

Cvičení MV011 Statistika I

4. Náhodná veličina a rozdělení pravděpodobnosti

Monika Kroupová, Ondřej Pokora, Petra Ráboňová

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

jaro 2017



Náhodná veličina

Náhodná veličina je zobrazení $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, každému elementárnímu jevu (výsledku pokusu) přiřazuje nějaké reálné číslo. Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X – tzv. **rozdělení pravděpodobnosti** – je popsáno níže uvedenými funkcemi. Rozlišujeme přitom dvě typické skupiny:

X diskrétní – nabývá hodnot z nejvýše spočetné množiny $M \subset \mathbb{R}$	X spojitá – nabývá hodnot z nespočetné množiny
pravděpodobnostní funkce	hustota pravděpodobnosti $f(x) = F'(x)$
$p(x) = \begin{cases} P(X = x), & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$	$P(X \in \text{interval od } a \text{ do } b) = \int_a^b f(u) \, du$
distribuční funkce je zprava spojitá	distribuční funkce je spojitá
$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} p(u)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) \, du$

funkce pro práci s náhodnými veličinami:

- `dzkratka` – pravděpodobnostní funkce, resp. hustota pravděpodobnosti
- `pzkratka` – distribuční funkce
- `qzkratka` – kvantilová funkce
- `rzkratka` – generování vzorku z daného rozdělení pravděpodobnosti

zkratky některých rozdělení pravděpodobnosti:

- `binom` – binomické $Bi(n, \theta)$ (alternativní $A(\theta)$ – speciální případ $n = 1$)
- `geom` – geometrické $Ge(\theta)$
- `pois` – Poissonovo $Po(\lambda)$
- `unif` – rovnoměrné spojité $Ro(a, b)$
- `exp` – exponenciální $Ex(\lambda)$
- `norm` – normální (Gaussovo) $N(\mu, \sigma^2)$
- `gamma` – $Gamma(\mu, a)$
- `beta` – $Beta(a, b)$

V následujících příkladech určete a graficky znázorníte rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin. Zkoumejte pravděpodobnostní funkci, resp. hustotu, distribuční funkci a význam parametrů.

Příklad 1

Náhodná veličina X udává, kolikrát padl líc, když $10\times$ házíme mincí.

(A) $P(X = 5) = ?$, (B) $P(X \leq 5) = ?$, (C) $P(X > 6) = ?$, (D) $P(X \text{ je liché}) = ?$

Příklad 2

Náhodná veličina X udává, kolikrát padla "6" když $20\times$ házíme kostkou.

(A) $P(X = 5) = ?$, (B) $P(X < 5) = ?$, (C) $P(X \geq 6) = ?$, (D) $P(X \text{ je liché}) = ?$

Příklad 3

Máme 5 karet s čísly od 2 do 6. V každém kole hry si náhodně jednu kartu vybereme. Pokud je na ní liché číslo, hra končí. Pokud je číslo sudé, kartu vrátíme, balíček zamícháme a hrajeme další kolo. Náhodná veličina X udává, kolik kol odehrajeme předtím, než vytáhneme kartu s lichým číslem.

(A) $P(X \leq 10) = ?$, (B) $P(X \geq 4) = ?$, (C) $P(5 \leq X \leq 8) = ?$

Příklad 4

Výpadek napájecího zdroje serveru nastává průměrně $1 \times$ za týden. Náhodná veličina X udává počet výpadků v období 2. – 29. března.

- (A) $P(\text{výpadek nenastane}) = ?$, (B) $P(\text{nastanou nejvýše 4 výpadky}) = ?$,
(C) $P(\text{nastane alespoň 1 výpadek}) = ?$, (D) $P(\text{nastane 2–6 výpadků}) = ?$

Příklad 5

Údaje o ceně akcií na Burze Cenných Papírů Praha jsou na webové stránce aktualizovány každých 10 minut. Náhodná veličina X popisuje dobu, jakou bude muset uživatel čekat než budou ceny uvedené na stránce aktualizovány, když se na webovou stránku podívá v náhodném okamžiku.

- (A) $P(2 \text{ minuty}) = ?$, (B) $P(\text{nejvýše 5 minut}) = ?$, (C) $P(\text{alespoň 2 minuty}) = ?$,
(D) $P(3 \text{ až } 8 \text{ minut}) = ?$

Příklad 6

Okamžiky příchodů požadavků zobrazení webové stránky na web server jsou náhodné a mají charakter řídkých jevů s průměrným počtem 4 požadavků za minutu. Náhodná veličina X popisuje dobu mezi příchody dvou po sobě následujících požadavků.

(A) $P(X < 15 \text{ s}) = ?$, (B) $P(30 \text{ s} \leq X \leq 90 \text{ s}) = ?$,

Příklad 7

Náhodná veličina X udává teplotu procesoru bez zátěže. Předpokládejte, že naměřená hodnota má normální rozdělení s parametry $\mu = 40^\circ\text{C}$, $\sigma = 4^\circ\text{C}$. Výpočty proveďte také pomocí standardizace.

(A) $P(X \leq 50) = ?$, (B) $P(X > 35) = ?$, (C) $P(35 < X < 45) = ?$,
(D) $P(\mu - 1,96\sigma < X < \mu + 1,96\sigma) = ?$

Příklad 8

Vykreslete grafy hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce Gamma rozdělení rozdělení pro různé hodnoty jejich parametrů.

Výsledky

1. 0,246; 0,623; 0,172; 0,5
2. 0,129; 0,769; 0,102; 0,5
3. 0,996; 0,130; 0,068
4. 0,018; 0,629; 0,982; 0,798
5. 0; 0,5; 0,8; 0,5
6. 0,632; 0,133
7. 0,994; 0,894; 0,789; 0,95