4
9. 3
10. $\frac{2}{5}$
11. 2
12. $\frac{10}{3}$
13. 1
14. 3
15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
16. 0

Výsledky 4.2.

1. v $x = -1$ nekonečná nespojitost
2. v $x = -1$ odstranitelná nespojitost
3. v $x = 1$ a $x = -2$ nekonečná nespojitost
4. v $x = 0$ a $x = 1$ odstranitelná nespojitost, v $x = -1$ nekonečná nespojitost
5. v $x = 4\pi$ odstranitelná nespojitost, $\lim\limits_{x \to 4\pi} f_5(x) = \frac{1}{2}$
6. ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ nespojitost 2. druhu

Výsledky 4.3. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$

5 Derivace funkce a Taylorův polynom

Výsledky 5.1. Dosazením do definiční limity $f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Výsledky 5.2. $f'(x) = 2x \cdot \sin(x-2) + x^2 \cdot \cos(x-2)$, $f'(2) = 4$

Výsledky 5.3.

1. $f_1'(x) = -2xe^{-x^2}$
2. $f_2'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$
3. $f_3'(x) = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
4. $f_4'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$
5. $f_5'(x) = \dfrac{1}{\ln \ln x \cdot \ln x \cdot x}$
6. $f_6'(x) = \dfrac{4\sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}$
7. $f_7'(x) = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$
8. $f_8'(x) = 2 \sin \ln x$
9. $f_9'(x) = \dfrac{4x^2 - x + 1}{(1-x)^3(1+x)^4}$
10. $f_{10}'(x) = \dfrac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$
11. $f_{11}'(x) = -\dfrac{(1+\ln^2 3)\sin x}{3^x}$
12. $f_{12}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
13. $f_{13}'(x) = \dfrac{-2 \operatorname{sgn} x}{1+x^2}$
14. $f_{14}'(x) = -\dfrac{1}{\cos x}$

Výsledky 5.4.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left[\ln \sin \operatorname{arctg}(x^4) \cdot \arcsin \frac{3^{x \log_\pi(3x)}}{\sqrt{e^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}}\right]^{-\frac{2}{3}} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \frac{\cos \operatorname{arctg}(x^4)}{\sin \operatorname{arctg}(x^4)} \cdot \frac{4x^3}{1+x^8} \cdot \arcsin \frac{3^{x \log_\pi(3x)}}{\sqrt{e^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}} + \ln \sin \operatorname{arctg}(x^4) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3^{2x\log_\pi(3x)}}{e^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}}} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{3^{x \log_\pi(3x)} \cdot \ln 3 \cdot \left[\log_\pi(3x) + \frac{3x}{3x \ln \pi}\right] \cdot \sqrt{e^{2x} + \operatorname{tg}(-x)} - 3^{x \log_\pi(3x)} \cdot \frac{2e^{2x} - \frac{1}{\cos^2(-x)}}{2\sqrt{e^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}}}{e^{2x} + \operatorname{tg}(-x)} \right\}$$

Výsledky 5.5. $f^{(759)}(x) = \dfrac{d^{759}}{dx^{759}}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right) = 759!\left(\dfrac{1}{(x+2)^{760}} - \dfrac{1}{(x+1)^{760}}\right)$

Výsledky 5.6. $t\colon x + y - 1 = 0$, $n\colon x - y + 1 = 0$

Výsledky 5.7.

1. $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right]$
2. $[0, 2]$

Výsledky 5.8. $n\colon x - y - 3e^{-2} = 0$

Výsledky 5.9.

