5. cvičení – řešení

1 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ... diskrétní n. veličina $\Rightarrow$ určíme $p(x)$.

(Pozn. Není to $Ge(\frac{1}{2})$ rozdělení psti.)

x	$p(x) = P(X = x)$
0	$1/2$
1	$1/2 \cdot 1/2$
2	$(1/2)^3$
3	$(1/2)^4$
4	$(1/2)^4$
součet	1
jinak	0

$F(x)$ pro diskrétní n.v. je vlastně „kumulativní součet" $p(x)$, v R je na to fcunkce „cumsum":

$$(A)\ F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 7/8, & 2 \le x < 3 \\ 15/16, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

(B) $P(X \le 2) = F(2) = \frac{7}{8}$

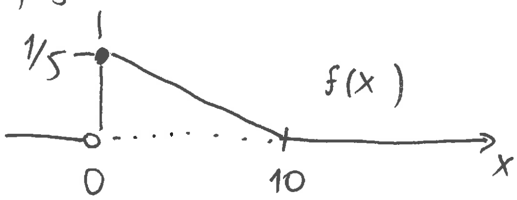
(C) $P(X = 3) = p(3) = \frac{1}{16}$

(D) $P(1 \le X \le 3) = F(3) - F(0) = \frac{7}{16}$

(E) $P(X = 3{,}5) = 0$

(F) $P(X \le 3{,}5) = F(3{,}5) = F(3) = \frac{15}{16}$

2 Spojitá n. veličina $\Rightarrow$ hustota $f(x)$.



(B) $\underline{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{5} - \frac{u}{50}\right) du = \left[\frac{u}{5} - \frac{u^2}{2 \cdot 50}\right]_0^x = \underline{\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100}}$, pokud $0 \le x < 10$,

$\underline{F(x) = 0}$ pro $x < 0$, $\underline{F(x) = 1}$ pro $x \ge 10$.

(C) $P(X \le 5) = F(5) = \int_0^5 f(x)\,dx = \frac{3}{4} = 0{,}75$

(D) $P(X \ge 2) = 1 - F(2) = \int_2^{10} f(x)\,dx = \frac{16}{25} = 0{,}64$

(E) $P(3 \le X \le 8) = F(8) - F(3) = \int_3^8 f(x)\,dx = \frac{45}{100} = 0{,}45$

$\boxed{3}$ (X, Y) má rovnoměrné diskrétní rozdělení na 3 bodech v rovině.
Uvnitř násl. tabulky je simultánní pstní fce $p(x,y) = P(X=x \,\&\, Y=y)$,
v posl. řádku/sloupci jsou marginální pstní fce
$p_X(x) = P(X=x)$ a $p_Y(y) = P(Y=y)$, které se počítají jako
sloupcové/řádkové součty (v R: colSums, rowSums).
Nezávislost: kontrolujeme všechny součiny $p_X(x) \cdot p_Y(y) \stackrel{?}{=} p(x,y)$.

X \ Y	0	1	$p_X(x)$
−1	$\frac{1}{3}$	0	$1/3$
0	0	$\frac{1}{3}$	$1/3$
1	$\frac{1}{3}$	0	$1/3$
$p_Y(y)$	$2/3$	$1/3$	1

Zde nejsou nezávislé.

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/3, & -1 \le x < 0 \\ 2/3, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$F(x,y)$:
výpočet rozdělením na intervaly pro x i pro y.
Ať si zkusí $F(x,y)$ spočítat pro několik vybraných dvojic (x,y) podle definice
$F(x,y) = P(X \le x \,\&\, Y \le y)$.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2/3, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

$\boxed{4}$

X \ Y	0	1	2	$p_X(x)$
0	$\frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$	0	0	$\frac{1}{45}$
1	$\frac{3.2}{45}$	$\frac{5.2}{45}$	0	$\frac{16}{45}$
2	$\frac{3}{45}$	$\frac{5.3}{45}$	$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{10}{45}$	$\frac{28}{45}$
$p_Y(y)$	$\frac{10}{45}$	$\frac{25}{45}$	$\frac{10}{45}$	1

(X, Y) nejsou nezávislé, neboť např. $\frac{1}{45} \cdot \frac{10}{45} \neq 0$.

(A) $F(1,1) = p(0,0) + p(0,1) + p(1,0) + p(1,1) = \frac{17}{45}$

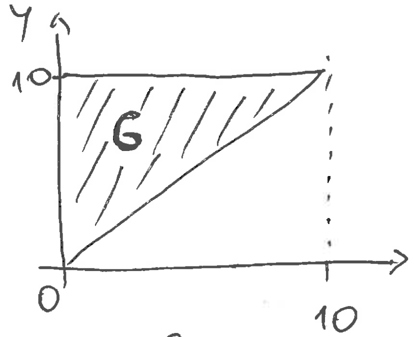
(B) ~~*~~ $F(2,1) = \frac{35}{45}$

(C) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{45} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{17}{45} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$

(D) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ \frac{10}{45} & , 0 \leq y < 1 \\ \frac{35}{45} & , 1 \leq y < 2 \\ 1 & , y \geq 2 \end{cases}$

(E) $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) = 1 - p_X(0) = \frac{44}{45}$

$\boxed{5}$ (X, Y) má rovnoměrné spojité rozdělení na trojúhelníku G:



$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S(G)} = \frac{1}{50} & , (x,y) \in G \\ 0 & , \text{jinak} \end{cases}$

$\underline{f_X(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_x^{10} \frac{1}{50}\, dy = \underline{\frac{10-x}{50}}$ pro $x \in [0;10]$, $\underline{f_X(x) = 0}$ jinak.

$\underline{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_0^{y} \frac{1}{50}\, dx = \underline{\frac{y}{50}}$ pro $y \in [0;10]$, $\underline{f_Y(y) = 0}$ jinak.

Kontrolujeme: $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{y(10-x)}{50^2} \neq \frac{1}{50} = f(x,y)$ pro $\forall x, y$

$\Rightarrow X, Y$ nejsou nezávislé.

$P(X \geq 4) = \int_4^{10} f_X(x)\, dx = \int_4^{10} \frac{10-x}{50}\, dx = \frac{1}{50}\left[10x - \frac{x^2}{2}\right]_4^{10} = \frac{9}{25} = 0{,}36.$

$\boxed{6}$ $X \sim Ex(\lambda_x = 1)$

$Y \sim Ex(\lambda_y = \frac{1}{2})$

X, Y – nezávislé $\Rightarrow$ můžeme používat vztahy:

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$,

$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

(A) $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda_x \cdot e^{-\lambda_x \cdot x} \cdot \lambda_y \cdot e^{-\lambda_y \cdot y} =$

$$= \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & x>0 \;\&\; y>0 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(B) $1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-1.2}) = e^{-2} \doteq 0{,}135$

(C) $[1 - F_X(2)] \cdot [1 - F_Y(2)] = e^{-2} \cdot e^{-1} = e^{-3} \doteq 0{,}05$

(D) $= F_X(2) \cdot [1 - F_Y(2)] + [1 - F_X(2)] \cdot F_Y(2) =$

$= (1 - e^{-2}) \cdot e^{-1} + e^{-2} \cdot (1 - e^{-1}) \doteq 0{,}404$

(E) $1 - P(\text{oba akumulátory se porouchají do 2 let}) =$

$$= 1 - \underbrace{F_X(2) \cdot F_Y(2)}_{F(2,2)} = 1 - (1 - e^{-2}) \cdot (1 - e^{-1}) \doteq 0{,}45$$

(Pozn.: Distribuční funkci pro Ex-rozdělení by měli znát z přednášky.)