KAPITOLA 1

Úvod do matematické statistiky

1. NÁHODNÝ VÝBĚR A VÝBĚROVÉ CHARAKTERISTIKY

V teorii pravděpodobnosti se předpokládá, že

- je známý **pravděpodobnostní prostor** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
- a že také známe **rozdělení pravděpodobnosti** náhodných veličin (resp. náhodných vektorů), které na tomto pravděpodobnostním prostoru uvažujeme.

V matematické statistice však

- máme k dispozici výsledky n nezávislých pozorování hodnot sledované náhodné veličiny X, které se ve statistice říká *statistický znak*, tj. máme
$$x_1 = X(\omega_1), \dots, x_n = X(\omega_n),\ \omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$$
- a na základě těchto pozorování chceme učinit výpověď o rozdělení zkoumané náhodné veličiny.

Definujme nejprve základní pojmy matematické statistiky. Základním pojmem matematické statistiky je pojem náhodného výběru.

Definice 1.1. Náhodný vektor $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ nazýváme **náhodným výběrem z rozdělení pravděpodobnosti** P, pokud

(i) $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny,
(ii) $X_1, \dots, X_n$ mají stejné rozdělení pravděpodobnosti P.

Číslo n nazýváme **rozsah náhodného výběru**. Libovolný bod $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)'$, kde x_i je realizace náhodné veličiny X_i $(i = 1, \dots, n)$, budeme nazývat **realizací náhodného výběru** $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$. Množinu všech hodnot, kterých může náhodný výběr nabýt, nazýváme **výběrový prostor** a budeme jej značit $\mathcal{X}$.

Základní dělení matematické statistiky je dané strukturou množiny všech možných rozdělení (označme ji $\mathcal{P}$) náhodného výběru $\mathbf{X}$. Velmi často vybíráme do množiny $\mathcal{P}$ jen rozdělení, která jsou stejného typu a která závisí pouze na nějakém (skalárním či vícerozměrném) parametru. Tento parametr se většinou značí $\boldsymbol{\theta}$ a pravděpodobnostní míry z množiny $\mathcal{P}$ symbolem $P_{\boldsymbol{\theta}}$. Přitom předpokládáme, že parametr $\boldsymbol{\theta}$ nabývá hodnot z nějaké množiny $\boldsymbol{\Theta}$.

Definice 1.2. Množinu $\mathcal{P}$ pravděpodobnostních měr tvaru
$$\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$$
nazýváme **parametrickou třídou rozdělení**. Vektor $\boldsymbol{\theta}$ nazýváme **parametrem rozdělení pravděpodobnosti** $P_{\boldsymbol{\theta}}$ a množinu $\boldsymbol{\Theta}$ možných hodnot parametru $\boldsymbol{\theta}$ **parametrický prostor**.

Nechť náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ je z rozdělení, které je dáno distribuční funkcí $F(x, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Zkráceně budeme značit:
$$\perp\!\!\!\perp\{X_1, \dots, X_n\} \simeq F(x; \boldsymbol{\theta}).$$

Nyní se zmiňme o tzv. rodinách rozdělení.

Definice 1.3. Nechť $g(x)$ je nějaká hustota. Definujme **rodiny rozdělení**
$$\mathcal{F}_1 = \{f(x; \theta) = g(x - \theta); \theta \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \left\{f(x; \delta) = \tfrac{1}{\delta} g\left(\tfrac{x}{\delta}\right); \delta > 0\right\}$$
$$\mathcal{F}_3 = \left\{f(x; \theta, \delta) = \tfrac{1}{\delta} g\left(\tfrac{x-\theta}{\delta}\right); \theta \in \mathbb{R}, \delta > 0\right\}$$
Pak říkáme, že $\boxed{\mathcal{F}_1}$ je **rodina s parametrem polohy** (*location family*), $\boxed{\mathcal{F}_2}$ je **rodina s parametrem měřítka** (*scale family*) a $\boxed{\mathcal{F}_3}$ je **rodina s parametrem polohy a měřítka** (*location-scale family*).

Cílem teorie odhadu je **na základě náhodného výběru** odhadnout

- rozdělení pravděpodobnosti,
- popřípadě některé parametry tohoto rozdělení,
- anebo nalézt odhad nějaké funkce parametrů $\boldsymbol{\theta}$, tj. $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Funkci $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ nazýváme **parametrickou funkcí**. V matematické statistice se pro funkce, pomocí kterých budeme odhady provádět, nazývají statistikou. (Tyto funkce jsou navíc měřitelné).

Definice 1.4. Libovolnou náhodnou veličinu T_n, která vznikne jako funkce náhodného výběru $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$, budeme nazývat **statistikou**, tj. $T_n = T(X_1, \dots, X_n)'$.

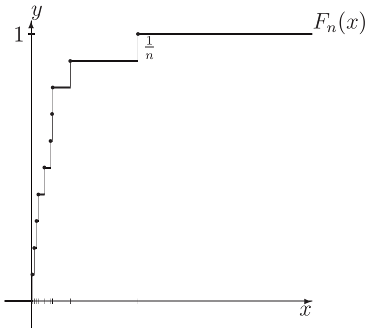
Příklad 1.5. Výběrová (empirická) distribuční funkce.

Ukážeme, jakým způsobem lze například informaci obsaženou v náhodném výběru zužitkovat k popisu **distribuční funkce**. Mějme $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \dots, X_n\} \simeq F(x; \boldsymbol{\theta})$.

Zaveďme tzv. **indikátor množiny** předpisem: $I_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B, \\ 0 & x \notin B \end{cases}$

a pro $x \in \mathbb{R}$ **indikátor jevu**: $I_i(x) = I_{(-\infty, x>}(X_i) = \begin{cases} 1 & X_i \le x, \\ 0 & X_i > x. \end{cases}$ pro $i = 1, \dots, n.$

Potom $I_1(x), \dots, I_n(x)$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným alternativním rozdělením pravděpodobností s parametrem $\pi \in (0, 1)$, tj. $\perp\!\!\!\perp\{I_1, \dots, I_n\} \simeq A(\pi)$. Parametr π je roven pravděpodobnosti úspěchu, tj.
$$P(I_i(x) = 1) = P(X_i \le x) = F(x; \boldsymbol{\theta}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\perp\!\!\!\perp\{I_1, \dots, I_n\} \simeq A(\pi = F(x; \boldsymbol{\theta}))}.$$
Položme
$$\begin{aligned} Y(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^n I_i(x) \\ F_n(x) &= \tfrac{Y(x)}{n} \end{aligned}$$
a postupně počítejme
$$\boxed{EF_n(x)} = E\frac{Y(x)}{n} = \frac{1}{n} Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i(x) = \frac{1}{n} \cdot n\, F(x; \boldsymbol{\theta}) = \boxed{F(x; \boldsymbol{\theta})}.$$
Protože posloupnost $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ splňuje jak slabý, tak silný zákon velkých čísel, tak platí
$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(|F_n(x) - F(x; \boldsymbol{\theta})| \ge \varepsilon) &= 0 \\ P(\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x; \boldsymbol{\theta})) &= 1 \end{aligned}}.$$



Z uvedených vztahů je vidět, že pokud rozsah výběru bude dostatečně velký, lze **distribuční funkci rozdělení**, z něhož výběr pochází, **dostatečně přesně aproximovat** pomocí **výběrové (empirické) distribuční funkce**.

Předpokládejme, že rozdělení, z něhož výběr pochází, má konečné druhé momenty se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, což budeme dále značit

$$\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\} \simeq \mathcal{L}(\mu,\sigma^2).$$

Tedy pro každé $i = 1,\dots,n$ platí

$$\begin{array}{rcl} EX_i & = & \mu \\ DX_i & = & \sigma^2 \end{array}.$$

Potom tyto charakteristiky zřejmě závisí na parametru $\boldsymbol{\theta}$, neboť

$$\begin{array}{rcl} \mu & = & \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x;\boldsymbol{\theta}) \\ \sigma^2 & = & \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 dF(x;\boldsymbol{\theta}) \end{array},$$

proto bude lépe značit je $\boxed{\mu(\boldsymbol{\theta})}$ a $\boxed{\sigma^2(\boldsymbol{\theta})}$ místo μ a σ^2.

Všimněme si dále, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\boxed{F_n(x) = F_n(X_1,\dots,X_n)}$ statistikou, tím také náhodnou veličinou (která nabývá hodnot mezi nulou a jedničkou) a tím i funkcí elementárního jevu $\omega \in \Omega$.

Zvolíme-li ω libovolně, ale pevně a uvažujeme-li $\boxed{F_n(x)}$ jako funkci proměnné x, pak lze snadno odvodit, že je tato funkce **distribuční funkcí** nějaké náhodné veličiny a lze zavést její střední hodnotu a rozptyl

$$\begin{array}{rcl} \mu_n & = & \int_{-\infty}^{\infty} x dF_n(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \\ \sigma_n^2 & = & \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 dF(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_n)^2 \end{array}.$$

Zřejmě μ_n a σ_n^2 jsou borelovské funkce náhodného výběru a tedy statistiky a lze je považovat za odhady parametrických funkcí $\mu(\boldsymbol{\theta})$ a $\sigma^2(\boldsymbol{\theta})$. Lze očekávat, že čím bude rozsah náhodného výběru větší, tím bude odhad uvedených parametrických funkcí kvalitnější.

Poznámka 1.6.
Odhadem parametrické funkce $\boxed{\gamma(\boldsymbol{\theta})}$ budeme rozumět nějakou statistiku $\boxed{T_n = T(X_1,\dots,X_n)'}$, která bude pro různé náhodné výběry kolísat kolem $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Statistika $T_n = T(X_1,\dots,X_n)'$ závisí na parametru $\boldsymbol{\theta}$ prostřednictvím distribuční funkce rozdělení, z něhož výběr pochází.

Také rozdělení této statistiky, tj. náhodné veličiny, závisí na parametru $\boldsymbol{\theta}$.

