CVIČENÍ 2

$\boxed{1}$ Ω = množina posloupností délky n, každý člen je Rub/Líc.

$$\left.\begin{array}{l} |\Omega| = 2^n \\ |A| = 1 \end{array}\right\} P(A) = \frac{1}{2^n}$$

B_k : na k místech Líc, na zbylých $(n-k)$ místech Rub

$$|B_k| = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow P(B_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$\boxed{2}$ Permutace s opakováním, Ω = množina všech přesmyček,

A = ~~je~~ slovo "MATEMATIKA".

$$|\Omega| = \frac{10!}{3!\,2!\,2!}, \quad |A| = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\frac{10!}{3!2!2!}} \doteq 6{,}61 \cdot 10^{-6}.$$

$\boxed{3}$ $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : a_{1,2,3} = 1, 2, \dots, 365\}$

A = {takové trojice uspořádané, že jsou v ní 3 různá čísla}

$$|\Omega| = 365^3$$

$$|A| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{364 \cdot 363}{365^2} \doteq 0{,}9918$$

$\boxed{4}$ Ω = množina všech různých neuspořádaných čtveric z čísel od 1 do 100, bez opakování.

$$|\Omega| = \binom{100}{4}$$

A = vybrán byl 1 z 5 vadných a 3 z 95 dobrých monitorů

$$|A| = \binom{95}{3} \cdot \binom{5}{1} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{95}{3} \cdot 5}{\binom{100}{4}} = 0{,}1765$$

$\overline{B}$ = vybrány 4 dobré z 95 dobrých $\Rightarrow |\overline{B}| = \binom{95}{4}$

Opačný jev $\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \binom{95}{4} / \binom{100}{4} = 1 - 0{,}8119 = 0{,}1881$

$C = A \cup \bar{B}$, přitom $A \cap \bar{B} = \emptyset$ (neslučitelné jevy)

$$\Rightarrow |C| = |A| + |\bar{B}| = \binom{95}{4} + \binom{95}{3} \cdot 5 \Rightarrow \underline{P(C)} =$$

$$= \frac{\binom{95}{4} + \binom{95}{3} \cdot 5}{\binom{100}{4}} \doteq \underline{\underline{0{,}9884}}$$

Anebo přímým výpočtem psti:

$$\underline{\underline{P(C)}} = P(A) + P(\bar{B}) \doteq 0{,}1765 + 0{,}8119 = \underline{\underline{0{,}9884}}.$$

$\boxed{5}$ A = selže hasicí systém, B = selže poplachové zařízení:

$P(A) = 0{,}20$

$P(B) = 0{,}10$

$P(A \cap B) = 0{,}04$

- $C_1 = A \cup B \Rightarrow \underline{\underline{P(C_1)}} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}1 - 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}26}}.$

- $C_2 = \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}} = \overline{A \cup B}$, použijeme DeMorganovo pravidlo, tzn.

$$\underline{\underline{P(C_2)}} = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\underbrace{A \cup B}_{C_1}) = 1 - P(C_1) = 1 - 0{,}26 = \underline{\underline{0{,}74}}.$$

- $C_3 = \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}} = \overline{A \cap B}$, tzn.

$$\Rightarrow \underline{\underline{P(C_3)}} = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}96}}$$

Anebo pomocí vlastností psti: $\underline{\underline{P(C_3)}} = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) -$

$- P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [1 - P(A)] + [1 - P(B)] - P(C_2) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}74 = \underline{\underline{0{,}96}}.$

$\boxed{6}$ Viz R-skript, zde jen A_6, A_7 = padne součet 6/7:

Vypíšeme si všechny možnosti na 1. a na 2. kostce, uvažujeme rozlišitelné kostky, protože se snadněji hlídají příznivé případy.

A_6: 1+5 (2x)
2+4 (2x)
3+3 (1x)
(5x)

A_7: 1+6 (2x)
2+5 (2x)
3+4 (2x)
(6x)

$|\Omega| = 6^2 = 36$

$P(A_6) = \frac{5}{36} \doteq 0{,}1389$, $P(A_7) = \frac{6}{36} \doteq 0{,}1667$, součet 7 častější.