1. $\mathrm{d}f_1(x_0) = (x_0+1)e^{x_0}\,\mathrm{d}x$
2. $\mathrm{d}f_2(x_0) = 2^{-\frac{\ln x_0}{x_0}} \cdot \ln 2 \cdot \dfrac{\ln x_0 - 1}{x_0^2}\,\mathrm{d}x$

Výsledky 5.10. $\operatorname{arctg}(1{,}1) \doteq \dfrac{\pi}{4} + 0{,}05 \doteq 0{,}835 \doteq 47°50' \times 47°45'$

Výsledky 5.11. $P(x) = -5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$

Výsledky 5.12. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1$, $\sqrt{0{,}98} \doteq \dfrac{494\,911}{500\,000}$

Výsledky 5.13. $f(1{,}1) \doteq T_3(1{,}1) = \dfrac{629}{6000}$, $|R_3(1{,}1)| < \dfrac{1}{120\,000}$

Řešení. Nejprve spočteme derivace:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\ln x & f(1) &= 0\\
f'(x) &= 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 & f'(1) &= 1\\
f''(x) &= \frac{1}{x} & f''(1) &= 1\\
f'''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f'''(1) &= -1\\
f^{(4)} &= \frac{2}{x^3}
\end{aligned}$$

Taylorův polynom je roven

$$T_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(1)}{i!}(x-1)^i = 0 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

Požadovaný odhad tak je

$$f(1{,}1) \doteq T_3(1{,}1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{600+30-1}{6000} = \frac{629}{6000}.$$

Lagrangeův zbytek má tvar

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4 = \frac{\frac{2}{c^3}}{4!}(x-1)^4 = \frac{(x-1)^4}{12c^3}, \quad \text{kde } c \text{ je mezi 1 a } x.$$

Chyba našeho odhadu je proto $|R_3(1{,}1)| = \left|\dfrac{0{,}1^4}{12c^3}\right| = \dfrac{0{,}1^4}{12c^3}$, kde $c \in (1; 1{,}1)$ (a absolutní hodnota vzhledem ke kladnosti výrazů nehraje roli).
Zmenšíme-li jmenovatel, celý zlomek se zvětší, proto můžeme zmenšením c^3 na 1 odhadnout chybu jako

$$|R_3(1{,}1)| = \frac{0{,}1^4}{12c^3} < \frac{\frac{1}{10000}}{12} = \frac{1}{120\,000}.$$

Poznámka. Můžeme si též všimnout, že nám derivace dále budou neustále měnit znaménko, zatímco v absolutní hodnotě se budou členy rozvoje zmenšovat. Podobně jako na cvičení jde zde o tzv. „alternující polynom“ (začátek alternující řady, viz později), můžeme tak chybu odhadnout posledním členem rozvoje. Můžeme tedy říci, že chyba $|R_3(1{,}1)| < \dfrac{1}{6000}$. Ve srovnání s postupem přes Lagrangeův zbytek vidíme, že jde o mnohem hrubší, ale platný odhad. ■

Výsledky 5.14. $\mathrm{e} \doteq M_5(1) = \dfrac{163}{60}$

Řešení. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ a $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
Maclaurinův polynom stupně n má proto vyjádření

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

s Lagrangeovým zbytkem tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{kde } c \text{ je mezi } 0 \text{ a } x.$$

Pro odhad e platí

$$\mathrm{e} = f(1) \doteq M_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

s chybou

$$|R_n(1)| = \left| \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} \right|, \quad \text{kde } c \in (0,1).$$

Požadujeme, aby $|R_n(1)| < \dfrac{1}{100}$. Protože exponenciální funkce je kladná, stejně jako faktoriál, absolutní hodnota nehraje roli a řešíme nerovnici:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} &< \frac{1}{100} \\ 100\mathrm{e}^c &< (n+1)! \end{aligned}$$

Nyní můžeme buď levou stranu zvětšit, či pravou zmenšit, neb bude-li pak platit nově získaná nerovnost, bude i původní. Zde je $c \in (0,1)$, tedy $\mathrm{e}^c < 3$ a $100\mathrm{e}^c < 300$. Z platnosti nerovnosti $300 < (n+1)!$ pak plyne platnost i nerovnosti původní $100\mathrm{e}^c < (n+1)!$.
Ale zatímco $5! = 120$ nestačí, $6! = 720$ už ano. Proto musí být $n \geq 5$. My chceme polynom co nejmenšího stupně, proto vezmeme $n = 5$.
Hledaný odhad e je tak

$$\mathrm{e} \doteq M_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60}.$$

■

6 L'Hospitalovo pravidlo a lokální extrémy

Výsledky 6.1.