Proto střední hodnotu a rozptyl této statistiky budeme značit $\boxed{E_{\boldsymbol{\theta}}T_n}$ a $\boxed{D_{\boldsymbol{\theta}}T_n}$.

Definice 1.7. Výběrové charakteristiky. Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1,\dots,X_n)'$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení s distribuční funkcí $F(x;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Potom statistika

$\bar{X}_n = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$	se nazývá	**výběrový průměr**
$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2$		**výběrový rozptyl**
$S_n = S = \sqrt{S_n^2} = \sqrt{S^2}$		**výběrová směrodatná odchylka**
$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n I_{(-\infty,x>}(X_i)$		**výběrová (empirická) distribuční funkce**

2. NESTRANNOST, VÝCHÝLENÍ, KONZISTENCE ODHADŮ

Za lepší odhad se považuje ten, jehož rozdělení je více koncentrované okolo neznámé hodnoty parametru. Tento přirozený požadavek koncentrace rozdělení T_n okolo skutečné hodnoty parametru vyjadřujeme pomocí střední hodnoty a rozptylu.

Definice 2.1. Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1,\dots,X_n)'$ je náhodný výběr z rozdělení pravděpodobnosti $P_{\boldsymbol{\Theta}}$, kde $\boldsymbol{\theta}$ je vektor neznámých parametrů. Nechť $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ je daná parametrická funkce.

Řekneme, že statistika $T_n = T(X_1,\dots,X_n)'$ je

nestranným	odhadem parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$	pokud pro $\forall\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ platí $E_{\boldsymbol{\theta}}T_n = \gamma(\boldsymbol{\theta})$.
kladně vychýleným		$E_{\boldsymbol{\theta}}T_n > \gamma(\boldsymbol{\theta})$.
záporně vychýleným		$E_{\boldsymbol{\theta}}T_n < \gamma(\boldsymbol{\theta})$.
asymptoticky nestranným		$\lim\limits_{n\to\infty} E_{\boldsymbol{\theta}}T_n = \gamma(\boldsymbol{\theta})$.
slabě konzistentním		pokud pro $\forall\varepsilon > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} P_{\boldsymbol{\theta}}(\lvert T_n - \gamma(\boldsymbol{\theta})\rvert > \varepsilon) = 0$ tj. $T_n \xrightarrow{P_{\boldsymbol{\theta}}} \gamma(\boldsymbol{\theta})$
silně konzistentním		$P_{\boldsymbol{\theta}}(\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \gamma(\boldsymbol{\theta})) = 1$ tj. $T_n \xrightarrow{s.j.} \gamma(\boldsymbol{\theta})$

Poznámka 2.2.
Vlastnost **nestrannosti** (tj. nevychýlenosti) ještě neposkytuje záruku dobrého odhadu, pouze **vylučuje systematickou chybu**.

Poznámka 2.3.
Používání **konzistentních odhadů** zaručuje

- **malou pravděpodobnost velké chyby** v odhadu parametru, pokud rozsah výběru dostatečně roste;
- volbou **dostatečně velkého počtu pozorování** lze učinit chybu odhadu **libovolně malou**.

Příklad 2.4. GEOMETRICKÉ ROZDĚLENÍ.
Nechť náhodná veličina X má geometrické rozdělení,

$$f_X(x) = P(X = x) = (1-\theta)^x\theta \qquad 0 < \theta < 1 \;\; x = 0, 1, \ldots$$

Veličina X udává počet neúspěchů při výběru z alternativního rozdělení před výskytem prvního úspěchu. Hledejme nestranný odhad pro θ.

Je-li $T(X)$ takový nestranný odhad, musí pro něj platit

$$\boxed{E_\theta T(X)} = \sum_{x=0}^{\infty} T(x)(1-\theta)^x\theta = \boxed{\theta} \qquad 0 < \theta < 1,$$

Odtud dostáváme

$$\sum_{x=0}^{\infty} T(x)(1-\theta)^x = 1 \qquad 0 < \theta < 1,$$

takže musí platit

$$\begin{aligned} T(0) &= 1 \\ T(x) &= 0 \qquad \text{pro } x \geq 1. \end{aligned}$$

Tento odhad však není pokládán za vhodný, protože jen minimálně přihlíží k počtu neúspěchů před prvním úspěchem. Závisí jen na tom, zda úspěch nastal hned v prvním pokusu či nikoli.

Může se také stát, že nestranný odhad neexistuje.

Příklad 2.5. Parametrická funkce $\boxed{\frac{1}{\theta}}$ v případě BINOMICKÉHO ROZDĚLENÍ.

Nechť náhodná veličina X má binomické rozdělení, tj. $X \sim Bi(n, \theta)$ a

$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \qquad n \geq 1, \;\; 0 < \theta < 1 \;\; x = 0, 1, \ldots, n.$$

Sporem ukážeme, že neexistuje nestranný odhad pro parametrickou funkci

$$\boxed{\gamma(\theta) = \tfrac{1}{\theta}}.$$

Nechť existuje taková funkce T, že pro každé $\theta \in (0, 1)$ platí

$$\boxed{E_\theta T(X)} = \sum_{x=0}^{n} T(x)\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = \boxed{\tfrac{1}{\theta}} \qquad 0 < \theta < 1.$$

Na levé straně je však polynom proměnné θ nejvýše stupně n, který samozřejmě nemůže být identicky roven $\frac{1}{\theta}$ na intervalu $(0, 1)$.

Nyní vyšetříme případ, kdy odhadovanými parametry jsou **střední hodnota** a **rozptyl** rozdělení, ze kterého náhodný výběr pochází.

VĚTA 2.6. *Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný výběr z rozdělení, které má střední hodnotu $\mu(\boldsymbol{\theta})$ pro $\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Pak **výběrový průměr** je **nestranným odhadem** střední hodnoty, tj.*

$$E_{\boldsymbol{\theta}}\bar{X} = \mu(\boldsymbol{\theta}).$$

Důkaz. Počítejme

$$E_{\boldsymbol{\theta}}\bar{X} = E_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\boldsymbol{\theta}}X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(\boldsymbol{\theta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}).$$

□

VĚTA 2.7. *Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný výběr z rozdělení, které má rozptyl $\sigma^2(\boldsymbol{\theta})$ pro $\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Pak **výběrový rozptyl** je **nestranným odhadem** rozptylu, tj.*

$$E_{\boldsymbol{\theta}}S^2 = \sigma^2(\boldsymbol{\theta}).$$

Důkaz. Nejprve upravujme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \mu(\boldsymbol{\theta})) - (\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta}))\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2 - 2(X_i - \mu(\boldsymbol{\theta}))(\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta})) + (\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2 - 2(\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta}))\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu(\boldsymbol{\theta}))}_{=n(\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta}))} + n(\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2 - n(\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2. \end{aligned}$$

Pak počítejme

$$\begin{aligned} E_{\boldsymbol{\theta}}S^2 = E_{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] &= \frac{1}{n-1}E_{\boldsymbol{\theta}}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2 + n(\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\underbrace{E_{\boldsymbol{\theta}}(X_i - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2}_{=DX_i = \sigma^2(\boldsymbol{\theta})} - n\underbrace{E_{\boldsymbol{\theta}}(\bar{X} - \mu(\boldsymbol{\theta}))^2}_{=D_{\boldsymbol{\theta}}\bar{X}}\right] \end{aligned}$$

Proto vypočtěme

$$D_{\boldsymbol{\theta}}\bar{X} = D_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \stackrel{nez.}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D_{\boldsymbol{\theta}}X_i = \frac{\sigma^2(\boldsymbol{\theta})}{n}$$

a celkově dostaneme

$$E_{\boldsymbol{\theta}}S^2 = \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2(\boldsymbol{\theta}) - \sigma^2(\boldsymbol{\theta})\right] = \sigma^2(\boldsymbol{\theta}).$$

□

Následující věta udává postačující podmínku pro konzistentní odhad.

VĚTA 2.8. *Nechť statistika $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)'$ je nestranný nebo asymptoticky nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} D_{\boldsymbol{\theta}}T_n = 0.$$

Pak je statistika $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ konzistentním odhadem parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Z Čebyševovy nerovnosti plyne:

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(|T_n - E_{\boldsymbol{\theta}}T_n| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) \leq \tfrac{4D_{\boldsymbol{\theta}}T_n}{\varepsilon^2}.$$

Protože buď $E_{\boldsymbol{\theta}}T_n = \gamma(\boldsymbol{\theta})$ nebo $\lim_{n\to\infty} E_{\boldsymbol{\theta}}T_n = \gamma(\boldsymbol{\theta})$, pak existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro $\forall n > n_0$ platí:

$$-\tfrac{\varepsilon}{2} < \gamma(\boldsymbol{\theta}) - E_{\boldsymbol{\theta}}T_n < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}P_{\boldsymbol\theta}(|T_n-\gamma(\boldsymbol\theta)|\geq\varepsilon) &= 1-P_{\boldsymbol\theta}(|T_n-\gamma(\boldsymbol\theta)|<\varepsilon)=1-P_{\boldsymbol\theta}(|T_n-E_{\boldsymbol\theta}T_n+ET_n-\gamma(\boldsymbol\theta)|<\varepsilon)\\ &\leq 1-P_{\boldsymbol\theta}(|T_n-E_{\boldsymbol\theta}T_n|+|ET_n-\gamma(\boldsymbol\theta)|<\varepsilon)\\ &\leq 1-P_{\boldsymbol\theta}(\{|T_n-E_{\boldsymbol\theta}T_n|<\tfrac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|ET_n-\gamma(\boldsymbol\theta)|<\tfrac{\varepsilon}{2}\})\\ &\leq 1-P_{\boldsymbol\theta}(|T_n-E_{\boldsymbol\theta}T_n|<\tfrac{\varepsilon}{2})-P(|ET_n-\gamma(\boldsymbol\theta)|<\tfrac{\varepsilon}{2})\\ &\leq 1-P_{\boldsymbol\theta}(|T_n-E_{\boldsymbol\theta}T_n|<\tfrac{\varepsilon}{2})=P_{\boldsymbol\theta}(|T_n-E_{\boldsymbol\theta}T_n|\geq\tfrac{\varepsilon}{2})\leq\tfrac{4D_{\boldsymbol\theta}T_n}{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty}P_{\boldsymbol\theta}(|T_n-\gamma(\boldsymbol\theta)|\geq\varepsilon)\leq\tfrac{4}{\varepsilon^2}\lim_{n\to\infty}D_{\boldsymbol\theta}T_n=0.$$

