MASARYKOVA UNIVERZITA
FAKULTA INFORMATIKY

Sbírka příkladů do cvičení

MB202

Diferenciální a integrální počet B

verze 15. září 2022

Mgr. Jakub Juránek, Ph.D.

Obsah

1. Polynomy, racionální lomené funkce, interpolace

Příklad 1.1. Určete všechny kořeny polynomu a napište jeho rozklad na kořenové činitele v $\mathbb{R}$.

1. $p_1(x) = x^4 - 1$
2. $p_2(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$
3. $p_3(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$
4. $p_4(x) = 12x^3 + 11x^2 - 7x - 6$
5. $p_5(x) = 2x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 81$
6. $p_6(x) = 6x^5 + 29x^4 + 31x^3 - 32x^2 - 102x - 72$

Příklad 1.2. Rozložte na parciální zlomky.

1. $R_1(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$
2. $R_2(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$
3. $R_3(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x}$
4. $R_4(x) = \dfrac{x^5 + x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2 + x}$
5. $R_5(x) = \dfrac{3x^3 + 3x^2 - 1}{2x^4 + x^3 + 2x^2 + x}$
6. $R_6(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$
7. $R_7(x) = \dfrac{2x^6 - 10x^5 + 13x^4 - 57x^3 + 5x^2 - 75x - 18}{x(x-2)(x+1)(x^2+3)^2}$

Příklad 1.3. Najděte Lagrangeův interpolační polynom funkce dané tabulkou a pomocí něj odhadněte hodnotu funkce v bodě $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

1.

x	-1	1	2
$f_1(x)$	-9	-3	3

2.

x	-1	0	1	2
$f_2(x)$	3	-3	3	15

3.

x	-2	-1	0	1	2
$f_3(x)$	59	7	1	5	31

4.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_4(x)$	-591	238	33	6	1	-186	-927	718

Příklad 1.4. Najděte Hermiteův interpolační polynom funkce dané tabulkou a pomocí něj odhadněte hodnotu první derivace v bodě $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

1.

x	1	2
$f_1(x)$	2	3
$f_1'(x)$	$\times$	2

2.

x	0	1	2
$f_2(x)$	0	1	0
$f_2'(x)$	0	1	0

3.

x	-1	0	1	2
$f_3(x)$	-4	0	-2	2
$f_3'(x)$	$\times$	$\times$	-1	11

Příklad 1.5. Uvažujte následující krátký experiment.

- Měřená veličina byla do okamžiku začátku experimentu (tj. do času nula včetně) konstantní s hodnotou 4.
- Jakmile byl experiment zahájen, probíhalo měření každou minutu a byly naměřeny postupně hodnoty 5 a 8.
- Posledním uvedeným měřením byl experiment ukončen a bylo zjištěno, že měřená veličina se dále samovolně mění rychlostí +8 jednotky za minutu (tuto rychlost změny lze považovat za směrodatnou i pro okamžik posledního měření).

Získejte z popisu experimentu dostatek informací a namodelujte jeho průběh pomocí polynomu čtvrtého řádu. Polynom řádně zapište v základním tvaru. Dále pomocí získaného modelu odhadnete hodnotu měřené veličiny a rychlost její změny půl minuty po zahájení experimentu. Tyto hodnoty zapište jako jednoduché zlomky.

Příklad 1.6. Určete přirozený kubický splajn funkce dané tabulkou.

x	-1	1	2
$f(x)$	3	-2	4

Příklad 1.7. Napište sadu rovnic, pomocí kterých lze získat úplný kubický splajn funkce dané tabulkou, přičemž v levém krajním bodě je požadována rychlost změny +1, v pravém -1. Kolik je potřeba rovnic pro kolik neznámých? Rovnice neřešte.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	0	1	0

2. Limity a spojitost funkce

Příklad 2.1. Přímo z definice limity posloupnosti dokažte.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n+1}}{3^n} = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+4}{2-3n} = -1$

Příklad 2.2. Vypočtěte

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n^2+1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{16n^3-9n^5}{6n^2+5n^4-n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-7n^2-6n^3+3n}{n-3n^3+8}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{n^7}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} n-\sqrt{n^2+n}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{6n}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{7n+6}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n+3}\right)^{3n-1}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Před dalšími limitami připomeňme Stirlingovu formuli: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ s relaticní chybou cca $\dfrac{1}{12n}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}$

Příklad 2.3. Vypočtěte

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^n}{1-x^m}$, pro $n,m\in\mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^4+3-2x^6-12x}{7+8x^2+6x+3x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^3}{1+x^3}+3^{\frac{1}{x}}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-4}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(2x)}{5x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(4x)}{2x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x}-1)(\sin 5x)}{3x^2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x}{x\sin x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3-2x}{2+5x}\right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$
16. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4)^3\cos^2\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$

Příklad 2.4. Najděte body nespojitosti a určete jejich typ.

1. $f_1(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1+x}{1+x^3}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x-4\pi}$
6. $\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Příklad 2.5. Jak je třeba dodefinovat funkci $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x - \cos 2x}{\sqrt{2\sin x} - 1}$ v bodě $x = \dfrac{\pi}{6}$, aby v něm byla spojitá?

3. Derivace funkce a Taylorův polynom

Příklad 3.1. Z definice odvoďte derivace funkcí v libovolném bodě x_0.

1. $f\colon y = x^n, n \in \mathbb{N}$
2. $g\colon y = \sqrt{x}$
3. $h\colon y = \mathrm{e}^x$
4. $i\colon y = \sin(x)$

Příklad 3.2. Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2 \cdot \sin(x-2)$.

Příklad 3.3. Spočtete derivace následujících funkcí a upravte je do co nejjednoduššího tvaru.

1. $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
2. $f_2(x) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$
3. $f_3(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$
4. $f_4(x) = \arccos \dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$
5. $f_5(x) = \ln \ln \ln x$
6. $f_6(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
7. $f_7(x) = x\sqrt{1+x^2}$
8. $f_8(x) = x \cdot (\sin \ln x - \cos \ln x)$
9. $f_9(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$
10. $f_{10}(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x}$
11. $f_{11}(x) = \dfrac{(\ln 3)\sin x + \cos x}{3^x}$
12. $f_{12}(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$
13. $f_{13}(x) = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
14. $f_{14}(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

Příklad 3.4. Zderivujte a dále neupravujte.

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln \sin \operatorname{arctg}(x^4) \cdot \arcsin \frac{3^{x \log_\pi (3x)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}}}$$

Příklad 3.5. Určete 759. derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

Příklad 3.6. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bodě $T[0;?]$.

Příklad 3.7. Určete všechny body, ve kterých je tečna ke grafu funkce $f\colon y = 2 + x - x^2$ rovnoběžná

1. s osou x;
2. s osou prvního kvadrantu.

Příklad 3.8. Je dána funkce $f\colon y = x \ln x$ a přímka $p\colon 2x - 2y + 3 = 0$. Určete rovnici normály ke grafu funkce f rovnoběžné s přímkou p.

Příklad 3.9. Určete diferenciály daných funkcí v libovolném bodě x_0.

1. $f_1(x) = xe^x$
2. $f_2(x) = 2^{-\frac{\ln x}{x}}$

Příklad 3.10. Určete přibližnou hodnotu arctg 1,1 pomocí diferenciálu a porovnejte ji s přesnější hodnotou na kalkulačce.