1. $-\dfrac{2}{3}$
2. 0
3. $\dfrac{n-1}{n}$
4. 0
5. $\dfrac{1}{2}$
6. $\dfrac{1}{3}$
7. $\dfrac{1}{2}$
8. $\dfrac{1}{2}$
9. ∞
10. 0
11. 0
12. 1
13. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$
14. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$
15. 1
16. 1
17. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$
18. $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$
19. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$

Výsledky 6.2.

1. lokální maximum v $[-1,-2]$, lokální minimum v $[1,2]$
2. lokální minimum v $[-1,-1]$, lokální maximum v $[1,1]$
3. lokální minimum v $[1,0]$, lokální maximum v $\left[\mathrm{e}^2, 4\mathrm{e}^{-2}\right]$
4. lokální minima v $\left[-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$,

   lokální maxima v $\left[\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

7 Globální extrémy – slovní úlohy

Výsledky 7.1. Čtverec o straně $\sqrt{S}$.

Výsledky 7.2. $2r = v$, tj. výška rovna průměru podstavy

Výsledky 7.3. $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} r$

Výsledky 7.4. $V_{max} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} r^3$

Výsledky 7.5. Pro nejmenší se na čtverec použije $\frac{4a}{\pi+4}$ délky drátu, $S_{min} = \frac{a^2}{4(\pi+4)}$.
Pro největší se čtverec vůbec nevyrobí, $S_{max} = \frac{a^2}{4\pi}$.

Výsledky 7.6. Je-li vzdálenost města od kolmého průmětu ostrova na břeh větší než $2\sqrt{5}$ km, přistaneme právě $2\sqrt{5}$ km od tohoto kolmého průmětu směrem k městu. Je-li menší, přistaneme přímo ve městě.

Výsledky 7.7. $v(A,p) = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}$

Výsledky 7.8. Jde o obdélník s jedním vrcholem $[2,3]$ a stranami rovnoběžnými se souřadnými osami. Jeho rozměry jsou 4 j a 6 j, obsah 24 j^2.

Výsledky 7.9. Čtverce o straně 10 cm, objem krabice 18 l (18 000 cm^3).

Výsledky 7.10. 20 m strana přiléhající ke zdi, 10 m strana k ní kolmá.

Výsledky 7.11. $a = \frac{c}{20}$, $b = \frac{c}{12}$, $P = \frac{c^2}{48}$

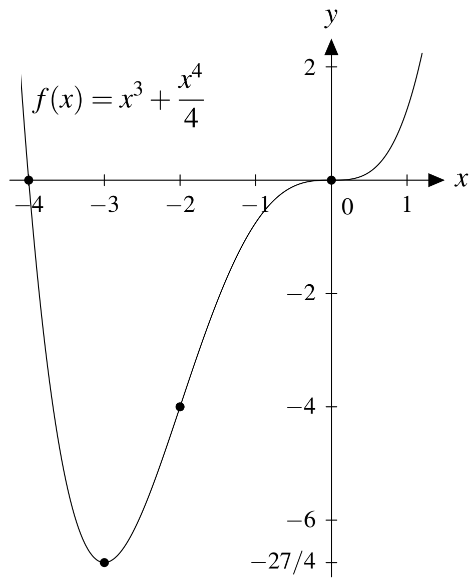
Výsledky 7.12. Mj. s využitím stejnolehlosti dostaneme, že hledaný obdélník má mít stranu obsaženou v c délky $\frac{c}{2}$, druhou stranu délky poloviny výšky na stranu c, a jeho obsah je roven polovině obsahu trojúhelníka.