Tedy T_n je **slabě konzistentním odhadem** $\gamma(\boldsymbol\theta)$. □

DŮSLEDEK 2.9. *Nechť* $\mathbf{X}_n=(X_1,\dots,X_n)'$ *je náhodný výběr z rozdělení, které má pro* $\forall\boldsymbol\theta\in\boldsymbol\Theta$ *střední hodnotu* $\mu(\boldsymbol\theta)$ *a rozptyl* $\sigma^2(\boldsymbol\theta)$, *tj.*

$$\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\}\simeq\mathcal{L}(\mu(\boldsymbol\theta),\sigma^2(\boldsymbol\theta)).$$

Potom je-li $\mu(\boldsymbol\theta)<\infty$, *pak* ***výběrový průměr*** $\bar X$ *je* ***slabě konzistentním odhadem*** $\mu(\boldsymbol\theta)$.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $\bar X$ je nestranným odhadem $\mu(\boldsymbol\theta)$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}D_{\boldsymbol\theta}\bar X=\lim_{n\to\infty}D_{\boldsymbol\theta}\left(\frac1n\sum_{i=1}^n X_i\right)\overset{nez.}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D_{\boldsymbol\theta}X_i=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2(\boldsymbol\theta)}{n}=0$$

tj. rozptyl konverguje k nule, jsou splněny předpoklady předchozí věty a platí tak tvrzení. □

DŮSLEDEK 2.10. *Nechť* $\mathbf{X}_n=(X_1,\dots,X_n)'$ *je náhodný výběr z rozdělení, které má pro* $\forall\boldsymbol\theta\in\boldsymbol\Theta$ *střední hodnotu* $\mu(\boldsymbol\theta)$ *a rozptyl* $\sigma^2(\boldsymbol\theta)$, *tj.*

$$\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\}\simeq\mathcal{L}(\mu(\boldsymbol\theta),\sigma^2(\boldsymbol\theta)).$$

Potom je-li $\sigma^2(\boldsymbol\theta)<\infty$, *pak* ***výběrový rozptyl*** S^2 *je* ***slabě konzistentním odhadem*** $\sigma^2(\boldsymbol\theta)$.

Důkaz. Víme již, že statistika S^2 je nestranným odhadem $\sigma^2(\boldsymbol\theta)$. Nyní budeme muset vypočítat rozptyl statistiky S^2, což není zdaleka tak triviální jako v případě výběrového průměru. Pro lepší přehlednost budeme psát místo $\mu(\boldsymbol\theta)$ a $\sigma^2(\boldsymbol\theta)$ pouze μ a σ^2, u středních hodnot $E_{\boldsymbol\theta}$ a rozptylu $D_{\boldsymbol\theta}$ také vynecháme parametr $\boldsymbol\theta$.

Položme

$$Y_i=(X_i-\mu)^2$$
$$S_0^2=\frac1n\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$$

a počítejme

$$S_0^2=\frac1n\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2=\frac1n\sum_{i=1}^nY_i=\bar Y.$$

Pak

$$\begin{aligned}EY_i&=E(X_i-\mu)^2=DX_i=\sigma^2\\ DY_i&=EY_i^2-(EY_i)^2=E(X_i-\mu)^4-\sigma^4=\mu_4-\sigma^4\\ ES_0^2&=E\bar Y=\frac1n\sum_{i=1}^nEY_i=\sigma^2 &(1)\\ DS_0^2&=D\left(\frac1n\sum_{i=1}^nY_i\right)\overset{nez.}{=}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^nDY_i=\frac{\mu_4-\sigma^4}{n} &(2)\end{aligned}$$

Označme

$$S_\star^2=\frac1n\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2=\frac{n-1}{n}S^2,$$

takže

$$S^2=\frac{n}{n-1}S_\star^2. \tag{3}$$

Pak

$$\begin{aligned}S_\star^2&=\frac1n\sum_{i=1}^n\left[(X_i-\mu)-(\bar X-\mu)\right]^2\\ &=\frac1n\sum_{i=1}^n\left[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)(\bar X-\mu)+(\bar X-\mu)^2\right]\\ &=\underbrace{\frac1n\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}_{S_0^2}-\frac2n(\bar X-\mu)\underbrace{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)}_{n\bar X-n\mu}+\frac1n n(\bar X-\mu)^2\\ &=S_0^2-(\bar X-\mu)^2 &(4)\end{aligned}$$

Počítejme nejprve

$$\begin{aligned}ES_\star^2&\overset{viz(4)}{=}E\left[S_0^2-(\bar X-\mu)^2\right]=ES_0^2-\underbrace{E(\bar X-\mu)^2}_{D\bar X}=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2\\ ES^2&\overset{viz(3)}{=}E\left[\frac{n}{n-1}S_\star^2\right]=\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2.\end{aligned}$$

Připomeňme, že rozptyl lze počítat pomocí vzorce

$$DS_\star^2=ES_\star^4-\left[ES_\star^2\right]^2,$$

a protože $ES_\star^2$ již známe, počítejme nyní

$$\begin{aligned}ES_\star^4&\overset{viz(4)}{=}E[S_0^2-(\bar X-\mu)^2]^2=E[S_0^4-2S_0^2(\bar X-\mu)^2+(\bar X-\mu)^4]\\ &=\underbrace{ES_0^4}_{(a)}-2\underbrace{ES_0^2(\bar X-\mu)^2}_{(b)}+\underbrace{E(\bar X-\mu)^4}_{(c)}. &(5)\end{aligned}$$

Při výpočtu výrazu (a) ve vzorci (5) vyjdeme opět ze vztahu

$$DS_0^2=ES_0^4-\left(ES_0^2\right)^2,$$

takže

$$ES_0^4=DS_0^2+\left(ES_0^2\right)^2=\frac{\mu_4-\sigma^4}{n}+\sigma^4=\frac{\mu_4}{n}+\frac{n-1}{n}\sigma^4.$$

Dále počítejme výraz (b) ve vzorci (5)

$$
\begin{aligned}
E[S_0^2(\bar{X}-\mu)^2] &= \tfrac{1}{n^3} E\left\{ \left[\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2\right] \left[\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)\right]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)(X_k-\mu)] \\
&= \tfrac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \underbrace{E[(X_i-\mu)^4]}_{=\mu_4} \\
&\quad + \tfrac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n \sum_{k=1, k\neq i,j}^n \underbrace{E[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)(X_k-\mu)]}_{=0 \quad \text{viz [1]}} \\
&\quad + \underbrace{\tfrac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i\neq j}^n E[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2]}_{=n(n-1)\sigma^4 \quad \text{viz [2]}} \\
&= \tfrac{n\mu_4}{n^3} + \tfrac{n(n-1)\sigma^4}{n^3} \\
&= \tfrac{1}{n^2}\left[\mu_4 + (n-1)\sigma^4\right].
\end{aligned}
$$

Ještě zbývá vypočítat poslední výraz (c) ve vzorci (5)

$$
\begin{aligned}
E[(\bar{X}-\mu)^4] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)\right]^4 \\
&= \tfrac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n E[(X_i-\mu)(X_j-\mu)(X_k-\mu)(X_h-\mu)] \\
&= \tfrac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \underbrace{E[(X_i-\mu)^4]}_{=\mu_4} + \underbrace{\tfrac{1}{n^4}\, 3 \sum_{s=1}^n \sum_{t=1, t\neq s}^n E[(X_s-\mu)^2(X_t-\mu)^2]}_{=3n(n-1)\sigma^4 \quad \text{viz [3]}} \\
&= \tfrac{1}{n^3}\left[\mu_4 + 3(n-1)\sigma^4\right]
\end{aligned}
$$

Nyní předchozí tří výpočty můžeme shrnout a dostaneme

$$
\begin{aligned}
ES_\star^4 &= \tfrac{\mu_4}{n} + \tfrac{n-1}{n}\sigma^4 - 2\left(\tfrac{\mu_4}{n^2} + \tfrac{n-1}{n^2}\sigma^4\right) + \tfrac{\mu_4}{n^3} + 3\tfrac{n-1}{n^3}\sigma^4 \\
&= \tfrac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 + \tfrac{(n-1)(n^2-2n+3)}{n^3}\sigma^4
\end{aligned}
$$

[1] Díky nezávislosti náhodných veličin X_i, X_j a X_k máme: $E[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)(X_k-\mu)] = E(X_i-\mu)^2E(X_j-\mu)E(X_k-\mu) = 0$, protože $E(X_i-\mu)^{2k+1} = 0$.

[2] Opět z nezávislosti náhodných veličin X_i a X_j plyne: $E[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2] = E(X_i-\mu)^2E(X_j-\mu)^2 = \sigma^4$.

[3] Pouze v případech, kdy (1.) $s=i=j \wedge t=k=h \wedge s\neq t$, (2.) $s=i=k \wedge t=j=h \wedge s\neq t$ a (3.) $s=i=h \wedge t=j=k \wedge s\neq t$ dostaneme: $E[(X_s-\mu)^2(X_t-\mu)^2] = E(X_s-\mu)^2\, E(X_t-\mu)^2 = \sigma^4$, a to zase díky nezávislosti náhodných veličin X_t a X_s.