$\boxed{7}$ Viz R-skript, zde jen to, co lze i ručně:

$|\Omega| = 6^3 = 216$

- $|C| = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{216} \doteq 0{,}0046.$

- $|D| = |3\times\text{"6"}| + |2\times\text{"6" a } 1\times \text{NE"6"}| =$
$= 1 + \binom{3}{2}\cdot 5 = 1 + 3.5 = 16 \Rightarrow P(D) = \frac{16}{216} \doteq 0{,}0741.$

- $|E| = |\text{na každé kostce 3 možnosti}| = 3^3 = 27$
$\Rightarrow P(E) = \frac{3^3}{6^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125.$
Jiná úvaha: na každé kostce je pst $\frac{1}{2}$, 3 nezávislé kostky $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

- $|F| = 3! \Rightarrow P(F) = \frac{3!}{6^3} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} \doteq 0{,}0278.$

$\boxed{8}$ (a) Ω = množina uspořádaných dvojic (a,b), kde pro a i b je 32 možností.
A = první jakákoliv, druhá musí mít stejnou barvu jako první.

$$\left.\begin{array}{l} |\Omega| = 32.32 \\ |A| = 32.8 \end{array}\right\} P(A) = \frac{32.8}{32.32} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

(b) Ω = množina jako v (a), ale navíc $a \neq b \Rightarrow |\Omega| = 32.31$.
B = 1 ze 4 es, následně 1 ze 3 zbylých es $\Rightarrow |B| = 4.3$.
$P(B) = \frac{4.3}{32.31} = 0{,}012$

Jiná úvaha u (6): $|\Omega|$ = počet výběrů 2 karet ze 32,

$|B|$ = počet výběrů 2 es ze 4 es,

$|\Omega| = \binom{32}{2}$, $|B| = \binom{4}{2}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{P(B)}} = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{32!}{2!\,30!}} = \dfrac{4.3}{32.31} = \underline{\underline{0{,}012.}}$

$\boxed{9}$ Pro samostatné řešení studentů:

$P(A) = \dfrac{1}{6^6} = 2{,}1 \,.\, 10^{-5}$

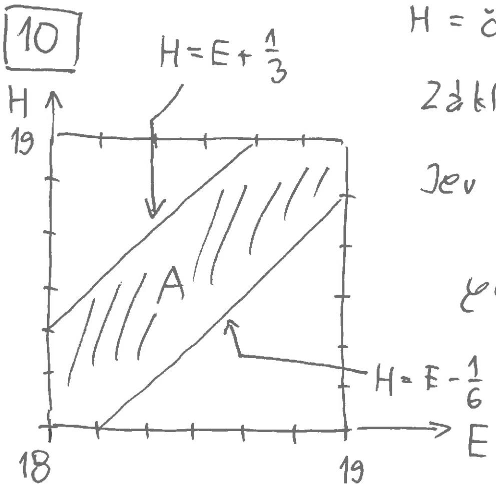
$P(B) = \dfrac{\binom{6}{2}.5.5}{6^6} \doteq 8{,}04 \,.\, 10^{-3}$

$P(C) = \dfrac{1}{6^6} + \dfrac{6.5}{6^6} + \dfrac{\binom{6}{2}.5.5}{6^6} \doteq 8{,}7 \,.\, 10^{-3}$

$P(D) = \dfrac{3^6}{6^6} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \doteq 1{,}56 \,.\, 10^{-2}$

$P(E) = \dfrac{6!}{6^6} \doteq 1{,}54 \,.\, 10^{-2}$

10



H = čas příchodu Honzy, E = Evy : $18 \le E \le 19$, $18 \le H \le 19$.

Základní prostor: Ω = čtverec 1×1, $\mu(\Omega) = 1$.

Jev A : $E - \frac{1}{6} \le H \le E + \frac{1}{3}$

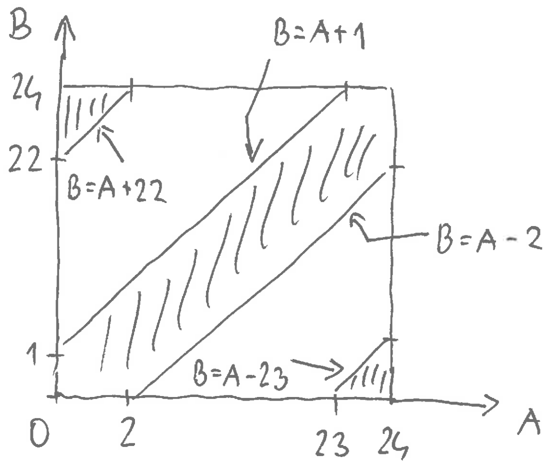
$$\mu(A) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{25}{72} - \frac{4}{18} \doteq 0{,}431$$

$$\underline{P(A)} = \frac{\mu(A)}{\mu(\cancel{B}\Omega)} \doteq \underline{0{,}431}$$

11 A = čas příjezdu kamionu 1, B = kamionu 2 : $0 \le A \le 24$, $0 \le B \le 24$.

Zákl. prostor : Ω = čtverec 24×24, $\mu(\Omega) = 24^2 = 576$.