Výsledky 7.13. Nejlépe vychází zdražit o 55 Kč. Při ceně 255 Kč divadlo vydělá 130 050 Kč.

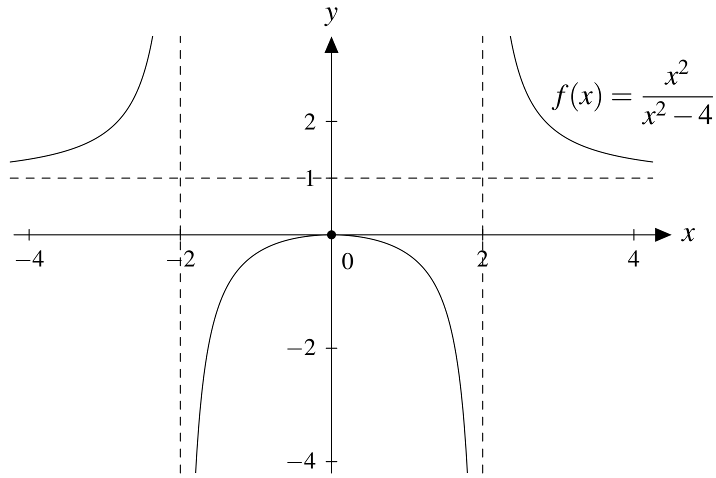
8 Průběh funkce

Výsledky 8.1.

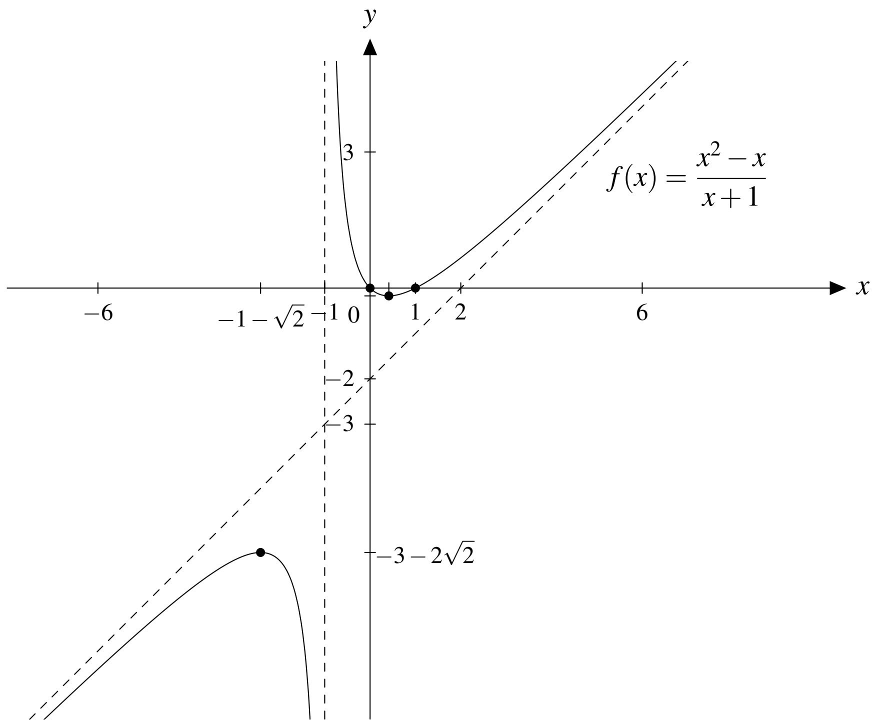
1. $f(x) = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$
   - $D(f) = \mathbb{R}$, ani sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1} = [-4,0]$, $P_{x2} = [0,0] = P_y$, kladná na $(-\infty,-4) \cup (0,\infty)$, záporná na $(-4,0)$;
   - $f'(x) = 3x^2 + x^3$, klesající na $(-\infty,-3]$, rostoucí na $[-3,\infty)$, lokální minimum $\left[-3,-\dfrac{27}{4}\right]$;
   - $f''(x) = 6x + 3x^2$, konvexní na $(-\infty,-2)$ a $(0,\infty)$, konkávní na $(-2,0)$, inflexní body $[-2,-4]$ a $[0,0]$;
   - ABS: nemá, ASS: nemá;
   - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, globální minimum $\left[-3,-\dfrac{27}{4}\right]$, globální maximum nemá, $H(f) = \left[-\dfrac{27}{4},\infty\right)$.