Nyní ještě spočtěme

$$
\begin{aligned}
DS_\star^2 &= \tfrac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 + \tfrac{(n-1)(n^2-2n+3)}{n^3}\sigma^4 - \left(\tfrac{n-1}{n}\sigma^2\right)^2 \\
&= \tfrac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 - \tfrac{(n-1)(n-3)}{n^3}\sigma^4
\end{aligned}
$$

a konečně

$$
DS^2 = \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^2 DS_\star^2 = \tfrac{\mu_4}{n} - \tfrac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4.
$$

Odtud snadno ukážeme, že rozptyl statistiky S^2 konverguje k nule, čímž je tvrzení dokázáno

$$
\lim_{n\to\infty} DS^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{\mu_4}{n} - \tfrac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4\right) = 0.
$$

□

Věta 2.11. *Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1,\ldots,X_n)'$ je náhodný výběr z rozdělení, které má pro $\forall\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}$ střední hodnotu $\mu(\boldsymbol{\theta})$ a rozptyl $\sigma^2(\boldsymbol{\theta})$, tj.*

$$
\perp\!\!\!\perp\{X_1,\ldots,X_n\} \simeq \mathcal{L}(\mu(\boldsymbol{\theta}),\sigma^2(\boldsymbol{\theta})).
$$

Potom

(i) je-li $\mu(\boldsymbol{\theta}) < \infty$, pak ***výběrový průměr*** *$\bar{X}$ je* ***silně konzistentním odhadem*** *$\mu(\boldsymbol{\theta})$.*

(ii) je-li $\sigma^2(\boldsymbol{\theta}) < \infty$, pak ***výběrový rozptyl*** *S^2 je* ***silně konzistentním odhadem*** *$\sigma^2(\boldsymbol{\theta})$.*

Důkaz. Připomeňme nejprve, že náhodný výběr $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\ldots,X_n\} \simeq \mathcal{L}(\mu(\boldsymbol{\theta}),\sigma^2(\boldsymbol{\theta}))$ představuje nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s konečnou střední hodnotou a rozptylem.

(i) Vzhledem k tomu, že $\bar{X} = \bar{X}_n$ je nestranným odhadem $\mu(\boldsymbol{\theta})$, tj. $E_{\boldsymbol{\theta}}\bar{X} = \mu(\boldsymbol{\theta})$, pak posloupnost $\{\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty} X_i\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel, tj. platí

$$
P_{\boldsymbol{\theta}}(\lim_{n\to\infty}\bar{X}_n = \mu(\boldsymbol{\theta})) = 1, \quad \text{pro } \forall\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta},
$$

takže **výběrový průměr** $\bar{X}$ je **silně konzistentním odhadem** $\mu(\boldsymbol{\theta})$.

(ii) Připomeňme, že platí

$$
\begin{aligned}
S^2 = S_n^2 &= \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left[(X_i-\mu(\boldsymbol{\theta})) - (\bar{X}-\mu(\boldsymbol{\theta}))\right]^2 \\
&= \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left[(X_i-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2 - 2(X_i-\mu(\boldsymbol{\theta}))(\bar{X}-\mu(\boldsymbol{\theta})) + (\bar{X}-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2\right] \\
&= \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2 - 2(\bar{X}-\mu(\boldsymbol{\theta}))\tfrac{1}{n-1}\underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu(\boldsymbol{\theta}))}_{=n(\bar{X}-\mu(\boldsymbol{\theta}))} + \tfrac{1}{n-1}n(\bar{X}-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2 \\
&= \tfrac{n}{n-1}\left[\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2 - (\bar{X}-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2\right].
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Náhodné veličiny

$$
Y_i = (X_i-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2
$$

jsou nezávislé stejně rozdělené se střední hodnotou $E_{\boldsymbol{\theta}}Y_i = E_{\boldsymbol{\theta}}(X_i-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2 = \sigma^2$, takže posloupnost

$$
\left\{\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu(\boldsymbol{\theta}))^2\right\}_{i=1}^n
$$

splňuje silný zákon velkých čísel, tj. platí

$$P_{\boldsymbol\theta}(\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu(\boldsymbol\theta))^2=\sigma^2(\boldsymbol\theta))=1.$$

Protože také platí

$$P_{\boldsymbol\theta}(\lim_{n\to\infty}\bar X_n=\mu(\boldsymbol\theta))=P_{\boldsymbol\theta}(\lim_{n\to\infty}\bar X_n-\mu(\boldsymbol\theta))=0)=1,$$

takže celkově, využijeme-li vztah (6), dostáváme

$$P_{\boldsymbol\theta}(\lim_{n\to\infty} S_n^2=\sigma^2(\boldsymbol\theta))=1,\quad \text{pro } \forall\boldsymbol\theta\in\boldsymbol\Theta$$

takže **výběrový rozptyl** S_n^2 je **silně konzistentním odhadem** $\sigma^2(\boldsymbol\theta)$.

□

Poznámka 2.12. Více nestranných odhadů.

Obecně může existovat více nestranných odhadů. Například nejen výběrový průměr $\bar X$ je nestranným odhadem střední hodnoty $\mu(\boldsymbol\theta)$, ale i každé jednotlivé pozorování X_i nebo každá jeho lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_iX_i$, pro kterou platí $\sum_{i=1}^n c_i=1$.

Pokud tedy existuje více nestranných odhadů je přirozenou otázkou, který z nich je nejlepší.

Za nejlepší můžeme považovat ten, který má **nejmenší rozptyl** mezi všemi nestrannými odhady.

Rozdělení každé statistiky však závisí na parametru $\boldsymbol\theta$, z čehož vyplývá, že i rozptyl nestranné statistiky T_n závisí na parametru $\boldsymbol\theta$.

Může se stát, že odhad minimalizující rozptyl při určité hodnotě parametru není vhodný pro jinou hodnotu parametru - existuje jiný nestranný (nevychýlený) odhad, který má při této hodnotě parametru menší rozptyl.

Pokud taková situace nenastane, mluvíme o rovnoměrně nejlepším nestranném odhadu.

Definice 2.13. Nechť T_n je nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol\theta)$ a pro všechna $\boldsymbol\theta\in\boldsymbol\Theta$ platí

$$D_{\boldsymbol\theta}T_n\le D_{\boldsymbol\theta}T_n^*,$$

kde T_n^* je libovolný nestranný odhad parametru $\gamma(\boldsymbol\theta)$. Potom odhad T_n nazveme (**rovnoměrně**) **nejlepším nestranným odhadem** parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol\theta)$.

Příklad 2.14. Nejlepší nestranný lineární odhad střední hodnoty $\mu(\boldsymbol\theta)$.

Jak jsme již dříve spočítali, pro náhodný výběr $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\}\simeq\mathcal L(\mu(\boldsymbol\theta),\sigma^2(\boldsymbol\theta))$ platí, že střední hodnota výběrového průměru $\bar X$ je rovna

$$E_{\boldsymbol\theta}\bar X=\mu(\boldsymbol\theta)$$

a rozptyl výběrového průměru $\bar X$ je roven

$$D_{\boldsymbol\theta}\bar X=\frac{\sigma^2(\boldsymbol\theta)}{n}.$$

Tedy variabilita této statistiky je n krát menší než variabilita jednotlivých pozorování $X_1,\dots,X_n$ a tedy hodnoty statistiky $\bar X$ jsou více koncentrovány kolem odhadované střední hodnoty $\mu(\boldsymbol\theta)$ než jednotlivá pozorování $X_1,\dots,X_n$. Navíc je statistika $\bar X$ je lineární funkcí náhodných veličin $X_1,\dots,X_n$.

Uvažujme všechny **lineární statistiky** tvaru $\sum_{i=1}^n c_iX_i$, kde $c_1,\dots,c_n\in\mathbb R$, které jsou nestrannými odhady střední hodnoty $\mu(\boldsymbol\theta)$, tj. pro $\forall\boldsymbol\theta\in\boldsymbol\Theta$ musí platit

$$\mu(\boldsymbol\theta)=E_{\boldsymbol\theta}\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n c_i\underbrace{E_{\boldsymbol\theta}X_i}_{=\mu(\boldsymbol\theta)}=\mu(\boldsymbol\theta)\sum_{i=1}^n c_i\quad\Rightarrow\quad\sum_{i=1}^n c_i=1.$$

Tím jsme dostali první podmínku, která se týká nestrannosti odhadu.

Nyní budeme hledat taková $c_1,\dots,c_n\in\mathbb R$, která minimalizují rozptyl

$$D_{\boldsymbol\theta}\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)\overset{nez.}{=}\sum_{i=1}^n c_i^2D_{\boldsymbol\theta}X_i=\sigma^2(\boldsymbol\theta)\sum_{i=1}^n c_i^2$$

a pro něž platí $\sum_{i=1}^n c_i=1$, tedy hledáme vázaný extrém, takže použijeme Lagrangeovu funkci s multiplikátorem λ, tj.

$$L(c_1,\dots,c_n,\lambda)=\sum_{i=1}^n c_i^2-\lambda\left(\sum_{i=1}^n c_i-1\right).$$

Pak pro $j=1,\dots,n$

$$\frac{\partial L}{\partial c_j}=2c_j-\lambda=0\quad\Rightarrow\quad c_j=\tfrac12\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=-\sum_{i=1}^n c_i+1=0\quad\Rightarrow\quad\sum_{i=1}^n c_i=1.$$

Prvních n rovnic implikuje, že

$$c_1=c_2=\cdots=c_n.$$

Označme společnou hodnotu symbolem c. Díky poslední rovnici dostaneme

$$1=\sum_{i=1}^n c_i=nc\quad\Rightarrow\quad c=c_1=c_2=\cdots=c_n=\tfrac1n,$$

tedy výběrový průměr $\bar X$ je **nejlepším nestranným lineárním odhadem** střední hodnoty $\mu(\boldsymbol\theta)$.

Zkusme provést důkaz ještě jiným způsobem. Nechť $\sum_{i=1}^n c_iX_i$ je libovolný nestranný lineární odhad pro μ (tj. nutně musí platit $\sum_{i=1}^n c_i=1$).

