CVIČENÍ 1

Obsah: - formální požadavky na cvičení - viz Osnova v ISu.
- seznámení s R a RStudiem - ukázat, jak vypadá, znovu upozornit, že od 2. cvičení budeme R potřebovat, ať mají do dvojice notebooky s R, a ať si už na 2. cvičení nainstalují v R knihovnu prob.
- příklady na zopakování kombinatoriky - nejde o vzorce, ale aby na výsledek dokázali logicky přijít pomocí faktoriálu, komb. čísla a sčítání/násobení možností.

Řešení příkladů:

$\boxed{1}$ (a) Násobíme snižující se počty míst v programu, vede to faktoriál
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

(b) V programu je buď A před B, nebo A po B, obě situace jsou rovnocenné $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 120 = 60$ možností.

(c) Trik s vytvořením pevné skupiny: [AB], C, D, E
$\Rightarrow 4! = 24$

$\boxed{2}$ (a) Každou kostku zvlášť $\Rightarrow$ 6 možností, kostky jsou nezávislé a rozlišitelné $\Rightarrow$ násobíme: $6 \cdot 6 = 36$

(b) Nyní nedokážeme kostky rozlišit, nelze přímo využít nezávislost, rozdělíme na disjunktní možnosti a počty posčítáme:

$$\left.\begin{array}{ll} 6 + x & \ldots 6 \text{ možností pro } x \\ 5 + x & \ldots 5 \\ 4 + x & \ldots 4 \\ 3 + x & \ldots 3 \\ 2 + x & \ldots 2 \\ 1 + x & \ldots 1 \end{array}\right\} 6 + \cdots + 1 = \frac{6(6+1)}{2} = 21$$

$\boxed{3}$ Rozlišitelní lidé, rozlišitelné pozice (místa ředitelů):

$7\cdot 6\cdot 5 = 210$

Jiný způsob: nejdřív vyberu vítěznou trojici lidí a těm pak ve 2. kole přiřadíme ředitelská místa:

$$\binom{7}{3}\cdot 3! = \frac{7!}{4!\,3!}\cdot 3! = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$$

$\boxed{4}$ Kódujeme prvky množiny: 1 = patří do podmnožiny, 0 = nepatří.
Máme 2 možnosti pro každý prvek, jsou nezávislé ⇒ násobíme:

$\underbrace{2\cdot\ldots\cdot 2}_{n\text{-krát}} = 2^n$ .. (souvislost s binárním zápisem)

Jiný způsob: spočítat všechny 0, 1, 2-prvkové, atd., až n-prvkové podmnožiny a sečíst je podle binomické věty:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

$\boxed{5}$ Výběry v menu jsou nezávislé ⇒ násobíme: $3\cdot 8\cdot 4\cdot 5 = 480$

$\boxed{6}$ (a) Každý s každým, tzn. hledáme počet všech dvojic: $\binom{5}{2} = 10$.

(b) Dvojice v baru se (zatím) neloučí, takže nebude 1 stisk rukou.
Od výsledku (a) odečteme tento počet: $\binom{5}{2} - 1 = 9$.

$\boxed{7}$ Trik s kódováním na předměty (•) a přihrádky a stěny (|).
Mezi n objektů (tzn. oddělených $n-1$ stěnami) rozdělujeme k nerozlišitelných předmětů. Máme $(n-1)$ stěn a k předmětů, počet možností je $\binom{(n-1)+k}{n-1} = \binom{(n-1)+k}{k}$.

(a) $n=7 \Rightarrow n-1=6,\ k=5 \Rightarrow \binom{11}{6} = \binom{11}{5} = 462$.

Např. kód: • ||| • • • || • | znamená, že 1. dítě má 1 míč, 4. 3 míče, 6. 1 míč, ostatní nic.

(b) Omezení na max. 1 míč ~~omezuje~~ zamezuje opakovanému vozdělování míče stejnému dítěti. ~~Řešíme podobně jako příklad $\boxed{3}$~~:

~~$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{2!} = 2520$.~~ $\binom{7}{5} = 21$.

$\boxed{8}$ (a) Jako kódování podmnožiny v příkladu $\boxed{4}$: $2^8 = 256$.

...(souvislost s binárním zápisem : 1B = 8 bitů = max. 256 čísel, od 0 do 255)

(b) První 3 pozice zafixujeme, zbylé jsou nezávislé, máme 2 situace:

$$\left.\begin{array}{ll} 101\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ & \Rightarrow 2^5 \text{ možností} \\ 100\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_ & \Rightarrow 2^5 \text{ možností} \end{array}\right\} \text{disjunktní} \Rightarrow \text{sčítáme:}$$

$32 + 32 = 64$.

$\boxed{9}$ (a) Klasická permutace: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

(b) Jako (a), ale máme 2x A, které od sebe nedokážeme rozlišit, počet přesmyček 5! tedy musíme 2! vydělit:

$\frac{5!}{2!} = 60$ ... (souvislost s $\boxed{1}$ (b))

(c) Analogicky: 1x M, 4x I, 4x S, 2x P ... celkem 11 znaků:

$$\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = \frac{11!}{4!\,4!\,2!} = 34\,650.$$

(d) Spočítáme ta, kde je skupina [IIII] (viz $\boxed{1}$ (a)) a pak odečteme od předchozího výsledku:

1x M, 1x [IIII], 4x S, 2x P .... celkem 8 znaků:

$$\frac{8!}{4!\,2!} = 840, \quad 34\,650 - 840 = 33\,810.$$

$\boxed{10}$ (a) Svádí to k permutaci 5!, ale tady nechceme řetězec délky 5, ale 5ciferné číslo, tzn. nesmí být 0 na začátku:

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96 \text{ možností}, \text{ anebo } 5! - 4! = 96.$$

(b) Musí končit 4 nebo 0, a stále nesmí být 0 na začátku:

$$\left.\begin{array}{l} \_\,\_\,\_\,\_\,4 \quad \dots \quad 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18 \text{ možností} \\ \_\,\_\,\_\,\_\,0 \quad \dots \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ možností} \end{array}\right\} \text{ disjunktní} \Rightarrow \text{ sčítáme:}$$

$$18 + 24 = 42.$$

$\boxed{11}$ (a) 4 dětem – rozlišitelným – rozdělujeme 10 modrých – nerozlišitelných – míčů. Použijeme přihrádkové kódování z příkladu $\boxed{7}$, zvlášť pro každou barvu, pak výsledky vynásobíme, neboť rozdělování míčů různých barev je vzájemně nezávislé:

$$\binom{3+10}{3} \cdot \binom{3+15}{3} \cdot \binom{3+8}{3} = 38\,507\,040.$$

(b) Omezení řešíme prakticky: nejdřív každému dítěti dáme 1 míč od každé barvy, čímž podmínku splníme. Zbylé míče (6 modrých, 11 červených, 4 zelené) rozdělujeme jako v (a):

$$\binom{6+3}{3} \cdot \binom{11+3}{3} \cdot \binom{4+3}{3} = 1\,070\,160.$$