Jev C : $(A - 2 \le B \le A + 1) \vee (B \le A - 23) \vee (A + 22 \le B)$



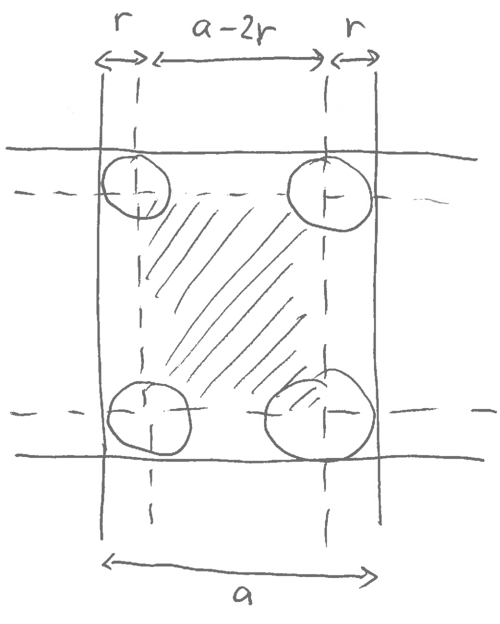
$$\mu(C) = 24^2 - \frac{1}{2}\cdot 22^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 23^2 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 =$$

$$= 72$$

$$\underline{P(C)} = \frac{\mu(C)}{\mu(\Omega)} = \frac{72}{576} = \underline{\frac{1}{8}}$$

Pozn. podstatné v zadání je, že kamiony přijíždí <u>KAŽDÝ</u> den.

12 $a = 10$ = šířka čtvercových ok sítě, $r = 2$ = poloměr míčku.



Ω = čtverec o straně a,

A = čtverec o straně $(a - 2r)$.

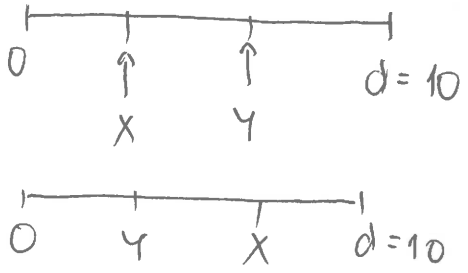
$\mu(\Omega) = a^2 = 10^2 = 100$.

$\mu(A) = (a - 2r)^2 = 6^2 = 36$.

$$\underline{P(A)} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{36}{100} = \underline{0{,}36}.$$

Vhodný popis je pomocí souřadnic $[S_x, S_y]$ středu míčku vzhledem k oku sítě.

$\boxed{13}$



Volíme náhodně polohu 2 řezů na úsečce délky $d = 10$, označme je x, y.
Ty úsečku rozdělí na 3 části, u nichž kontrolujeme trojúhelníkovou nerovnost.

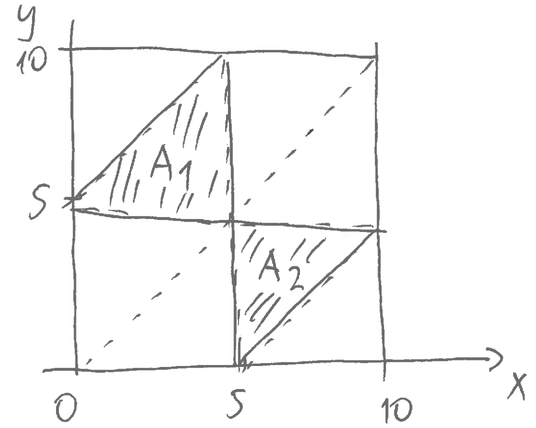
$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le d \\ 0 \le y \le d \end{array}\right\}$$ Možnosti jsou 2:

(1) $\underline{x \le y}$: 3 části mají délky x, $y-x$, $d-y$:

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta\text{-nerovnosti: } x+(y-x) > d-y & \Rightarrow & y > d/2 \\ y-x+d-y > x & \Rightarrow & x < d/2 \\ x+d-y > y-x & \Rightarrow & y < x + d/2 \end{array}\right\} A_1$$

(2) $\underline{y < x}$: 3 části mají délky y, $x-y$, $d-x$:

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta\text{-nerovnosti: } y+(x-y) > d-x & \Rightarrow & x > d/2 \\ x-y+d-x > y & \Rightarrow & y < d/2 \\ y+d-x > x-y & \Rightarrow & y > x - d/2 \end{array}\right\} A_2$$



$$\mu(\Omega) = d^2 = 10^2 = 100$$

$$\mu(A_1) = \mu(A_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$A = A_1 \cup A_2, \quad \mu(A) = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 25$$

$$\underline{\underline{P(A)}} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{25}{100} = \underline{\underline{0{,}25}}$$