Položíme-li	$c_i=\frac1n+\delta_i$	pro	$i=1,\dots,n$
je minimalizace výrazu	$\sum_{i=1}^n c_i^2$	za podmínky	$\sum_{i=1}^n c_i=1$
ekvivalentní s úlohou minimalizovat	$\sum_{i=1}^n\left(\frac1n+\delta_i\right)^2$	za podmínky	$\sum_{i=1}^n\delta_i=0.$

Za této podmínky je však

$$\sum_{i=1}^n\left(\tfrac1n+\delta_i\right)^2=\underbrace{\sum_{i=1}^n\left(\tfrac1n\right)^2}_{=n\frac{1}{n^2}}+2\tfrac1n\underbrace{\sum_{i=1}^n\delta_i}_{=0}+\sum_{i=1}^n\delta_i^2=\boxed{\tfrac1n+\sum_{i=1}^n\delta_i^2},$$

což je minimální pro

$$\delta_i=0\qquad\text{pro}\qquad i=1,\dots,n.$$

Tedy nejlepším nestranným lineárním odhadem je lineární kombinace X_i s koeficienty $c_i=\frac1n$.

3. POSTAČUJÍCÍ STATISTIKY

Nalezení rovnoměrně nejlepších nestranných odhadů není vždy jednoduché. Abychom nalezli odhad, který má nejmenší rozptyl, je vhodná jistá redukce výběru, tj. nahrazení celého výběru jedinou statistikou, takovou, která bude obsahovat „veškerou informaci o parametru $\boldsymbol{\theta}$“, která byla obsažená ve výběru. Takováto redukce výběrového prostoru se dosáhne pomocí postačujících statistik.

Definice 3.1. Mějme náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ z rozdělení pravděpodobnosti $P_{\boldsymbol{\theta}}$, kde $\boldsymbol{\theta}$ je neznámý parametr. Řekneme, že statistika $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ je **postačující (suficientní) statistikou** (*sufficient statistic*), jestliže sdružené rozdělení náhodného výběru $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ podmíněné jevem $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}$ je pro každé $\mathbf{s}$ nezávislé na $\boldsymbol{\theta}$.

Příklad 3.2. Nechť náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ pochází z alternativního rozdělení s parametrem $\theta \in (0,1)$. Nechť

$$S = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Pak $S \sim Bi(n,\theta)$. Nechť $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)'$ je realizace náhodného výběru. Uvažujme podmíněnou pravděpodobnost

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | S = s).$$

(a) Je-li $\sum_{i=1}^n x_i \neq s$, pak je tato podmíněná pravděpodobnost rovna nule.
(b) Nechť $\sum_{i=1}^n x_i = s$. Pak

$$\begin{aligned}
\boxed{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | S = s)} &= \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(S=s)} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)}{P(S=s)} \\
&= \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{\binom{n}{s}\theta^s(1-\theta)^{n-s}} = \boxed{\frac{1}{\binom{n}{s}}}.
\end{aligned}$$

Výsledek nezávisí na θ, takže statistika $S = \sum_{i=1}^n X_i$ je **postačující statistikou**.

Uvedeme větu, která se nazývá také větou o faktorizaci a která zjednodušuje hledání postačujících statistik. Kromě toho umožňuje rychle rozhodnout o tom, či je statistika postačující.

Věta 3.3. ***Neymanovo faktorizační kritérium***. *Mějme náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ z rozdělení s pravděpodobnostní funkcí (resp. hustotou) $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Potom $S(\mathbf{X})$ je postačující statistika pro $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, právě když existují nezáporné měřitelné funkce g, h takové, že sdružené rozdělení náhodného výběru je součinem dvou faktorů:*

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x})\ \ g(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta})$$

*(a říkáme, že hustota f se dá **faktorizovat**).*

Důkaz. Tvrzení ukážeme pouze pro diskrétní případ.

$\Rightarrow$ Nechť $\mathbf{S}$ je postačující statistika, pak

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}) = h(\mathbf{x})$$

a nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$. Dále pro sdruženou pravděpodobnostní funkci platí

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \underbrace{P(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{S}(\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{x})))}_{h(\mathbf{x})}\underbrace{P(\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}))}_{g(\mathbf{S}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\theta})}$$

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že sdruženou pravděpodobnostní funkci lze vyjádřit ve tvaru

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x})\ g(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta}),$$

tj. že ji lze faktorizovat. Označme

$$B_{\mathbf{s}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}\}.$$

Nejprve spočtěme

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{x} \in B_{\mathbf{s}}} P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \in B_{\mathbf{s}}} h(\mathbf{x})\ g(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta}) \\
&= g(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta}) \sum_{\mathbf{x} \in B_{\mathbf{s}}} h(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Je-li $P(\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}) > 0$ a $\mathbf{S}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{s}$, pak je podmíněná pravděpodobnost

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}) = 0.$$

Je-li $P(\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}) > 0$ a $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}$, pak

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}) &= \frac{P(\mathbf{X} = \mathbf{x})}{P(\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s})} = \frac{h(\mathbf{x})\ g(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta})}{g(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta}) \sum_{\mathbf{x} \in B_{\mathbf{s}}} h(\mathbf{x})} \\
&= \frac{h(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x} \in B_{\mathbf{s}}} h(\mathbf{x})}
\end{aligned}$$

a tím je dokázáno, že podmíněné rozdělení vektoru $\mathbf{X}$ při dané hodnotě statistiky $\mathbf{S}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$ a $\mathbf{S}$ je postačující statistikou pro prametr $\boldsymbol{\theta}$.

□

Příklad 3.4. Nechť náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\theta > 0$ s pravděpodobnostní funkcí

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \dots.$$

Ukážeme, že statistika

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

je postačující statistikou pro parametr θ, neboť sdružená hustota náhodného výběru je tvaru

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = \underbrace{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}_{g(\mathbf{T}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\theta})} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)^{-1}}_{h(\mathbf{x})}.$$

Než uvedeme větu, která ukazuje praktický význam postačujících statistik pro konstrukci nejlepších nestranných odhadů, všimněme si podmíněných středních hodnot.

3.1. PODMÍNĚNÉ STŘEDNÍ HODNOTY.

Nechť $\mathbf{Z} = (X,Y)'$ je náhodný vektor, $F(x,y)$ je jeho sdružená distribuční funkce a $F_X(x)$ a $F_Y(y)$ odpovídající marginální distribuční funkce. Nechť vektor středních hodnot $E\mathbf{Z}$ existuje (a je konečný).

(1) Nechť pro každou borelovskou množinu $S \in \mathcal{B}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje funkce $F(x|y)$ taková, že platí

$$P(X \le x, Y \in S) = \int_S F(x|y)dF_Y(y).$$

Potom funkci $F(x|y)$ nazveme **podmíněnou distribuční funkci náhodné veličiny** X **při daném** $Y=y$ (podmíněnou jevem $Y=y$ nebo také vzhledem k Y).

(a) <u>Diskrétní případ</u>: $\mathbf{Z} = (X,Y)' \sim p(x,y)$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) > 0\}$, $X \sim p_X(x)$, $M_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}$, $Y \sim p_Y(y)$, $M_Y = \{y \in \mathbb{R} : p_Y(y) > 0\}$. Počítejme

$$\begin{aligned} P(X \le x, Y \in S) &= \sum_{y\in S}\sum_{t\le x} p(t,y) = \sum_{y\in S\cap M_Y}\sum_{t\le x} p(t,y) + \sum_{y\in S\cap(\mathbb{R}-M_Y)}\sum_{t\le x} \underbrace{p(t,y)}_{=0} \\ &= \sum_{y\in S\cap M_Y}\left(\sum_{t\le x}\frac{p(t,y)}{p_Y(y)}\right)p_Y(y) = \int_{S\cap M_Y}\sum_{t\le x}\frac{p(t,y)}{p_Y(y)}dF_Y(y). \end{aligned}$$

Takže **podmíněná distribuční funkce** je v **diskrétném** případě tvaru

$$F(x|y) = \begin{cases} \sum\limits_{t\le x}\frac{p(t,y)}{p_Y(y)} & \text{pro } y \in M_Y, \\ 0 & \text{pro } y \in (\mathbb{R}-M_Y), \end{cases}$$

a **podmíněná pravděpodobnostní funkce** je rovna

$$p(x|y) = \begin{cases} \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} & \text{pro } y \in M_Y, \\ 0 & \text{pro } y \in (\mathbb{R}-M_Y), \end{cases}.$$

(b) <u>Spojitý případ</u>: $\mathbf{Z} = (X,Y)' \sim f(x,y)$, $X \sim f_X(x)$, $M_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$, $Y \sim f_Y(y)$, $M_Y = \{y \in \mathbb{R} : f_Y(y) > 0\}$. Počítejme

$$\begin{aligned} P(X \le x, Y \in S) &= \int_S\int_{-\infty}^x f(t,y)dtdy \\ &= \int_{S\cap M_Y}\int_{-\infty}^x f(t,y)dtdy + \int_{S\cap(\mathbb{R}-M_Y)}\int_{-\infty}^x \underbrace{f(t,y)}_{=0}dtdy \\ &= \int_{S\cap M_Y}\left(\int_{-\infty}^x \frac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt\right)f_Y(y)dy \\ &= \int_{S\cap M_Y}\left(\int_{-\infty}^x \frac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt\right)dF_Y(y). \end{aligned}$$

Takže **podmíněná distribuční funkce** je v diskrétném případě tvaru

$$F(x|y) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x}\frac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt & \text{pro } y \in M_Y, \\ 0 & \text{pro } y \in (\mathbb{R}-M_Y), \end{cases}$$

a **podmíněná hustota** je rovna

$$f(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{pro } y \in M_Y, \\ 0 & \text{pro } y \in (\mathbb{R}-M_Y), \end{cases}.$$

(2) Nechť $T = T(X,Y)$ je transformovaná náhodná veličina. Potom funkci

$$E(T(X,Y)|Y=y) = \int_{\mathbb{R}} T(x,y)dF(x|y) \qquad y \in \mathbb{R}$$

nazveme **podmíněnou střední hodnotou náhodné veličiny** X **za podmínky** $Y=y$ za předpokladu, že uvedený integrál pro všechna $y \in \mathbb{R}$ existuje (a je konečný).