Příklad 3.11. Rozviňte polynom $P(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ do Taylorova polynomu se středem 2.

Příklad 3.12. Pomocí vhodného Taylorova polynomu třetího stupně přibližně určete $\sqrt{0{,}98}$.

Příklad 3.13. Určete Taylorův polynom 3. řádu se středem v $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$. Poté pomocí něj odhadněte hodnotu $f(1{,}1)$ a určete, s jakou přesností je odhad proveden.
(Polynom vypočítejte pomocí derivací, není nutné ho roznásobovat. Výslednou hodnotu i chybu napište jako jednoduché zlomky.)

Příklad 3.14. Pomocí co nejjednoduššího Maclaurinova polynomu (tj. Taylorova polynomu se středem v nule co nejnižšího řádu) funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

odhadněte hodnotu Eulerova čísla e s chybou menší než $\frac{1}{100}$. Výsledek zapište jako jeden jednoduchý zlomek.

4. L'Hospitalovo pravidlo a lokální extrémy

Příklad 4.1. Vypočtěte

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-x}{1+3x-2x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x}{8-x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-x}{x^n-1}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x-x)$
10. $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \ln(1-x)$
11. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \ln x$, kde $a>0$
12. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
13. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$
16. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
19. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Z předmětu IB002 znáte asymptotickou notaci (pro kladné posloupnosti f,g):

$$f\in \mathcal{O}(g)\ \ (f \le_{ASY} g) \overset{\text{def}}{\iff} \exists c_1>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \ f(n)\le c_1\cdot g(n)$$

$$f\in \Omega(g)\ \ (f \ge_{ASY} g) \overset{\text{def}}{\iff} \exists c_2>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \ f(n)\ge c_2\cdot g(n)$$

Srovnejme s definicí limity posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=L \overset{\text{def}}{\iff} \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \ \left|\frac{f(n)}{g(n)}-L\right|<\varepsilon$$

Rozepsáním poslední nerovnosti dostaneme:

$$\begin{array}{rcccl} L-\varepsilon & < & \dfrac{f(n)}{g(n)} & < & L+\varepsilon \\ (L-\varepsilon)\cdot g(n) & < & f(n) & < & (L+\varepsilon)\cdot g(n) \end{array}$$

Volbou $c_1=L+\varepsilon$ pro $L<\infty$, resp. $c=L-\varepsilon$ pro $L>0$ a dostatečně malé ε, obdržíme:

$$\begin{array}{llll} L=0 & \Rightarrow & f\in\mathcal{O}(g) & f<_{ASY} g \\ L\in(0,\infty) & \Rightarrow & f\in\mathcal{O}(g)\cap\Omega(g)=\Theta(h) & f=_{ASY} g \\ L=\infty & \Rightarrow & f\in\Omega(g) & f>_{ASY} g \end{array}$$

Před příkladem dodejme, že neexistence limity nic neříká, a že pokud předpisy f a g umožňují nahrazení posloupností za diferencovatelné funkce, lze k výpočtu uvažované limity podílu použít i l'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 4.2. Asymptoticky srovnejte funkce f a g.

1. $f_1(n) = n^2 + \ln n$, $g_1(n) = n^2$
2. $f_2(n) = \ln n$, $g_2(n) = \sqrt{n}$
3. $f_3(n) = \ln^m n$, $g_3(n) = n^\alpha$, kde $m \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ (pro jednoduchost můžete zvolit $m = 3, \alpha = 1$)
4. $f_4(n) = \sqrt{\ln n}$, $g_4(n) = \ln\ln n$

Příklad 4.3. Najděte lokální extrémy daných funkcí.

1. $f_1(x) = x + \dfrac{1}{x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$
4. $f_4(x) = \mathrm{e}^x \sin x$

5. Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce f můžeme postupovat podle následujícího schématu:

- f: definiční obor $D(f)$, parita, periodicita, průsečíky s osami a znaménka funkce;
- f': intervaly monotonie, lokální extrémy;
- f'': zakřivení, inflexní body;
- asymptoty – bez směrnice, se směrnicí;
- (limity do $\pm\infty$), graf, globalita extrémů, obor hodnot $H(f)$.

Příklad 5.1. Vyšetřete průběh funkce.

1. $f(x) = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$
4. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x - 1}{x}$
5. $f(x) = x^x, D(f) = \mathbb{R}^+$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

6. Globální extrémy – slovní úlohy

Příklad 6.1. Ze všech obdélníků, které mají obsah S, určete ten s nejmenším obvodem.

Příklad 6.2. Pro jaký poloměr podstavy r a výšku v bude mít válec s daným objemem V nejmenší povrch.

Příklad 6.3. Do koule o poloměru r vepište válec s co možná největším objemem. Určete poloměr ρ tohoto válce.

Příklad 6.4. Kužel má vrchol ve středu kulové plochy s poloměrem r a podstavná kružnice leží na povrchu koule. Určete, jaký největší objem může tento kužel mít.

Příklad 6.5. Drát délky a máme rozdělit na dvě části. Z první části chceme vyrobit čtverec, ze druhé kruh. Jak velkou část máme použít na čtvrec, aby součet ploch obou útvarů co možná nejmenší. Určete tento součet obsahů. Jak se změní situace, budeme-li chtít součet ploch co možná největší.

Příklad 6.6. Z ostrova vzdáleného 5 km od rovného břehu jezera se chceme dostat v nejkratší době do města na břehu jezera. Ve kterém místě na břehu máme lodí přistát, je-li rychlost lodě 4 km/h a rychlost chodce 6 km/h.

Příklad 6.7. Určete vzdálenost bodu $A = [1,1]$ od paraboly $p\colon\ y^2 = 2x$.

Příklad 6.8. Určete rozměry pravoúhelníku, který je vepsán do elipsy o rovnici $9x^2 + 4y^2 = 72$ tak, aby měl maximální možný obsah. Vypočtěte i tento obsah.

Příklad 6.9. Z obdélníkového plechu o velikosti $80\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$ se má po odstřižení stejně velkých čtverců v rozích plechu vyrobit krabice bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstřihnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem, a jak velký bude tento objem?

Příklad 6.10. Hodláme koupit obdélníkovou parcelu o rozloze $200\,\mathrm{m}^2$, jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Dokažte, že obdélník lze zvolit tak, aby plot měl minimální délku, a najděte délky příslušných stran.

Příklad 6.11. Obdélníková parcela o rozměrech $5a \times b$ se má oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 (shodných) parcel o rozměrech $a \times b$. Dokažte, že při dané celkové délce plotů c lze a a b zvolit tak, že rozloha $P = 5ab$ parcely je maximální. Určete takové rozměry a, b a P.

Příklad 6.12. Dokažte, že do trojúhelníka, jehož nejdelší stranou je strana c, lze vepsat obdélník se základnou obsaženou v c a s maximálním obsahem. Najděte vztah mezi obsahem trojúhelníka a vepsaného obdélníka.