2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$
   - $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, sudá, není periodická, $P_x = [0,0] = P_y$, kladná na $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$, záporná na $(-2,0) \cup (0,2)$;
   - $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$, rostoucí na $(-\infty,-2)$ a $(-2,0)$, klesající na $(0,2)$ a $(2,\infty)$, lokální minimum $[0,0]$;
   - $f''(x) = \dfrac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$, konvexní na $(-\infty,-2)$ a $(2,\infty)$, konkávní na $(-2,2)$, inflexní body nemá;
   - ABS: $x = -2$ a $x = 2$, ASS: $y = 1$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$;
   - globální extrémy nemá, $H(f) = (-\infty,0] \cup (1,\infty)$.

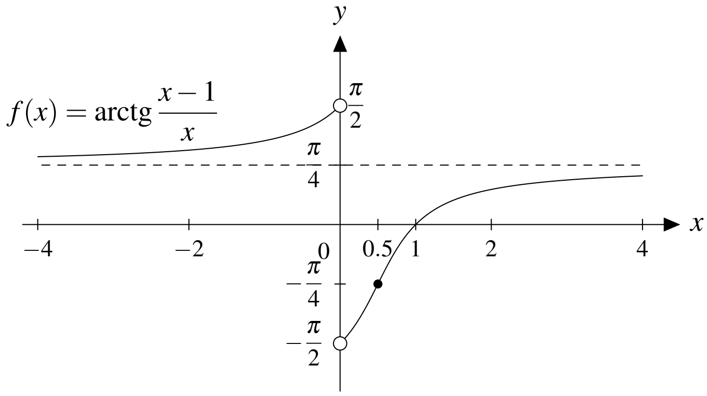


3. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$
   - $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ani sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1} = [0,0] = P_y$, $P_{x2} = [1,0]$, záporná na $(-\infty,-1) \cup (0,1)$, kladná na $(-1,0) \cup (1,\infty)$;
   - $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$, rostoucí na $(-\infty,-1-\sqrt{2})$ a $(-1+\sqrt{2},\infty)$, klesající na $(-1-\sqrt{2},-1)$ a $(-1,-1+\sqrt{2})$, lokální maximum $[-1-\sqrt{2},-3-2\sqrt{2}]$, lokální minimum $[-1+\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$;
   - $f''(x) = \dfrac{4}{(x+1)^3}$, konvexní na $(-1,\infty)$, konkávní na $(-\infty,-1)$, inflexní body nemá;
   - ABS: $x=-1$, ASS: $y = x-2$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$;
   - globální maximum $[-1-\sqrt{2},-3-2\sqrt{2}]$, globální minimum $[-1+\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$, $H(f) = (-\infty,-3-2\sqrt{2}] \cup [-3+2\sqrt{2},\infty)$.



