$\boxed{\text{6. cvičení}}$

$\boxed{1}$ příklad s dodávkou projíždějící 4 křižovatky

$$EX = \sum_{x=0}^{4} x \cdot p(x) = 0{,}9375 \qquad \dots \text{ sum}(X*p)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{4} x^2 \cdot p(x) = 2{,}3125 \qquad \dots \text{ sum}(X\hat{}2*p)$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 2{,}3125 - 0{,}9375^2 \doteq 1{,}434$$

$$\sigma_X = \sqrt{DX} \doteq 1{,}197 \qquad \dots \text{ sqrt}(\text{sum}(X\hat{}2*p) - (\text{sum}(X*p))\hat{}2)$$

Kvantily:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x} = x_{0,5} &= \inf\{x;\ F(x) \geq 0{,}5\} = 0 \\ x_{0,25} &= \inf\{x;\ F(x) \geq 0{,}25\} = 0 \\ x_{0,75} &= \inf\{x;\ F(x) \geq 0{,}75\} = 1 \\ IQR &= x_{0,75} - x_{0,25} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}\right\}$$

z tabulky $F(x)$, příp. z grafu $F(x)$

$\boxed{2}$ příklad s tramvají a hustotou tvaru trojúhelníka

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{10} x \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{x}{50}\right) dx = \int_0^{10} \left(\frac{x}{5} - \frac{x^2}{50}\right) dx = \left[\frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{150}\right]_0^{10} =$$

$$= \frac{100}{10} - \frac{1000}{150} \doteq 3{,}333$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^{10} \left(\frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{50}\right) dx = \left[\frac{x^3}{15} - \frac{x^4}{200}\right]_0^{10} \doteq 16{,}667$$

$DX = E(X^2) - (EX)^2 \doteq 5,556$

$\sigma_X = \sqrt{DX} \doteq 2,357$

$\tilde{x} = F^{-1}(0,5) = 2,929$

$x_{0,25} = F^{-1}(0,25) = 1,340$

$x_{0,75} = F^{-1}(0,75) = 5$

$IQR = x_{0,75} - x_{0,25} = 3,66$

Možné řešení (obecně):

$$\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} = p$$

$$x^2 - 20x + 100p = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(20 \pm 20\cdot\sqrt{1-p}\right)$$

Vždy dá 2 řešení, ale jedno leží mimo interval $[0;10)$.

V R:
- polyroot(c(1, -20, 50))
- polyroot(c(1, -20, 25))
- polyroot(c(1, -20, 75))

$\boxed{3}$ příklad s 3 body v rovině

$EX = (-1)\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0$

$E(X^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{3} + 0^2\cdot\frac{1}{3} + 1^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow DX = \frac{2}{3} - 0^2 = \frac{2}{3}$

$EY = 0\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$E(Y^2) = 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow DY = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$$E(X.Y) = \sum_{x=-1}^{1}\sum_{y=0}^{1} x.y.\,p(x,y) = (-1).0.\frac{1}{3} + 0.1.\frac{1}{3} + 1.0.\frac{1}{3} = 0$$

$C(X,Y) = E(X.Y) - EX.EY = 0 - 0\cdot\frac{1}{3} = 0$

$$\underline{R(X,Y)} = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{DX}\,\sqrt{DY}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{9}}} = \underline{0}$$

Korelace je sice nulová, ale již víme, že X a Y nejsou nezávislé!

$\boxed{4}$ příklad s 10 výrobky : nekvalitní + kvalitní I. + kvalitní II. jakosti

$\underline{EX = 1{,}6}$ $\quad E(X^2) \doteq 2{,}844$ $\quad \underline{DX \doteq 0{,}284}$

$\underline{EY = 1}$ $\quad E(Y^2) \doteq 1{,}444$ $\quad \underline{DY \doteq 0{,}444}$

$$\underline{E(X.Y)} = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} x.y.p(x,y) = 1.1.\frac{6}{45} + 2.1.\frac{15}{45} + 2.2.\frac{\binom{5}{2}}{45} =$$

$$= \frac{76}{45} \doteq \underline{1{,}689}$$

$$\underline{C(X,Y)} = E(X.Y) - EX.EY = 1{,}689 - 1{,}6.1 = \underline{0{,}089}$$

$$\underline{R(X,Y)} = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{DX}.\sqrt{DY}} = \underline{0{,}25}$$

Korelační koeficient vyšel 0,25, tzn. slabá lin. závislost mezi X a Y.

$$\left.\begin{aligned} \underline{\tilde{x}} &= \inf\{x;\ F_X(x) \geq 0{,}5\} = \underline{2} \\ \underline{\tilde{y}} &= \inf\{y;\ F_Y(y) \geq 0{,}5\} = \underline{1} \end{aligned}\right\} \text{mediány}$$

(porovnejte s EX, EY).