Položme

$$E(T(X,Y)|Y=y) = h(y)$$

a definujme symbolem

$$E(T(X,Y)|Y) = h(Y)$$

náhodnou veličinu, kterou nazveme **(zobecněnou) podmíněnou střední hodnotou náhodné veličiny** $T(X,Y)$ **při daném** Y.

(a) <u>Diskrétní případ</u>:

$$\begin{aligned} E(T(X,Y)|Y=y) &= \int_{\mathbb{R}} T(x,y)dF(x|y) = \sum_{x\in M_X} T(x,y)\,p(x|y) \\ &= \begin{cases} \sum_{x\in M_X} T(x,y)\,\frac{p(x,y)}{p_Y(y)} & \text{pro } y \in M_Y, \\ 0 & \text{pro } y \in (\mathbb{R}-M_Y), \end{cases} \end{aligned}$$

a analogicky

$$E(T(X,Y)|Y) = \begin{cases} \sum_{x\in M_X} T(x,Y)\,\frac{p(x,Y)}{p_Y(Y)} & \text{pro } Y \in M_Y, \\ 0 & \text{pro } Y \in (\mathbb{R}-M_Y), \end{cases}.$$

(b) <u>Spojitý případ</u>:

$$\begin{aligned} E(T(X,Y)|Y=y) &= \int_{\mathbb{R}} T(x,y)dF(x|y) = \int_{\mathbb{R}} T(x,y)\,f(x|y)dx \\ &= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} T(x,y)\,\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx & \text{pro } y \in M_Y, \\ 0 & \text{pro } y \in (\mathbb{R}-M_Y), \end{cases} \end{aligned}$$

a analogicky

$$E(T(X,Y)|Y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} T(x,Y)\,\frac{f(x,Y)}{f_Y(Y)}dx & \text{pro } Y \in M_Y, \\ 0 & \text{pro } Y \in (\mathbb{R}-M_Y), \end{cases}.$$

Důležité vlastnosti podmíněných středních hodnot:

(i) Nechť X_1, X_2, Y jsou náhodné veličiny a a_0, a_1, a_2 jsou reálné konstanty, pak pokud střední hodnoty EX_1, EX_2 existují lze snadno dokázat, že platí

$$E(a_0 + a_1X_1 + a_2X_2|Y) = a_0 + a_1E(X_1|Y) + a_2E(X_2|Y), \tag{7}$$

(ii) Nechť X, Y jsou náhodné veličiny a střední hodnota EX existuje, pak

$$E\left[E(X|Y)\right] = EX. \tag{8}$$

Důkaz ukážeme pro spojitý případ:

$$\begin{aligned} EX &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \left(\int_{\mathbb{R}} f(x|y) f_Y(y)dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} x f(x|y)dx \right)}_{=E(X|Y=y)} f_Y(y)dy = E\left[E(X|Y)\right]. \end{aligned}$$

(iii) Nechť $T_1 = T_1(X,Y)$ a $T_2 = T_2(Y)$ jsou transformované náhodné veličiny, pak

$$E(T_1T_2|Y) = T_2 E(T_1|Y). \tag{9}$$

Důkaz ukážeme pro spojitý případ:

$$\begin{aligned} h(y) &= E(T_1T_2|Y=y) = E(T_1(X,Y)T_2(X)|Y=y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} T_1(x,y)T_2(y)f(x|y)dx \\ &= T_2(y)\int_{\mathbb{R}} T_1(x,y)f(x|y)dx = T_2 E(T_1|Y=y) \\ h(Y) &= E(T_1T_2|Y) = T_2E(T_1|Y). \end{aligned}$$

(3) Nechť $T = T(X,Y)$ je transformovaná náhodná veličina. **Podmíněný rozptyl** při daném $Y = y$ je definován vztahem

$$D(T(X,Y)|Y=y) = E\left\{[T - E(T|Y=y)]^2\,|Y=y\right\}$$

a **(zobecněný) podmíněný rozptyl** při daném Y je definován vztahem

$$D(T(X,Y)|Y) = E\left\{[T - E(T|Y)]^2\,|Y\right\}.$$

Platí

$$DT = E\left[D(T|Y)\right] + D\left[E(T|Y)\right],$$

neboť

$$\begin{aligned} D(T|Y) &= E\left\{[T - E(T|Y)]^2\,|Y\right\} \\ &= E\left\{[(T-ET) - (E(T|Y)-ET)]^2\,|Y\right\} \\ &= E\left\{(T-ET)^2 - 2(T-ET)[E(T|Y)-ET] + [E(T|Y)-ET]^2|Y\right\} \\ &= E[(T-ET)^2|Y] - 2[E(T|Y)-ET]\underbrace{E[(T-ET)|Y]}_{\overset{viz(7)}{=}E(T|Y)-ET} + [E(T|Y)-ET]^2 \\ &= E[(T-ET)^2|Y] - [E(T|Y)-ET]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(T-ET)^2|Y] &= D(T|Y) + [E(T|Y)-ET]^2 \\ \underbrace{E\left\{E[(T-ET)^2|Y]\right\}}_{\overset{viz(7)}{=}E[(T-ET)^2=DT} &= E[D(T|Y)] + E[E(T|Y) - \underbrace{ET}_{\overset{viz(8)}{=}E[E(T|Y)]}]^2 \\ &= E[D(T|Y)] + \underbrace{E[E(T|Y) - E[E(T|Y)]]^2}_{=D[E(T|Y)]} \\ &= E[D(T|Y)] + D[E(T|Y)] \end{aligned}$$

Celkově tedy dostáváme

$$DT = E[D(T|Y)] + D[E(T|Y)].$$

Věta 3.5. ***Rao-Blackwellova***. *Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1,\dots,X_n)'$ je náhodný výběr z rozdělení pravděpodobnosti $P_{\boldsymbol\theta}$, kde $\boldsymbol\theta$ je vektor neznámých parametrů. Nechť existuje postačující statistika $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ pro parametr $\boldsymbol\theta$. Nechť $\gamma(\boldsymbol\theta)$ je daná parametrická funkce a statistika $T(\mathbf{X})$ je jejím nestranným odhadem, přičemž $ET(\mathbf{X})^2 < \infty$ pro každé $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$. Pak platí*

(i) Pro parametrickou funkci $\gamma(\boldsymbol\theta)$ existuje nestranný odhad

$$S^*(\mathbf{X}) = S^*\left(\mathbf{S}(\mathbf{X})\right),$$

který je funkcí postačující statistiky $\mathbf{S}(\mathbf{X})$.

(ii) Pro rozptyl nestranného odhadu $S^*(\mathbf{X})$ platí

$$DS^*(\mathbf{X}) \le DT(\mathbf{X}) \qquad \text{pro každé } \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta. \tag{10}$$

(iii) V nerovnosti (10) platí rovnost právě když

$$S^*(\mathbf{X}) = T(\mathbf{X}) \quad \text{s pravděpodobností 1 pro každé } \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta.$$

Důkaz. Nechť $T = T(\mathbf{X})$ je libovolný nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol\theta)$ a $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X})$ je postačující statistika pro parametr $\boldsymbol\theta$.

(i) Položme

$$\boxed{S^*(s) = E\left(T(\mathbf{X})|\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}\right)}.$$

Protože $S(\mathbf{X})$ je postačující statistikou, funkce $S^*(s)$ nezávisí na $\boldsymbol\theta$, tj.

$$S^* = S^*(\mathbf{S}) = S^*\left(\mathbf{S}(\mathbf{X})\right) = E\left[T(\mathbf{X})|\mathbf{S}(\mathbf{X})\right] = E(T|\mathbf{S})$$

je statistika. Ukážeme, že S^* je nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol\theta)$. Pro každé $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$ platí:

$$ES^* = E\left[E\left(T|\mathbf{S}\right)\right] = ET = \gamma(\boldsymbol\theta).$$

(ii) Počítejme a upravujme rozptyl statistiky T

$$\begin{aligned} DT &= E\left[T - \gamma(\boldsymbol\theta)\right]^2 = E\left\{[T - S^*] + [S^* - \gamma(\boldsymbol\theta)]\right\}^2 \\ &= \underbrace{E\left[T - S^*\right]^2}_{\ge 0} + 2\underbrace{E\left\{[T - S^*]\left[S^* - \gamma(\boldsymbol\theta)\right]\right\}}_{=0} + \underbrace{E\left[S^* - \gamma(\boldsymbol\theta)\right]^2}_{DS^*} \end{aligned}$$

tj.

$$DT \ge DS^*,$$

neboť střední hodnotu součinu dvou statistik lze vyjádřit takto

$$\begin{aligned} \underbrace{E\left\{[T - S^*]\left[S^* - \gamma(\boldsymbol\theta)\right]\right\}}_{E(U\cdot V)} &= \underbrace{E\left\{E\left\{[T - S^*]\left[S^* - \gamma(\boldsymbol\theta)\right]|S\right\}\right\}}_{E(E(U\cdot V|\mathbf{S}))} \\ &= E\left\{ \left[S^* - \gamma(\boldsymbol\theta)\right] \underbrace{E\left\{[T - S^*]\,|\mathbf{S}\right\}}_{=0} \right\} = 0. \end{aligned}$$

(iii) V nerovnosti (10) platí rovnost právě když

$$E\left[T - S^*\right]^2 = 0 \quad \text{pro všechna } \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta,$$

tj. když pro všechna $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$ platí

$$S^*(\mathbf{X}) = T(\mathbf{X}) \quad \text{s pravděpodobností 1.} \quad \square$$

$\square$

Poznámka 3.6. Z uvedené věty vyplývá, že při hledání nejlepších nestranných odhadů se můžeme omezit na odhady, které jsou funkcemi postačujících statistik. Věta 3.5 dává návod, jak určit nestranný odhad, který je funkcí postačující statistiky, jestliže známe libovolný nestranný odhad.

Příklad 3.7. Uvažujme výběr z alternativního rozdělení s parametrem $\theta > 0$ s pravděpodobnostní funkcí
$$f_X(x) = P(X = x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$
a odhad parametrické funkce $\boxed{\gamma(\theta) = \theta}$ počítejme pomocí podmíněné střední hodnoty $\boxed{S^* = E(T|S)}$, kde T je libovolný nestranný odhad $\gamma(\theta) = \theta$.