7. Neurčitý integrál 1

Příklad 7.1. Zintegrujte – parciální zlomky

1. $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x^4+2+x^{-4}}{x^3} \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x-2} \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{2}{(3x+4)^3} \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2} \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2} \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1-x} \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} \mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} \mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1} \mathrm{d}x$

Před dalšími integrály připomeňme rekuretntní vzorec

$$J_n(x,a) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)J_{n-1}\right]$$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{5x+3}{(x^2+3)^2} \mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{[(3x-5)^2+4]^3}$

Příklad 7.2. Zintegrujte – substituce

1. $\displaystyle\int (\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x)\, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int x e^{-x^2} \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x} \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x} \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int a^x\sqrt{1+a^x}\, \mathrm{d}x, \quad a>0$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x^2} \mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{16-x^4} \mathrm{d}x$

8. Neurčitý integrál 2

Příklad 8.1. Zintegrujte – per-partes

1. $\displaystyle\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}\cos 4x\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

Příklad 8.2. Zintegrujte – $R(\sin x, \cos x)$

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,\mathrm{d}x$

Příklad 8.3. Zintegrujte – substituce, odmocniny

1. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{\frac{x}{2-x}}+3}{x^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}\,\mathrm{d}x$

9. Určitý a nevlastní integrál

Příklad 9.1. Vyčíslete

1. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$
3. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_{a}^{b} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x, \quad a<0, b>0$

Příklad 9.2. Vyčíslete

1. $\displaystyle\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a>0$
2. $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{1}^{3} \sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

Příklad 9.3. Vhodnou úvahou zintegrujte

1. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+4\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-12}^{12} \frac{6x^5-2x+17x^3}{1-x^4+x^8}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin^3 x - x^2\sin x\cos x + x\cos^5 x\sin^4 x}{\cos^3 x + x^2\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + x^6}\,\mathrm{d}x$, víte-li, že jmenovatel nemá reálný kořen

Příklad 9.4. Vyčíslete

1. $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a>0$
2. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a>0$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

10. Aplikace integrálního počtu

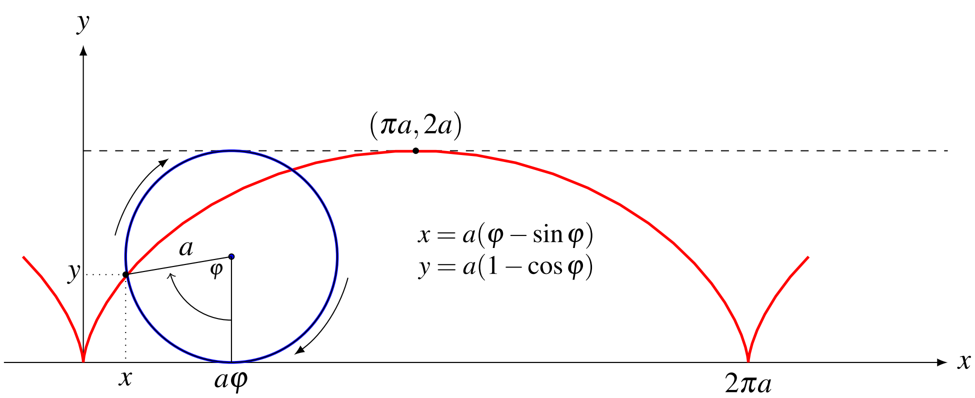
Příklad 10.1. Vypočtěte obsah rovinných ploch vymezených danými křivkami.

1. $y = 2x - x^2$ a $x + y = 0$
2. $y = x$ a $y = x + \sin^2 x$
3. $y = |\log x|$, $y = 0$, $x = 0{,}1$ a $x = 10$
4. $y = 2^x$, $y = 2$, a $x = 0$

Příklad 10.2. Spočtěte délku křivky

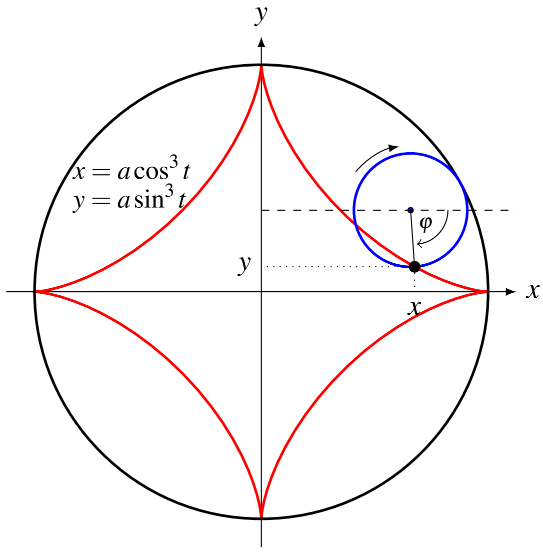
1. $y = x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$
2. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \le y \le \mathrm{e}$

Příklad 10.3. Vypočtěte obsah rovinné plochy vymezené jedním „kopečkem“ cykloidy (a osou x). Cykloida je křivka, kterou opíše bod na kružnici, která se kotálí po ose x. Označíme-li poloměr kružnice a, a je-li náš sledovaný bod někdy (pro $t = 0$) v počátku, má cykloida parametrické vyjádření $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Dále určete délku této části cykloidy.



Příklad 10.4. Vypočtěte obsah a obvod kruhu o poloměru r (zkuste parametricky i neparametricky zadaný).

Příklad 10.5. Vypočtěte obvod a obsah asteroidy, tj. křivky, kterou opíše bod na kružnici, která se kotálí po vnitřní straně nehybné kružnice čtyřnásobného poloměru. Označíme-li poloměr větší kružnice a, má asteroida parametrické vyjádření $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. Využijte jednak parametrického vyjádření, jednak ekvivalentní rovnice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.



Příklad 10.6. Vypočtěte objemy těles ohraničených plochami, které vzniknou rotací následujících křivek

1. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}},\ 0 \leq x \leq a,$ kolem osy x
2. $y = 2x - x^2$ a $y = 0$
   (a) kolem osy x
   (b) kolem osy y
3. $y = e^{-x},\ y = 0,\ 0 \leq x < \infty$
   (a) kolem osy x
   (b) kolem osy y

Příklad 10.7. Vypočtěte objem a povrch pláště

1. rotačního kužele výšky v a poloměrem podstavy r
2. koule o poloměru r
3. anuloidu, který vznikne rotací kruhu o poloměru r kolem přímky vzálené R od jeho středu, $0 < r < R$

11. Nekonečné řady

Příklad 11.1. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konvergují dané nekonečné geometrické řady. Pro tato x určete součet příslušné řady.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-2x)^n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^2+7)^n$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{-2n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2\log x+3)^n$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin^n x$

Příklad 11.2. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

1. $1+3x+9x^2+\cdots = 10$
2. $2-4x+8x^2-\cdots = 1$
3. $1+\log x+(1+\log x)^2+(1+\log x)^3+\cdots = -6\log x$
4. $\ln x+\ln\sqrt{x}+\ln\sqrt[4]{x}+\ln\sqrt[8]{x}+\cdots = 2$
5. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\cdots = -\dfrac{1}{3}$

Příklad 11.3. Určete součet nekonečné řady.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+3n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+2^n}{6^n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{4^{2n-1}}+\dfrac{2}{4^{2n}}\right)$
6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt{2n}+\sqrt{2n+4}-2\sqrt{2n+2}$

Příklad 11.4. Rozhodněte o konvergenci či divergenci následujících řad.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{arctg} n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+1}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$
6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Před dalšími příklady připomeňme známou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n (n-1)!}{n^n}$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2^n}$
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$
15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$

Příklad 11.5. Rozhodněte o konvergenci, resp. absolutní konvergenci, následujících alternujících řad.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^2+1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

12. Mocninné řady

Příklad 12.1. Určete obor konvergence, resp. absolutní konvergence, následujících mocninných řad.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n!}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$

Příklad 12.2. Určete součet mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$ a pomocí této řady určete součet číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Příklad 12.3. Určete součet mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ a pomocí této řady určete součet číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$.