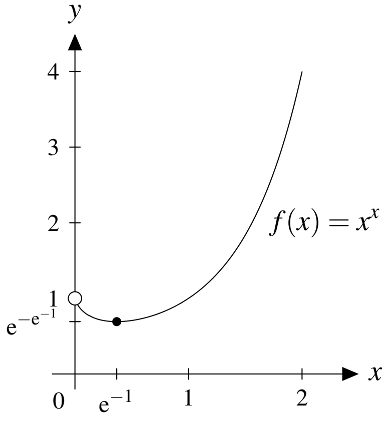
4. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x}$

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ani sudá ani lichá, není periodická, $P_x = [1,0]$, P_y nemá, kladná na $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$ záporná na $(0,1)$;
- $f'(x) = \dfrac{1}{2x^2-2x+1}$, rostoucí na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$, lokální extrémy nemá;
- $f''(x) = \dfrac{-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$, konvexní na $(-\infty,0)$ a $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, konkávní na $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$, inflexní bod $\left[\dfrac{1}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right]$;
- ABS: nemá, ASS: $y = \dfrac{\pi}{4}$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$;
- globální extrémy nemá, $H(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$.



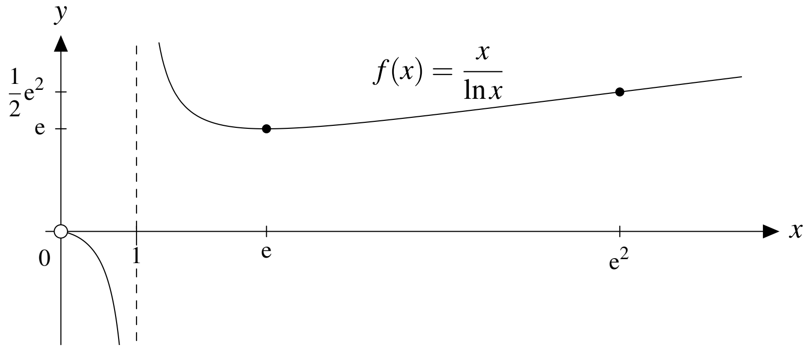
5. $f(x) = x^x$, $D(f) = \mathbb{R}^+$

- $D(f) = (0,\infty)$, ani sudá ani lichá, není periodická, P_x ani P_y nemá, kladná na $(0,\infty)$;
- $f'(x) = x^x(1+\ln x)$, rostoucí na $\left(\mathrm{e}^{-1},\infty\right)$, klesající na $\left(0,\mathrm{e}^{-1}\right)$, lokální minimum $\left[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right]$
- $f''(x) = x^x\left(\dfrac{1}{x}+(1+\ln x)^2\right)$, konvexní na $(0,\infty)$, inflexní body nemá;
- ABS: nemá, ASS: nemá;
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, globální minimum $\left[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right]$, globální maximum nemá, $H(f) = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}},\infty\right)$.



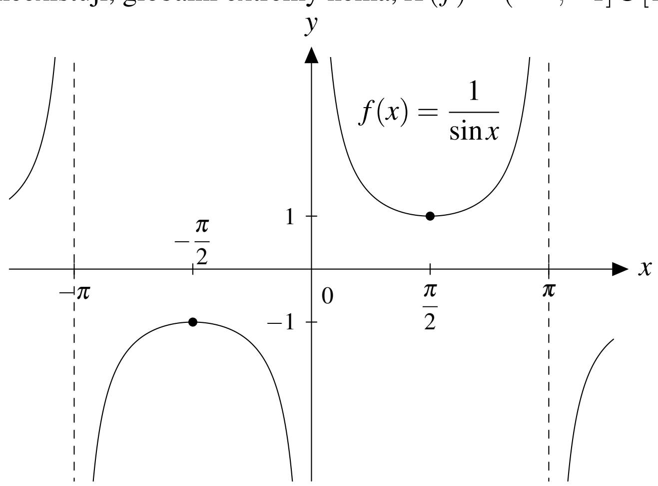
6. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

- $D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$,
- $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, rostoucí na (e, ∞), klesající na $(0,1)$ a $(1,\mathrm{e})$, lokální minimum $[\mathrm{e},\mathrm{e}]$;
- $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{x \ln^3 x}$, konvexní na $(1,\mathrm{e}^2)$, konkávní na $(0,1)$ a (e^2,∞), inflexní bod $\left[\mathrm{e}^2, \frac{1}{2}\mathrm{e}^2\right]$;
- ABS: $x = 1$, ASS: nemá;
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, globální extrémy nemá, $H(f) = (-\infty, 0) \cup (\mathrm{e}, \infty)$.