Je zřejmé, že nestranným odhadem parametru θ je i statistika
$$T = T(\mathbf{X}) = X_1,$$
tj. první člen výběru, neboť
$$EX_1 = \theta.$$
Jak jsme ukázali v příkladu 3.2, postačující statistikou pro parametr θ je statistika
$$S = S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i.$$
Statistika S je součtem nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením a tedy má binomické rozdělení s parametry n a θ, tj.
$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bi(n, \theta).$$
Všimněme si, že pravděpodobnost
$$P\left(X_1 = x, \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = P\left(X_1 = x, \sum_{i=2}^n X_i = s - x\right).$$
Náhodné veličiny $X_1 \sim A(\theta) \equiv Bi(1,\theta)$ a $\sum_{i=2}^n X_i \sim Bi(n-1,\theta)$ jsou nezávislé, takže
$$\begin{aligned}
P\left(X_1 = x, \sum_{i=1}^n X_i = s\right) &= P(X_1 = x)\, P\left(\sum_{i=2}^n X_i = s - x\right)\\
&= \theta^x(1-\theta)^{1-x}\binom{n-1}{s-x}\theta^{s-x}(1-\theta)^{n-1-s+x}\\
&= \binom{n-1}{s-x}\theta^s(1-\theta)^{n-s}.
\end{aligned}$$
Počítejme podmíněnou střední hodnotu za podmínky, že $S = s$
$$\begin{aligned}
S^*(s) = E(T|S = s) = E\left\{X_1 | \sum_{i=1}^n X_i = s\right\} &= \sum_{x=0,1} x\frac{P\left(X_1 = x, \sum_{i=1}^n X_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)}\\
= \frac{\binom{n-1}{s-x}\theta^s(1-\theta)^{n-s}}{\binom{n}{s}\theta^s(1-\theta)^{n-s}} = \frac{(n-1)!s!(n-s)!}{n!(s-1)!(n-s)!} = \frac{s}{n},
\end{aligned}$$
Tedy
$$S^*(S) = E(T|S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,$$
což je aritmetický průměr všech pozorování.

Podívejme se, jak to vypadá s rozptyly statistik $T = X_1$ a S^*.
$$\begin{aligned}
DT &= DX_1 = \theta(1-\theta)\\
DS^* &= D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\theta(1-\theta)}{n},
\end{aligned}$$
tedy rozptyl druhého nestranného odhadu se n krát zmenšil.

Příklad 3.8. Uvažujme výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\theta > 0$ s pravděpodobnostní funkcí
$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$
a odhad parametrické funkce $\boxed{\gamma(\theta) = \theta}$ počítejme pomocí podmíněné střední hodnoty $\boxed{S^* = E(T|S)}$, kde T je libovolný nestranný odhad $\gamma(\theta) = \theta$.

Je zřejmé, že nestranným odhadem parametru θ je i statistika
$$T = T(\mathbf{X}) = X_1,$$
tj. první člen výběru, neboť
$$EX_1 = \theta.$$
Jak jsme ukázali v příkladu 3.4, postačující statistikou pro parametr θ je statistika
$$S = S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i.$$
Dále je třeba si uvědomit, že statistika S je součtem nezávislých náhodných veličin s Poissonovým rozdělením a má také Poissonovo rozdělení s parametrem $n\theta$, tj.
$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim Po(n\theta).$$
Počítejme dále pravděpodobnost
$$P\left(X_1 = x, \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = P\left(X_1 = x, \sum_{i=2}^n X_i = s - x\right).$$
Náhodné veličiny $X_1 \sim Po(\theta)$ a $\sum_{i=2}^n X_i \sim Po((n-1)\theta)$ jsou nezávislé, takže
$$\begin{aligned}
P\left(X_1 = x, \sum_{i=1}^n X_i = s\right) &= P(X_1 = x)\, P\left(\sum_{i=2}^n X_i = s - x\right)\\
&= \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}\,\frac{e^{-(n-1)\theta}\,[(n-1)\theta]^{s-x}}{(s-x)!}.
\end{aligned}$$
Nyní již počítejme podmíněnou střední hodnotu za podmínky, že $S = s$
$$\begin{aligned}
S^*(s) = E(T|S = s) = E\left\{X_1 | \sum_{i=1}^n X_i = s\right\} &= \sum_{x=0}^s x\frac{P\left(X_1 = x, \sum_{i=1}^n X_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)}\\
= \sum_{x=0}^s x\frac{\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}\frac{e^{-(n-1)\theta}[(n-1)\theta]^{s-x}}{(s-x)!}}{\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^s}{s!}} &= \sum_{x=0}^s x\binom{s}{x}\left(\frac{1}{n}\right)^x\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s-x}.
\end{aligned}$$
Protože výraz $\sum_{x=0}^s x\binom{s}{x}\left(\frac{1}{n}\right)^x\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s-x}$ je střední hodnotou náhodné veličiny s binomickým rozdělením $Bi(s,\frac{1}{n})$, ihned dostaneme
$$S^*(s) = E(T|S = s) = \frac{s}{n}.$$
Tedy
$$S^*(S) = E(T|S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,$$
což je aritmetický průměr všech pozorování.

Stejně jak v předchozím případě, všimněme si rozptylů obou odhadů $T = X_1$ a S^*.

$$DT = DX_1 = \theta$$
$$DS^* = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\theta}{n},$$

tedy rozptyl druhého nestranného odhadu se n krát zmenšil.

Poznámka 3.9. Nahrazení nestranného odhadu T odhadem $S^* = E(T|\mathbf{S})$ ještě neznamená, že jsme mezi všemi nestrannými odhady našli odhad s nejmenším rozptylem. Úplnost postačující statistiky je pro to dostatečnou podmínkou.

Definice 3.10. Systém parametrických tříd rozdělení $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta}; \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$ nazveme **úplným**, pokud pro každou měřitelnou funkci $h(\mathbf{x})$ a náhodnou veličinu X s rozdělením z této třídy platí implikace: jestliže

$$Eh(X) = 0 \quad \text{pro každé } \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta,$$

pak

$$h(X) = 0 \quad \text{s pravděpodobností 1 pro každé } \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta.$$

Příklad 3.11. Nechť $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta}; \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$ je třídou binomických rozdělení

$$X \sim P(X = x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \qquad n \geq 1, \;\; 0 < \theta < 1 \;\; x = 0, 1, \ldots, n.$$

Ukážeme, že tento systém je **úplný**. Uvažujme funkci $h(x)$ na množině $\{0, 1, \ldots, n\}$, pro kterou platí

$$Eh(X) = 0 \quad \text{pro každé } \theta \in (0, 1).$$

Tato funkce musí splňovat podmínku

$$Eh(X) = \sum_{x=0}^n h(x)\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = 0 \quad \text{pro každé } \theta \in (0, 1).$$

Tuto podmínku můžeme napsat takto

$$Eh(X) = \sum_{x=0}^n h(x)\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = \underbrace{(1-\theta)^n}_{(1+z)^{-n}}\sum_{x=0}^n h(x)\binom{n}{x}\underbrace{\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x}_{z^x}$$
$$= (1+z)^{-n}\sum_{x=0}^n \binom{n}{x}h(x)z^x = 0 \quad \text{pro } z > 0$$

Na jedné straně máme polynom n-tého řadu v proměnné z. Pokud se má identicky rovnat nule, musí se všechny jeho koeficienty rovnat nule, tj.

$$h(x) = 0 \quad \text{pro } x = 0, 1, \ldots, n.$$

Proto

$$\boxed{P(h(X) = 0) = 1 \quad \text{pro každé } \theta \in (0, 1)}.$$

Příklad 3.12. Nechť $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta}; \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$ je třídou Poissonových rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Tento systém je opět **úplný**. Uvažujme funkci $h(x)$ na množině $\{0, 1, 2, \ldots\}$, pro kterou platí

$$Eh(X) = 0 \quad \text{pro každé } \theta > 0.$$

Tato funkce musí splňovat podmínku

$$Eh(X) = \sum_{x=0}^\infty h(x)\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} = 0 \quad \text{pro každé } \theta > 0.$$

Takže

$$\sum_{x=0}^\infty h(x)\frac{\theta^x}{x!} = 0 \quad \text{pro každé } \theta > 0.$$

Tato mocninná řada je rovna nule pro všechna $\theta > 0$, takže všechny její koeficienty musí být rovnu nule, tj.

$$h(x) = 0 \quad \text{pro } x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Proto

$$\boxed{P(h(X) = 0) = 1 \quad \text{pro každé } \theta > 0}.$$

Příklad 3.13. Nechť $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta}; \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$ je třídou normálních rozdělení

$$X \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R}, ; \theta > 0$$

Tento systém není úplný. Definujme

$$h(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}.$$

Pro libovolné $\theta > 0$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\int_{-\infty}^\infty h(x)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}dx = -\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}dx}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}dx}_{=\frac{1}{2}} = 0.$$

Tedy z vlastnosti, že $Eh(X) = 0$ neplyne, že $P(h(X) = 0) = 1$.

Definice 3.14. Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný výběr z rodělení pravděpodobnosti $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta}; \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$. Statistiku $T(\mathbf{X})$ nazveme **úplnou vzhledem k** $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta}; \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$, pokud její rozdělení pravděpodobností tvoří úplný systém.

Nyní vyslovíme větu o jednoznačnosti nestranných odhadů založených na postačujících statistikách.