$\boxed{5}$ příklad s volbou bodu nad hl. diagonálou čtverce

$$\underline{EX} = \int_0^{10} x . f_X(x)\, dx = \int_0^{10} \left(\frac{x}{5} - \frac{x^2}{50}\right) dx = \left[\frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{150}\right]_0^{10} \doteq \underline{3{,}333}$$

$$E(X^2) = \int_0^{10} x^2 . f_X(x)\, dx = \int_0^{10} \left[\frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{50}\right] dx = \left[\frac{x^3}{15} - \frac{x^4}{200}\right]_0^{10} \doteq 16{,}667$$

$$\underline{DX \doteq 5{,}556}$$

$$\underline{EY} = \int_0^{10} y . f_Y(y)\, dy = \int_0^{10} \frac{y^2}{50} dy = \left[\frac{y^3}{150}\right]_0^{10} \doteq \underline{6{,}667}$$

$$E(Y^2) = \int_0^{10} y^2 . f_Y(y)\, dy = \int_0^{10} \frac{y^3}{50} dy = \left(\frac{y^4}{200}\right]_0^{10} = 50$$

$$\underline{DY \doteq 5{,}556}$$

(Všimněte si, že vyšly stejné rozptyly. Rozdělení psti X a Y jsou totiž v jistém smyslu jen otočená, ale mají stejný rozptyl.)

$$\underline{E(X.Y)} = \int_0^{10} \left(\int_x^{10} x . y . f(x,y)\, dy\right) dx = \int_0^{10} \left(\int_x^{10} x . y . \frac{1}{50}\, dy\right) dx =$$

$$= \int_0^{10} x . \left(\int_x^{10} \frac{y}{50}\, dy\right) dx = \int_0^{10} x . \left[\frac{y^2}{100}\right]_x^{10} dx = \int_0^{10} x . \left(\frac{100}{100} - \frac{x^2}{100}\right) dx =$$

$$= \int_0^{10} \left(x - \frac{x^3}{100}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{400}\right]_0^{10} = \underline{25}$$

Všimněte si, že $E(X.Y) \neq EX . EY$, neboť, jak již víme, X a Y nejsou nezávislé!

$$\underline{C(X,Y)} = E(X.Y) - EX . EY = 25 - 22{,}222 \doteq \underline{2{,}778}$$

$$\underline{R(X,Y)} = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{DX} . \sqrt{DY}} \doteq \frac{2{,}778}{5{,}556} = \underline{\frac{1}{2}}$$

6 Bankéř chystá novou loterii, v níž se losují 3 čísla z 21 (bez vracení). Loterie má být férová, tzn. cena tiketu se má rovnat střední hodnotě výhry na 1 tiket. Cena tiketu byla stanovena na 20 Kč.

Za uhodnutí všech 3 čísel se vyplácí výhra 20 000 Kč, za uhodnutí jen 2 čísel ze 3 se vyplácí výhra W Kč, jinak není výhra.

Kolik musí být rovna částka W ?

Označíme: X = náhodná výhra na 1 tiket

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{21}{3}} = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{21}{3}}, & x = 20000, \\[2ex] \dfrac{\binom{3}{2}\cdot\binom{18}{1}}{\binom{21}{3}} = \dfrac{54}{\binom{21}{3}}, & x = W, \\[2ex] 1 - \dfrac{55}{\binom{21}{3}}, & x = 0. \end{cases}$$

Počítáme: $EX = 20\,000 \cdot \dfrac{1}{\binom{21}{3}} + W \cdot \dfrac{54}{\binom{21}{3}} + 0$,

zároveň má být $EX = 20$, tzn. vyjádříme W :

$$\underline{W} = \frac{\binom{21}{3}}{54} \cdot \left[20 - 20000 \cdot \frac{1}{\binom{21}{3}} \right] = \frac{1100}{9} \doteq \underline{122{,}22 \text{ Kč}}.$$

7 Při výrobě LCD monitorů v továrně je 90% vyrobených monitorů v pořádku (nemá žádné vadné pixely). Odhadněte pst., že mezi 2000 vyrobenými LCD bude 1750 až 1850 v pořádku.

Řešení: X = počet LCD v pořádku

$$X \sim Bi\,(n = 2000\ ;\ \theta = 0{,}9)$$

$$\underline{EX} = n \cdot \theta = \underline{1800}$$

$$\underline{DX} = n \cdot \theta \cdot (1-\theta) = \underline{180}$$

Čebyševova nerovnost:

$$P(1750 < X < 1850) = P(-50 < (X-1800) < 50) =$$

$$= P(\underbrace{|X-1800|}_{|X-EX|} < 50) = 1 - \underbrace{P(|X-EX| \geq \underset{\varepsilon}{50})}_{\leq \frac{DX}{50^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{DX}{50^2} = 1 - \frac{180}{2500} \doteq 0{,}93,$$ tzn. hledaná pst. je větší než 93 %.