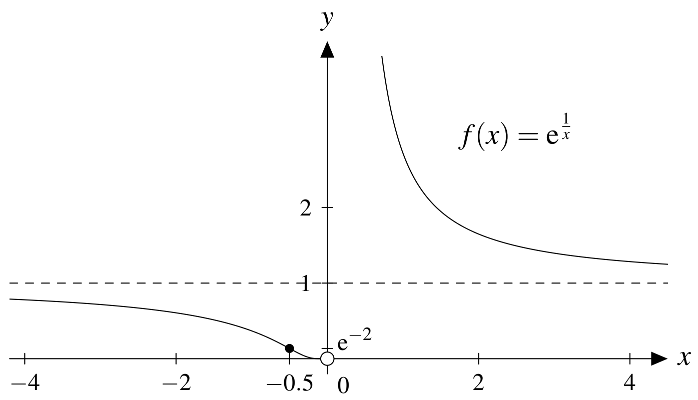
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, lichá, periodická se základní periodou 2π, P_x ani P_y nemá, kladná na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (k2\pi, \pi + k2\pi)$, záporná na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (-\pi + k2\pi, k2\pi)$;
- $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, rostoucí na $\left(-\pi + k2\pi, -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ a $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, klesající na $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi\right)$ a $\left(k2\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, lokální maxima $\left[-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, -1\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, lokální minima $\left[\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, 1\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $f''(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$, konvexní na $(k2\pi, \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, konkávní na $(-\pi + k2\pi, k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, inflexní body nemá;
- ABS: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ASS: nemá;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ neexistují, globální extrémy nemá, $H(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.



8. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ani sudá ani lichá, není periodická, P_x, P_y nemá, kladná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, klesající na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, lokální extrémy nemá;
- $f''(x) = \dfrac{2x+1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, konvexní na $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ a $(0,\infty)$, konkávní na $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$, inflexní bod $\left[-\dfrac{1}{2}, \mathrm{e}^{-2}\right]$;
- ABS: $x = 0$ zprava, ASS: $y = 1$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$;
- globální extrémy nemá, $H(f) = (0, \infty) \setminus \{1\}$.



9 Neurčitý integrál 1

Výsledky 9.1.

1. $-\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + c$
2. $2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
3. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6x^6} + c$
4. $\ln|x-2| + c$
5. $-\frac{1}{3}\frac{1}{(3x+4)^2} + c$
6. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + c$
7. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + c$
8. $-x - 2\ln|1-x| + c$
9. $x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + c$
10. $\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$
11. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$
12. $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\right) + c$
13. $-\frac{5}{2(x^2+3)} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right] + c$
14. $\frac{1}{48}\frac{3x-5}{[(3x-5)^2+4]^2} + \frac{1}{128}\frac{3x-5}{(3x-5)^2+4} + \frac{1}{256}\operatorname{arctg}\frac{3x-5}{2} + c$

Výsledky 9.2.

1. $\ln|\operatorname{tg} x| + c$
2. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c$
3. $-\sqrt{1-x^2} + c$
4. $\cos\frac{1}{x} + c$
5. $\frac{1}{2}\ln\frac{|\sqrt{x^2+1}-1|}{|\sqrt{x^2+1}+1|} + c$
6. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$
7. $\ln(2+e^x) + c$
8. $\frac{\ln^3 x}{3} + c$
9. $\frac{2}{3\ln a}(1+a^x)\sqrt{1+a^x} + c$
10. $\frac{1}{2}\ln\left|\ln x^2\right| + c$
11. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+4}{x^2-4}\right| + c$

10 Neurčitý integrál 2

Výsledky 10.1.