Příklad 12.4. Pomocí zaměnitelnosti pořadí sumace a derivace/integrace určete součet následujících mocninných řad. Určete i poloměry konvergence.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

Příklad 12.5. Rozložte v Taylorovu řadu funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = -2$. Dále určete, pro jaká x nalezený rozvoj platí.

Příklad 12.6. Rozložte v Maclaurinovu řadu funkci $f(x) = \ln(1+x)$ a určete, pro jaká x nalezený rozvoj platí. Dále pomocí ní určete součet číselné řady $\sum\limits_{x=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Příklad 12.7. S využitím Maclaurinovy řady pro e^x určete součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Příklad 12.8. Pomocí Maclaurinových řad elementárních funkcí určete součet následujících mocninných řad. Vyzkoušejte i přes zaměnitelnost pořadí sumace a derivace/integrace.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

1 Polynomy, racionální lomené funkce, interpolace

Výsledky 1.1.

1. $p_1(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
2. $p_2(x) = (x-2)(x^2+4x+5)$
3. $p_3(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x-4)$
4. $p_4(x) = (x+1)(3x+2)(4x-3)$
5. $p_5(x) = (x+3)^2(2x-3)(x^2+3)$
6. $p_6 = (x+3)(2x-3)(3x+4)(x^2+2x+2)$

Výsledky 1.2.

1. $R_1(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$
2. $R_2(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x}{x^2+3}$
3. $R_3(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$
4. $R_4(x) = x^2+2x-1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$
5. $R_5(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{2x+1}{x^2+1}$
6. $R_6(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1} + \dfrac{2x-1}{(x^2+1)^2}$
7. $R_7(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x^2+3} + \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

Výsledky 1.3.

1. $L_1(x) = x^2+3x-7, f_1\left(-\dfrac{1}{2}\right) \doteq -\dfrac{33}{4}$
2. $L_2(x) = -x^3+6x^2+x-3, f_2\left(-\dfrac{1}{2}\right) \doteq -\dfrac{15}{8}$
3. $L_3(x) = 2x^4-2x^3+3x^2+x+1, f_3\left(-\dfrac{1}{2}\right) \doteq \dfrac{13}{8}$
4. $L_4(x) = x^7-2x^6-9x^5+8x^4-6x^3+5x^2-2x+6, f_4\left(-\dfrac{1}{2}\right) \doteq -\dfrac{1247}{128}$

Výsledky 1.4.

1. $H_1(x) = x^2-2x+3, f_1'\left(\dfrac{1}{2}\right) \doteq -1$
2. $H_2(x) = x^5-4x^4+4x^3, f_2'\left(\dfrac{1}{2}\right) \doteq \dfrac{21}{16}$
3. $H_3(x) = 2x^3-3x^2-x, f_3'\left(\dfrac{1}{2}\right) \doteq -\dfrac{5}{2}$

Výsledky 1.5.

x	0	1	2
$f(x)$	4	5	8
$f'(x)$	0	$\times$	8

$P(x) = x^4-3x^3+3x^2+4, f\left(\dfrac{1}{2}\right) \doteq \dfrac{71}{16}, f'\left(\dfrac{1}{2}\right) \doteq -\dfrac{5}{4}$

Výsledky 1.6. $S_1(x) = \dfrac{17}{24}x^3 + \dfrac{17}{8}x^2 - \dfrac{77}{24}x - \dfrac{13}{8}, S_2(x) = -\dfrac{17}{12}x^3 + \dfrac{17}{2}x^2 - \dfrac{115}{12}x + \dfrac{1}{2}$

Výsledky 1.7. 16 rovnic pro 16 neznámých – 4 polynomy po 4 koeficientech

2 Limity a spojitost funkce

Výsledky 2.1.

1. $n > \frac{1}{\varepsilon}$
2. $n > \frac{\ln \frac{K}{2}}{\ln \frac{4}{3}}$
3. $n > \frac{2}{\varepsilon} + \frac{3}{2}$

Výsledky 2.2.

1. 0	2. $-\infty$	3. 2	4. 0	5. 0
6. ∞	7. $\frac{1}{3}$	8. 0	9. $-\frac{1}{2}$	10. e
11. e^2	12. $\mathrm{e}^{\frac{7}{2}}$	13. e^{-6}	14. 1	15. ∞
16. $\frac{1}{\mathrm{e}}$	17. 5			

Výsledky 2.3.

1. 0	2. $\frac{n}{m}$	3. 0	4. ∞	5. 4
6. 2	7. $-\frac{1}{16}$	8. 4	9. 3	10. $\frac{2}{5}$
11. 2	12. $\frac{10}{3}$	13. 1	14. 3	15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
16. 0				

Výsledky 2.4.

1. v $x = -1$ nekonečná nespojitost
2. v $x = -1$ odstranitelná nespojitost
3. v $x = 1$ a $x = -2$ nekonečná nespojitost
4. v $x = 0$ a $x = 1$ odstranitelná nespojitost, v $x = -1$ nekonečná nespojitost
5. v $x = 4\pi$ odstranitelná nespojitost, $\lim\limits_{x \to 4\pi} f_5(x) = \frac{1}{2}$
6. ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ nespojitost 2. druhu

Výsledky 2.5. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$

3 Derivace funkce a Taylorův polynom

Výsledky 3.1. Dosazením do definiční limity $f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Výsledky 3.2. $f'(x) = 2x \cdot \sin(x-2) + x^2 \cdot \cos(x-2)$, $f'(2) = 4$

Výsledky 3.3.

1. $f_1'(x) = -2xe^{-x^2}$
2. $f_2'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$
3. $f_3'(x) = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
4. $f_4'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$
5. $f_5'(x) = \dfrac{1}{\ln\ln x \cdot \ln x \cdot x}$
6. $f_6'(x) = \dfrac{4\sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}$
7. $f_7'(x) = \dfrac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$
8. $f_8'(x) = 2 \sin \ln x$
9. $f_9'(x) = \dfrac{4x^2 - x + 1}{(1-x)^3(1+x)^4}$
10. $f_{10}'(x) = \dfrac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$
11. $f_{11}'(x) = -\dfrac{(1 + \ln^2 3) \sin x}{3^x}$
12. $f_{12}'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
13. $f_{13}'(x) = \dfrac{-2 \operatorname{sgn} x}{1 + x^2}$
14. $f_{14}'(x) = -\dfrac{1}{\cos x}$

Výsledky 3.4.

$$
\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{1}{3}\left[\ln\sin\operatorname{arctg}(x^4) \cdot \arcsin\frac{3^{x\log_\pi(3x)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}}\right]^{-\frac{2}{3}} \cdot \\
&\cdot \left\{ \frac{\cos\operatorname{arctg}(x^4)}{\sin\operatorname{arctg}(x^4)} \cdot \frac{4x^3}{1+x^8} \cdot \arcsin\frac{3^{x\log_\pi(3x)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}} + \ln\sin\operatorname{arctg}(x^4) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3^{2x\log_\pi(3x)}}{\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}}} \cdot \right. \\
&\left. \cdot \frac{3^{x\log_\pi(3x)} \cdot \ln 3 \cdot \left[\log_\pi(3x) + \frac{3x}{3x\ln\pi}\right] \cdot \sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{tg}(-x)} - 3^{x\log_\pi(3x)} \cdot \frac{2\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{\cos^2(-x)}}{2\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{tg}(-x)}}}{\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{tg}(-x)} \right\}
\end{aligned}
$$

Výsledky 3.5. $f^{(759)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^{759}}{\mathrm{d}x^{759}}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right) = 759!\left(\dfrac{1}{(x+2)^{760}} - \dfrac{1}{(x+1)^{760}}\right)$

Výsledky 3.6. $t\colon x + y - 1 = 0$, $n\colon x - y + 1 = 0$

Výsledky 3.7.

1. $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right]$
2. $[0, 2]$

Výsledky 3.8. $n\colon x - y - 3\mathrm{e}^{-2} = 0$

Výsledky 3.9.

1. $\mathrm{d}f_1(x_0) = (x_0+1)e^{x_0}\,\mathrm{d}x$

2. $\mathrm{d}f_2(x_0) = 2^{-\frac{\ln x_0}{x_0}} \cdot \ln 2 \cdot \dfrac{\ln x_0 - 1}{x_0^2}\,\mathrm{d}x$

Výsledky 3.10. $\operatorname{arctg}(1{,}1) \doteq \dfrac{\pi}{4} + 0{,}05 \doteq 0{,}835 \doteq 47°50' \times 47°45'$

Výsledky 3.11. $P(x) = -5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$

Výsledky 3.12. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1$, $\sqrt{0{,}98} \doteq \dfrac{494\,911}{500\,000}$

Výsledky 3.13. $f(1{,}1) \doteq T_3(1{,}1) = \dfrac{629}{6000}$, $|R_3(1{,}1)| < \dfrac{1}{120\,000}$

Výsledky 3.14. $\mathrm{e} \doteq M_5(1) = \dfrac{163}{60}$

4 L'Hospitalovo pravidlo a lokální extrémy

Výsledky 4.1.

1. $-\dfrac{2}{3}$	2. 0	3. $\dfrac{n-1}{n}$	4. 0	5. $\dfrac{1}{2}$
6. $\dfrac{1}{3}$	7. $\dfrac{1}{2}$	8. $\dfrac{1}{2}$	9. ∞	10. 0
11. 0	12. 1	13. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	14. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	15. 1
16. 1	17. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$	18. $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$	19. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$	

Výsledky 4.2.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+\ln n}{n^2} = 1 \;\Rightarrow\; n^2+\ln n =_{ASY} n^2,\;\; n^2+\ln n \in \Theta(n^2)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0 \;\Rightarrow\; \ln n <_{ASY} \sqrt{n},\;\; \ln n \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^m n}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m!}{\alpha^m n^\alpha} = 0 \;\Rightarrow\; \ln^m n <_{ASY} n^\alpha,\;\; \ln^m n \in \mathcal{O}(n^\alpha)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\ln n}}{\ln\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt{\ln n} = \infty \;\Rightarrow\; \sqrt{\ln n} >_{ASY} \ln\ln n,\;\; \ln^m n \in \Omega(\ln\ln n)$

Výsledky 4.3.

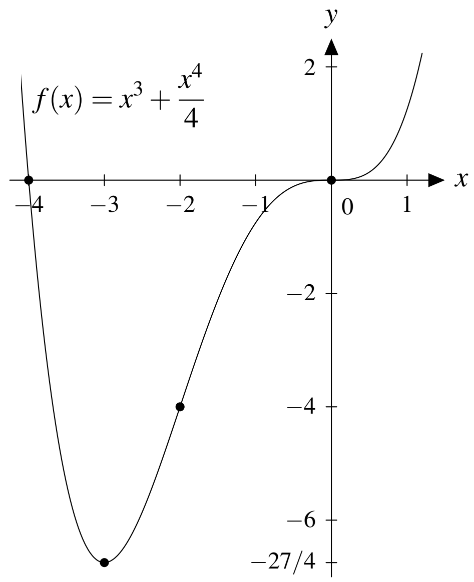
1. lokální maximum v $[-1,-2]$, lokální minimum v $[1,2]$
2. lokální minimum v $[-1,-1]$, lokální maximum v $[1,1]$
3. lokální minimum v $[1,0]$, lokální maximum v $\left[\mathrm{e}^2, 4\mathrm{e}^{-2}\right]$
4. lokální minima v $\left[-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$,

   lokální maxima v $\left[\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$

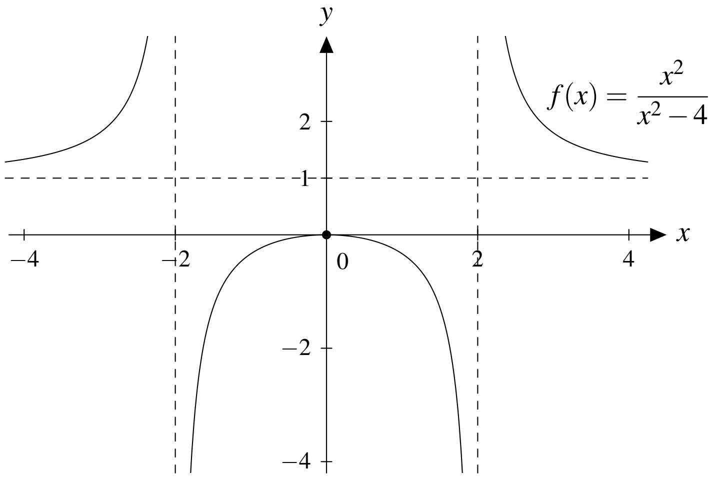
5 Průběh funkce

Výsledky 5.1.