1. $\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+c$
2. $-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+2x+1\right)+c$
3. $\frac{1-2x^2}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+c$
4. $\left(\frac{4}{25}\sin 4x+\frac{3}{25}\cos 4x\right)\mathrm{e}^{3x}+c$
5. $\frac{e^x}{x+1}+c$
6. $x(\ln x-1)+c$
7. $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$
8. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$
9. $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|+c$
10. $-x-\mathrm{cotg}\,x\,[1+\ln(\sin x)]+c$

Výsledky 10.2.

1. $-\ln(1+\cos x)+c$
2. $-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+c$
3. $\frac{1}{2}\sin^2 x+2\sin x+3\ln(2-\sin x)+c$
4. $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right|+c$
5. $-\frac{1}{3}\ln|\mathrm{tg}\,x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\,x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}(2\,\mathrm{tg}\,x-1)}{3}+c$
6. $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+c$

Výsledky 10.3.

1. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+c$
2. $(1+x)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$
3. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+c$
4. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+c$
5. $2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+c$
6. $\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+c$
7. $-\frac{2}{5}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{5}{4}}-\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+c$

11 Určitý a nevlastní integrál

Výsledky 11.1.

1. $\dfrac{45}{4}$
2. $\dfrac{\pi}{6}$
3. $\dfrac{\pi}{3}$
4. $\dfrac{1}{2}\ln 3 - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$
5. $200\sqrt{2}$
6. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\mathrm{e}}{2}$
7. $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\dfrac{1}{6}$
9. $2 - \dfrac{\pi}{2}$
10. $a+b$

Výsledky 11.2.

1. $\dfrac{a^4\pi}{16}$
2. $\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3})$
3. $\dfrac{3}{2}\ln\left[(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)\right] - \dfrac{3}{5}\sqrt{3} + \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

Výsledky 11.3.

1. 0 – sinus na třetí má stejně jako sinus periodu 2π, přičemž na půlce periody nabývá kladných a na půlce stejných záporných hodnot, takže integrál ze sinu přes interval délky jedné periody, či jako tu dvou period, je nulový
2. 0 – jde o integrál z liché spojité (jmenovatel nemá reálný kořen) funkce přes symetrický interval
3. 0 – jde o integrál z liché spojité funkce přes symetrický interval

Výsledky 11.4.

1. $\dfrac{1}{a}$
2. $\dfrac{1}{\alpha-1}$ pro $\alpha > 1$, ∞ pro $\alpha \leq 1$
3. ∞
4. $\dfrac{1}{1-\alpha}$ pro $\alpha < 1$, ∞ pro $\alpha \geq 1$
5. -1
6. π
7. π
8. $\dfrac{4}{3}\ln 2$
9. integrál osciluje
10. 2
11. -1
12. $\dfrac{9}{2}$

12 Aplikace integrálního počtu

Výsledky 12.1.

1. $\dfrac{9}{2}$
2. $\dfrac{\pi}{2}\,(\cdot\infty = \infty)$
3. $9{,}9 - 8{,}1\log\mathrm{e}$
4. $2 - \dfrac{1}{\ln 2}$

Výsledky 12.2.

1. $\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$
2. $\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^2 + 1)$

Výsledky 12.3. $S = 3\pi a^2,\ l = 8a$

Výsledky 12.4. $S = \pi r^2,\ o = 2\pi r$

Výsledky 12.5. $o = 6a,\ S = \dfrac{3}{8}\pi a^2$

Výsledky 12.6.

1. $\dfrac{3}{7}\pi ab^2$
2. (a) $\dfrac{16}{15}\pi$ (b) $\dfrac{8}{3}\pi$
3. (a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) 2π

Výsledky 12.7.

1. $V = \dfrac{1}{3}\pi r^3 v,\ S_{pl} = \pi r\sqrt{r^2 + v^2}$
2. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3,\ S_{pl} = 4\pi r^2$
3. $V = 2\pi^2 R r^2,\ S_{pl} = 4\pi^2 r R$