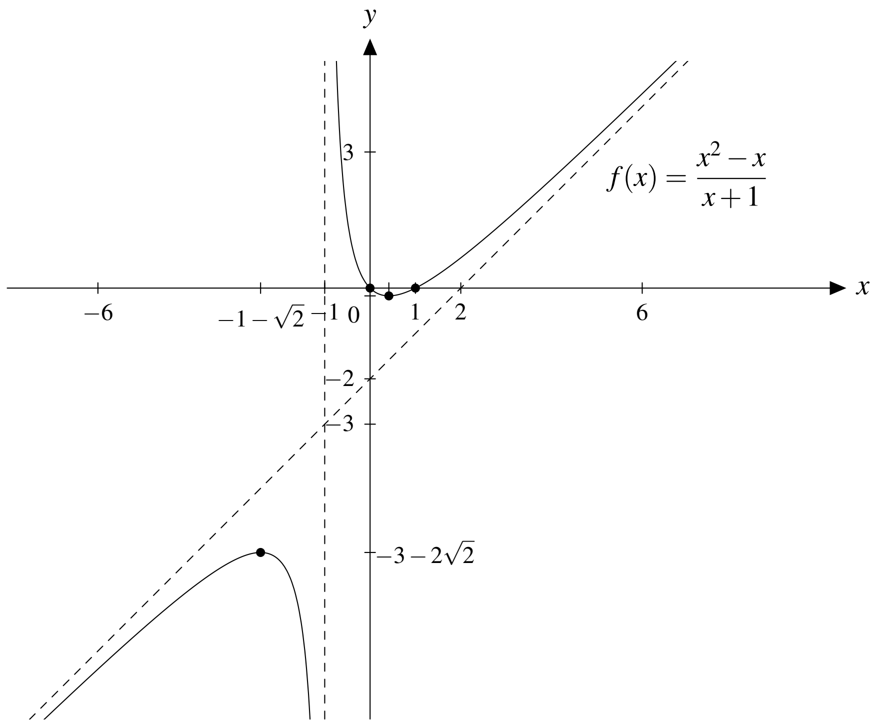
1. $f(x) = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$
   - $D(f) = \mathbb{R}$, ani sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1} = [-4,0]$, $P_{x2} = [0,0] = P_y$, kladná na $(-\infty,-4) \cup (0,\infty)$, záporná na $(-4,0)$;
   - $f'(x) = 3x^2 + x^3$, klesající na $(-\infty,-3]$, rostoucí na $[-3,\infty)$, lokální minimum $\left[-3,-\dfrac{27}{4}\right]$;
   - $f''(x) = 6x + 3x^2$, konvexní na $(-\infty,-2)$ a $(0,\infty)$, konkávní na $(-2,0)$, inflexní body $[-2,-4]$ a $[0,0]$;
   - ABS: nemá, ASS: nemá;
   - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, globální minimum $\left[-3,-\dfrac{27}{4}\right]$, globální maximum nemá, $H(f) = \left[-\dfrac{27}{4},\infty\right)$.



2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$
   - $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, sudá, není periodická, $P_x = [0,0] = P_y$, kladná na $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$, záporná na $(-2,0) \cup (0,2)$;
   - $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$, rostoucí na $(-\infty,-2)$ a $(-2,0)$, klesající na $(0,2)$ a $(2,\infty)$, lokální minimum $[0,0]$;
   - $f''(x) = \dfrac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$, konvexní na $(-\infty,-2)$ a $(2,\infty)$, konkávní na $(-2,2)$, inflexní body nemá;
   - ABS: $x = -2$ a $x = 2$, ASS: $y = 1$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$;
   - globální extrémy nemá, $H(f) = (-\infty,0] \cup (1,\infty)$.

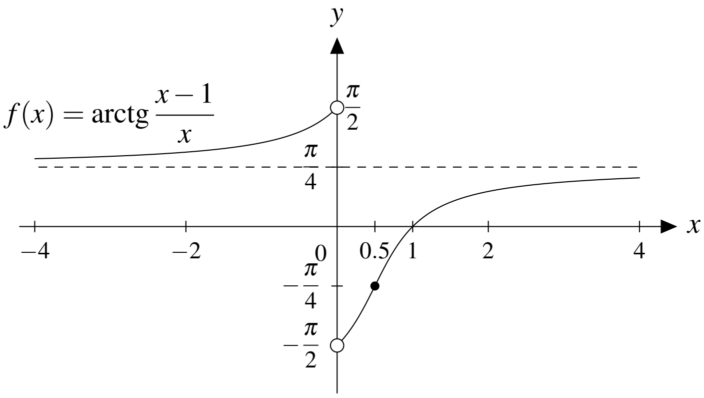


3. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$
   - $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ani sudá ani lichá, není periodická, $P_{x1} = [0,0] = P_y$, $P_{x2} = [1,0]$, záporná na $(-\infty,-1) \cup (0,1)$, kladná na $(-1,0) \cup (1,\infty)$;
   - $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$, rostoucí na $(-\infty,-1-\sqrt{2})$ a $(-1+\sqrt{2},\infty)$, klesající na $(-1-\sqrt{2},-1)$ a $(-1,-1+\sqrt{2})$, lokální maximum $[-1-\sqrt{2},-3-2\sqrt{2}]$, lokální minimum $[-1+\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$;
   - $f''(x) = \dfrac{4}{(x+1)^3}$, konvexní na $(-1,\infty)$, konkávní na $(-\infty,-1)$, inflexní body nemá;
   - ABS: $x = -1$, ASS: $y = x - 2$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$;
   - globální maximum $[-1-\sqrt{2},-3-2\sqrt{2}]$, globální minimum $[-1+\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$, $H(f) = (-\infty,-3-2\sqrt{2}] \cup [-3+2\sqrt{2},\infty)$.



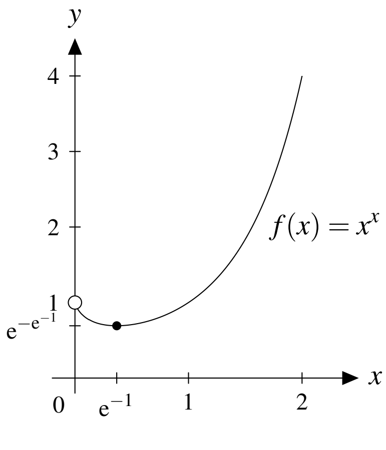
4. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x}$

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ani sudá ani lichá, není periodická, $P_x = [1,0]$, P_y nemá, kladná na $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$ záporná na $(0,1)$;
- $f'(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$, rostoucí na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$, lokální extrémy nemá;
- $f''(x) = \dfrac{-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$, konvexní na $(-\infty,0)$ a $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, konkávní na $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$, inflexní bod $\left[\dfrac{1}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right]$;
- ABS: nemá, ASS: $y = \dfrac{\pi}{4}$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$;
- globální extrémy nemá, $H(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$.



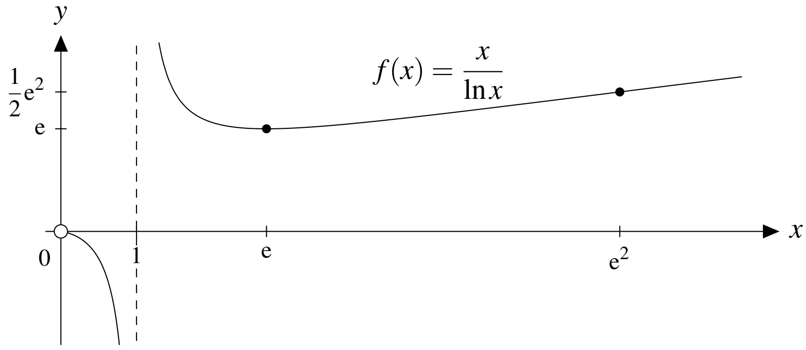
5. $f(x) = x^x$, $D(f) = \mathbb{R}^+$

- $D(f) = (0,\infty)$, ani sudá ani lichá, není periodická, P_x ani P_y nemá, kladná na $(0,\infty)$;
- $f'(x) = x^x(1+\ln x)$, rostoucí na $\left(\mathrm{e}^{-1},\infty\right)$, klesající na $\left(0,\mathrm{e}^{-1}\right)$, lokální minimum $\left[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right]$
- $f''(x) = x^x\left(\dfrac{1}{x} + (1+\ln x)^2\right)$, konvexní na $(0,\infty)$, inflexní body nemá;
- ABS: nemá, ASS: nemá;
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, globální minimum $\left[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right]$, globální maximum nemá, $H(f) = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}},\infty\right)$.



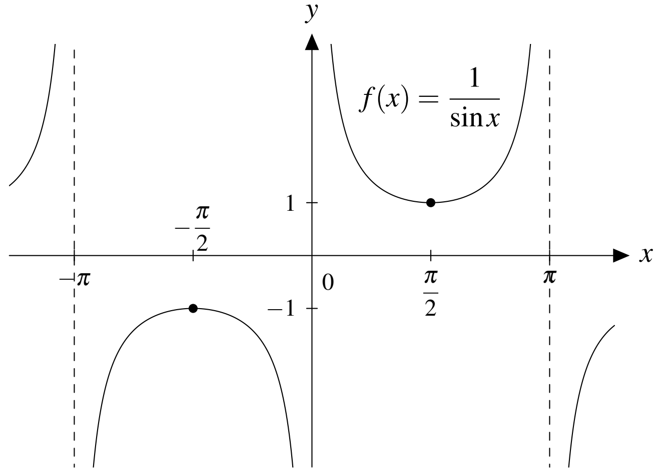
6. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

- $D(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$,
- $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, rostoucí na (e, ∞), klesající na $(0,1)$ a $(1,\mathrm{e})$, lokální minimum $[\mathrm{e},\mathrm{e}]$;
- $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x}$, konvexní na $(1,\mathrm{e}^2)$, konkávní na $(0,1)$ a (e^2,∞), inflexní bod $\left[\mathrm{e}^2, \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2\right]$;
- ABS: $x = 1$, ASS: nemá;
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, globální extrémy nemá, $H(f) = (-\infty, 0) \cup (\mathrm{e}, \infty)$.



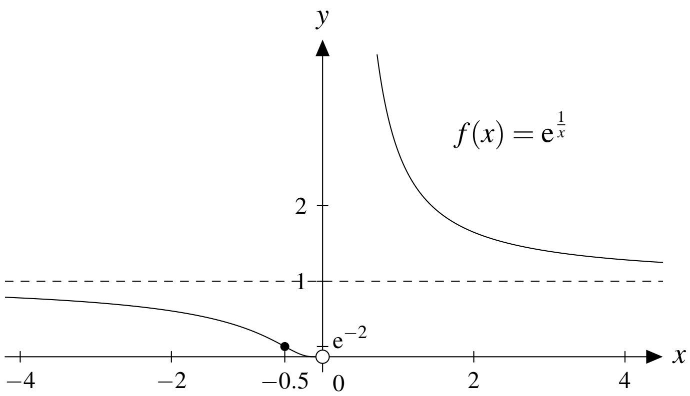
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, lichá, periodická se základní periodou 2π, P_x ani P_y nemá, kladná na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (k2\pi, \pi + k2\pi)$, záporná na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (-\pi + k2\pi, k2\pi)$;
- $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, rostoucí na $\left(-\pi + k2\pi, -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ a $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, klesající na $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi\right)$ a $\left(k2\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, lokální maxima $\left[-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, -1\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, lokální minima $\left[\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, 1\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $f''(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$, konvexní na $(k2\pi, \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, konkávní na $(-\pi + k2\pi, k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, inflexní body nemá;
- ABS: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ASS: nemá;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ neexistují, globální extrémy nemá, $H(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.



8. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ani sudá ani lichá, není periodická, P_x, P_y nemá, kladná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, klesající na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, lokální extrémy nemá;
- $f''(x) = \dfrac{2x+1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, konvexní na $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ a $(0, \infty)$, konkávní na $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$, inflexní bod $\left[-\dfrac{1}{2}, \mathrm{e}^{-2}\right]$;
- ABS: $x = 0$ zprava, ASS: $y = 1$ pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$;
- globální extrémy nemá, $H(f) = (0, \infty) \setminus \{1\}$.



6 Globální extrémy – slovní úlohy

Výsledky 6.1. Čtverec o straně $\sqrt{S}$.

Výsledky 6.2. $2r = v$, tj. výška rovna průměru podstavy

Výsledky 6.3. $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} r$

Výsledky 6.4. $V_{max} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} r^3$

Výsledky 6.5. Pro nejmenší se na čtverec použije $\frac{4a}{\pi+4}$ délky drátu, $S_{min} = \frac{a^2}{4(\pi+4)}$.

Pro největší se čtverec vůbec nevyrobí, $S_{max} = \frac{a^2}{4\pi}$.

Výsledky 6.6. Je-li vzdálenost města od kolmého průmětu ostrova na břeh větší než $2\sqrt{5}$ km, přistaneme právě $2\sqrt{5}$ km od tohoto kolmého průmětu směrem k městu. Je-li menší, přistaneme přímo ve městě.

Výsledky 6.7. $v(A,p) = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}$

Výsledky 6.8. Jde o obdélník s jedním vrcholem $[2,3]$ a stranami rovnoběžnými se souřadnými osami. Jeho rozměry jsou 4 j a 6 j, obsah 24 j^2.

Výsledky 6.9. Čtverce o straně 10 cm, objem krabice 18 l (18 000 cm^3).

Výsledky 6.10. 20 m strana přiléhající ke zdi, 10 m strana k ní kolmá.

Výsledky 6.11. $a = \frac{c}{20}$, $b = \frac{c}{12}$, $P = \frac{c^2}{48}$

Výsledky 6.12. Mj. s využitím stejnolehlosti dostaneme, že hledaný obdélník má mít stranu obsaženou v c délky $\frac{c}{2}$, druhou stranu délky poloviny výšky na stranu c, a jeho obsah je roven polovině obsahu trojúhelníka.

7 Neurčitý integrál 1

Výsledky 7.1.

1. $-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+c$
2. $2\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$
3. $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6x^6}+c$
4. $\ln|x-2|+c$
5. $-\frac{1}{3}\frac{1}{(3x+4)^2}+c$
6. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+c$
7. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$
8. $-x-2\ln|1-x|+c$
9. $x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+c$
10. $\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c$
11. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$
12. $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x\right)+c$
13. $-\frac{5}{2(x^2+3)}+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]+c$
14. $\frac{1}{48}\frac{3x-5}{[(3x-5)^2+4]^2}+\frac{1}{128}\frac{3x-5}{(3x-5)^2+4}+\frac{1}{256}\operatorname{arctg}\frac{3x-5}{2}+c$

Výsledky 7.2.

1. $\ln|\operatorname{tg}x|+c$
2. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$
3. $-\sqrt{1-x^2}+c$
4. $\cos\frac{1}{x}+c$
5. $\frac{1}{2}\ln\frac{|\sqrt{x^2+1}-1|}{|\sqrt{x^2+1}+1|}+c$
6. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$
7. $\ln(2+e^x)+c$
8. $\frac{\ln^3 x}{3}+c$
9. $\frac{2}{3\ln a}(1+a^x)\sqrt{1+a^x}+c$
10. $\frac{1}{2}\ln\left|\ln x^2\right|+c$
11. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+4}{x^2-4}\right|+c$

8 Neurčitý integrál 2

Výsledky 8.1.

1. $\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+c$
2. $-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+2x+1\right)+c$
3. $\frac{1-2x^2}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+c$
4. $\left(\frac{4}{25}\sin 4x+\frac{3}{25}\cos 4x\right)\mathrm{e}^{3x}+c$
5. $\frac{e^x}{x+1}+c$
6. $x(\ln x-1)+c$
7. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$
8. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$
9. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+c$
10. $-x-\operatorname{cotg} x\,[1+\ln(\sin x)]+c$

Výsledky 8.2.

1. $-\ln(1+\cos x)+c$
2. $-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+c$
3. $\frac{1}{2}\sin^2 x+2\sin x+3\ln(2-\sin x)+c$
4. $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right|+c$
5. $-\frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg} x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,(2\operatorname{tg} x-1)}{3}+c$
6. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+c$

Výsledky 8.3.

1. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+c$
2. $(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$
3. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+c$
4. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+c$
5. $2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+c$
6. $\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+c$
7. $-\frac{2}{5}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{5}{4}}-\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+c$

9 Určitý a nevlastní integrál

Výsledky 9.1.

1. $\dfrac{45}{4}$
2. $\dfrac{\pi}{6}$
3. $\dfrac{\pi}{3}$
4. $\dfrac{1}{2}\ln 3 - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$
5. $200\sqrt{2}$
6. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\mathrm{e}}{2}$
7. $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\dfrac{1}{6}$
9. $2 - \dfrac{\pi}{2}$
10. $a + b$

Výsledky 9.2.

1. $\dfrac{a^4\pi}{16}$
2. $\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3})$
3. $\dfrac{3}{2}\ln\left[(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)\right] - \dfrac{3}{5}\sqrt{3} + \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

Výsledky 9.3.

1. 0 – sinus na třetí má stejně jako sinus periodu 2π, přičemž na půlce periody nabývá kladných a na půlce stejných záporných hodnot, takže integrál ze sinu přes interval délky jedné periody, či jako tu dvou period, je nulový
2. 0 – jde o integrál z liché spojité (jmenovatel nemá reálný kořen) funkce přes symetrický interval
3. 0 – jde o integrál z liché spojité funkce přes symetrický interval

Výsledky 9.4.

1. $\dfrac{1}{a}$
2. $\dfrac{1}{\alpha - 1}$ pro $\alpha > 1$, ∞ pro $\alpha \leq 1$
3. ∞
4. $\dfrac{1}{1-\alpha}$ pro $\alpha < 1$, ∞ pro $\alpha \geq 1$
5. -1
6. π
7. π
8. $\dfrac{4}{3}\ln 2$
9. integrál osciluje
10. 2
11. -1
12. $\dfrac{9}{2}$

10 Aplikace integrálního počtu

Výsledky 10.1.

1. $\frac{9}{2}$ 2. $\frac{\pi}{2}\,(\cdot\infty=\infty)$ 3. $9{,}9-8{,}1\log \mathrm{e}$ 4. $2-\frac{1}{\ln 2}$

Výsledky 10.2.

1. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ 2. $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$

Výsledky 10.3. $S=3\pi a^2,\ l=8a$

Výsledky 10.4. $S=\pi r^2,\ o=2\pi r$

Výsledky 10.5. $o=6a,\ S=\frac{3}{8}\pi a^2$

Výsledky 10.6.

1. $\frac{3}{7}\pi ab^2$ 2. (a) $\frac{16}{15}\pi$ (b) $\frac{8}{3}\pi$ 3. (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 2π

Výsledky 10.7.

1. $V=\frac{1}{3}\pi r^3 v,\ S_{pl}=\pi r\sqrt{r^2+v^2}$
2. $V=\frac{4}{3}\pi r^3,\ S_{pl}=4\pi r^2$
3. $V=2\pi^2 Rr^2,\ S_{pl}=4\pi^2 rR$

11 Nekonečné řady

Výsledky 11.1.

1. $x \in (0,1)$, $s(x) = \dfrac{1}{2x} - 1$
2. $x \in \emptyset$, tedy vždy diverguje
3. $x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1,1 \rangle$, $s(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
4. $x \in (0{,}01; 0{,}1)$, $s(x) = -\dfrac{2\log x + 3}{2\log x + 2}$
5. $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $s(x) = \dfrac{2\sin x}{1 - 2\sin x}$

Výsledky 11.2.

1. $K = \left\{\dfrac{3}{10}\right\}$
2. $K = \emptyset$
3. $K = \left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}\right\}$
4. $K = \{\mathrm{e}\}$
5. $K = \left\{\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, \dfrac{11\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Výsledky 11.3.

1. 1
2. $\dfrac{11}{18}$
3. $\dfrac{23}{90}$
4. $\dfrac{3}{2}$
5. $\dfrac{14}{15}$
6. $\sqrt{4} - \sqrt{6}$

Výsledky 11.4.

1. určitě diverguje k $+\infty$, nutná podmínka konvergence
2. určitě diverguje k $+\infty$, nutná podmínka konvergence
3. určitě diverguje k $+\infty$, nutná podmínka konvergence
4. určitě diverguje k $+\infty$, nutná podmínka konvergence
5. konverguje, odmocninové kritérium
6. konverguje, odmocninové kritérium
7. určitě diverguje k $+\infty$, podílové, či lépe odmocninové kritérium
8. konverguje, podílové, či lépe odmocninové kritérium
9. konverguje, podílové, či lépe odmocninové kritérium
10. konverguje, podílové kritérium
11. konverguje, integrální kritérium
12. konverguje pro $\alpha > 1$, určitě diverguje k $+\infty$ pro $\alpha \leq 1$, integrální kritérium
13. konverguje, srovnávací kritérium s $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$
14. určitě diverguje k $+\infty$, srovnávací kritérium s $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$
15. určitě diverguje k $+\infty$, integrální kritérium

Výsledky 11.5. S využitím Leibnizova kritéria.

1. konverguje absolutně, integrální kritérium
2. konverguje relativně, integrální kritérium
3. osciluje, nutná podmínka konvergence
4. konverguje absolutně, odmocninové kritérium
5. konverguje relativně, srovnávací kritérium s $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
6. konverguje absolutně, odmocninové kritérium
7. konverguje absolutně, podílové, či lépe odmocninové kritérium

12 Mocninné řady

Výsledky 12.1.

1. $OK = \langle -1, 1), OAK = (-1, 1)$
2. $OK = OAK = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$
3. $OK = OAK = \mathbb{R}$
4. $OK = (-3, -1\rangle, OAK = (-3, -1)$
5. $OK = OAK = (-1, 1)$
6. $OK = OAK = (-4, 4)$
7. $OK = OAK = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
8. $OK = OAK = \mathbb{R}$

Výsledky 12.2. $s(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = s\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

Výsledky 12.3. $s(x) = -\ln|1-x|$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = s\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$

Výsledky 12.4.

1. $s(x) = \dfrac{2x}{(1-x)^3}, r = 1$
2. $s(x) = \dfrac{3x - x^2}{(1-x)^3}, r = 1$
3. $s(x) = -\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4. $s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x, r = 1$

Výsledky 12.5. $f(x) = T(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x+2) - \dfrac{1}{8}(x+2)^2 - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}(x+2)^n$ pro $x \in (-4, 0)$.

Výsledky 12.6. $\ln(1+x) = M(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ pro $x \in (-1, 1\rangle$,

$\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = M(1) = \ln 2$

Výsledky 12.7. $e^{x^2}(2x^2 + 1)$

Výsledky 12.8.

1. $\dfrac{1}{4}\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}\ln(1-x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$
2. $\dfrac{1}{4}\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}\ln(1-x) + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$