Věta 3.15. ***První Lehmanova-Sheffého věta***. *Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný výběr z rodělení pravděpodobnosti $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta}; \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$. Předpokládejme, že $T = T(\mathbf{X})$ je **nestranný odhad parametrické funkce** $\gamma(\boldsymbol\theta)$, přičemž $ET^2 < \infty$ pro každé $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$. Nechť $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X})$ je **úplná postačující statistika**. Definujme*

$$S^* = E(T|\mathbf{S}).$$

*Pak S^* je **nejlepší nestranný odhad parametrické funkce** $\gamma(\boldsymbol\theta)$ a je **jediný**.*

Důkaz. Nechť $T = T(\mathbf{X})$ a $T_2 = T_2(\mathbf{X})$ jsou nestranné odhady parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol\theta)$ s konečnými druhými momenty. Označme $S_2^* = E(T_2|\mathbf{S})$. Pro každé $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$ platí

$$ES^* = \gamma(\boldsymbol\theta) \qquad DS^* \leq DT$$
$$ES_2^* = \gamma(\boldsymbol\theta) \qquad DS_2^* \leq DT_2$$

Máme tedy

$$E(S^* - S_2^*) = E(E(T|\mathbf{S}) - E(T_2|\mathbf{S})) = 0 \quad \text{pro každé } \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta.$$

Z předpokladu o úplnosti plyne, že

$$P(S^* = S_2^*) = 1 \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}.$$

Z toho plyne závěr, že pro nestranné odhady S^* a T_2 platí

$$DS^* \leq DT_2.$$

Proto S^* je nejlepší. Z Raovy-Blackwellovy věty plyne, že T_2 bude stejně dobrý odhad jako S_2^* právě tehdy, bude-li

$$T_2 = S_2^* \quad \text{skoro jistě při každém } \boldsymbol{\theta}.$$

Jelikož víme, že $S^* = S_2^*$, dostáváme odtud $T_2 = S^*$ skoro jistě. □

Poznámka 3.16. V tomto případě nejmenší možný rozptyl nestranného odhadu parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ je roven DS^*. Přitom jde o skutečné dosažitelné minimum.

VĚTA 3.17. ***Druhá Lehmanova-Sheffého věta.*** *Nechť* $\mathbf{S}$ *je úplná postačující statistika. Nechť*

$$W = g(\mathbf{S})$$

je nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ *a nechť* $EW^2 < \infty$ *pro každé* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. *Pak* W *je* ***nejlepší nestranný odhad parametrické funkce*** $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ *a* ***je jediný***.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem první Lehmannovy-Sheffého věty. □

Příklad 3.18. Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$f(x,\theta) = P(X = x) = \theta^x (1-\theta)^{n-x} \qquad 0 < \theta < 1 \;\; x = 0,1$$

s pravděpodobností úspěchu $\theta \in (0,1)$, kde θ je neznámý parametr. Budeme hledat nejlepší nestranný odhad pro

- $\boxed{\theta}$, což je střední hodnota alternativního rozdělení
- a v případě, že $n \geq 2$ také pro $\boxed{\theta(1-\theta))}$, což je rozptyl alternativního rozdělení

$\boxed{\theta}$: Z příkladů 3.2 a 3.11 vyplývá, že statistika

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n,\theta)$$

je **úplnou postačující statistikou**, takže statistika

$$S^*(S) = E(T|S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

odvozená pomocí Rao-Blackwellovy věty je podle první Lehmanovy-Sheffého věty **nejlepším nestranným odhadem parametru** θ.

$\boxed{\theta(1-\theta))}$: Pomocí Rao-Blackwellovy věty nejprve hledejme statistiku $S^* = E(T|S)$, kde T je nějaký nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\theta) = \theta(1-\theta)$ a S je postačující statistikou pro parametr θ.

Jako **nestranný odhad parametrické funkce** $\gamma(\theta) = \theta(1-\theta)$ vezměme například

$$T = X_1(1 - X_2),$$

neboť

$$ET = E[X_1(1-X2)] = \underbrace{EX_1 \cdot E(1-X_2)}_{\text{nezávislost } X_1, X_2} = \theta(1-\theta).$$

Pro $s = 0, 1, \ldots, n$ počítejme

$$S^*(s) = E(T|S = s) = E\left(X_1(1-X_2)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n} X_i = s\right)$$
$$= \frac{P\left(X_1 = 1, 1 - X_2 = 1, \sum_{i=1}^{n} X_i = s\right)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)}$$

Je-li $s = 0$, je zřejmé, že

$$E\left(X_1(1-X_2)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n} X_i = s\right) = 0.$$

Nechť nyní $s > 0$. Pak

$$S^*(s) = \frac{P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P\left(\sum_{i=3}^{n} X_i = s-1\right)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)}$$
$$= \frac{\theta(1-\theta)\binom{n-2}{s-1}\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-2-s+1}}{\binom{n}{s}\theta^s(1-\theta)^{n-s}} = \frac{(n-2)!s!(n-s)!}{n!(s-1)!(n-s-1)!}$$
$$= \frac{s(n-s)}{n(n-1)} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{s}{n}\cdot\left(1 - \frac{s}{n}\right)$$

a

$$S^*(S) = \frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X}),$$

kde

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Protože statistika

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n,\theta)$$

je **úplnou postačující statistikou**, pak podle první Lehmanovy-Sheffého věty je $S^*(S)$ **nejlepším nestranným odhadem parametrické funkce** $\theta(1-\theta)$.

Veličiny $X_1, \ldots, X_n$ můžeme chápat jako výběr z $Bi(1,\theta)$. Toto rozdělení má rozptyl $\theta(1-\theta)$. Všimněme si, že pro $i = 1, \ldots, n$ platí

$$X_i^2 = X_i,$$

neboť tyto veličiny nabývají pouze hodnot 0 a 1. Nestranný odhad rozptylu pořízený na základě daného výběru je

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(n\bar{X} - n\bar{X}^2\right)$$
$$= \frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})$$

a odhad $\boxed{S^2}$ je tedy totožný s **nejlepším nestranným odhadem** parametrické funkce $\theta(1-\theta)$.

Příklad 3.19. Nechť $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

kde θ je neznámý parametr. Budeme hledat nejlepší nestranný odhad pro

- $\boxed{\theta}$, což je střední hodnota Poissonova rozdělení
- $\boxed{e^{-\theta} = P(X=0)}$

$\boxed{\theta}$: Z příkladů 3.4 a 3.12 vyplývá, že statistika

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po(n\theta)$$

je **úplnou postačující statistikou**, takže statistika

$$S^*(S) = E(T|S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

odvozená pomocí Rao-Blackwellovy věty je podle první Lehmanovy-Sheffého věty **nejlepším nestranným odhadem parametru** θ.

$\boxed{e^{-\theta}}$: Pomocí Rao-Blackwellovy věty nejprve hledejme statistiku $S^* = E(T|S)$, kde T je nějaký nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\theta) = e^{-\theta}$ a S je postačující statistikou pro parametr θ.

Položme

$$T = I_{\{0\}}(X_1) = I(X_1 = 0) = \begin{cases} 1 & X_1 = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože

$$ET = 1 \cdot P(T=1) + 0 \cdot P(T=0) = P(X_1 = 0) = e^{-\theta},$$

pak statistika T je **nestranným odhadem parametrické funkce** $\gamma(\theta) = e^{-\theta}$.

Je-li $n = 1$, pak statistika T je **nejlepším nestranným odhadem** parametrické funkce $\gamma(\theta) = e^{-\theta}$.

Pro $n > 1$ počítejme

$$\begin{aligned} S^*(s) &= E(T|S=s) = E\left(I(X_1 = 0) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i = s \right) \\ &= \frac{P\left(T=1, \sum_{i=1}^{n} X_i = s\right)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)} = \frac{P\left(X_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} X_i = s\right)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)} \\ &= \frac{P(X_1=0) P\left(\sum_{i=2}^{n} X_i = s\right)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = s)} = \frac{\frac{e^{-\theta} e^{-(n-1)\theta} [(n-1)\theta]^s}{s!}}{\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^s}{s!}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^s \end{aligned}$$

a

$$S^*(S) = \frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X}),$$

kde

$$\bar{X} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

Protože statistika

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po(n\theta)$$

je **úplnou postačující statistikou**, pak podle první Lehmanovy-Sheffého věty je $S^*(S)$ **nejlepším nestranným odhadem parametrické funkce** $e^{-\theta}$.

Spočítejme ještě

$$\begin{aligned} ES^* = ES^*(S) &= E\left(\frac{n-1}{n}\right)^S = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^s \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^s}{s!} \\ &= e^{-n\theta} \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} \frac{[(n-1)\theta]^s}{s!}}_{=e^{(n-1)\theta}} = e^{-\theta} \end{aligned}$$

$$ES^{*2} = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2s} \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^s}{s!} = e^{-n\theta} \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{(n-1)^2}{n}\theta\right]^s}{s!}}_{=e^{\frac{(n-1)^2}{n}\theta}} = e^{-2\theta+\frac{\theta}{n}}$$

$$DS^* = ES^{*2} - (ES^*)^2 = e^{-2\theta+\frac{\theta}{n}} - e^{-2\theta} = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right).$$

4. REGULÁRNÍ SYSTÉM HUSTOT A DOLNÍ MEZ ROZPTYLU NESTRANNÝCH ODHADŮ

Je zcela zřejmé, že na základě konečně mnoho pozorování $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ nelze odhadnout parametrickou funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ zcela bez chyby, tj. nelze najít nestranný odhad $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)'$ s nulovým rozptylem.

Existuje však **dolní mez**, pod kterou nemůže rozptyl žádného nestranného odhadu klesnout.

Tato dolní mez záleží ovšem, jak za chvíli ukážeme,
- na rozsahu náhodného výběru, tj. na n,
- na rodině rozdělení $F(x; \boldsymbol{\theta})$, ze kterého výběr pochází
- a na parametrické funkci $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Při odvozování **dolní meze rozptylu nestranných odhadů** se omezíme
- na případ jednorozměrného parametru θ
- a na rodiny rozdělení $F(x; \theta)$, která splňují jisté podmínky, a to tzv. podmínky regularity.

V dalším budeme značit symbolem $\boxed{\nu}$ $\sigma-$konečnou míru na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (např. *Lebesgueova* nebo *čítací*) a $\boxed{f(x; \boldsymbol{\theta})}$ nezápornou měřitelnou funkci, tzv. **hustotu pravděpodobnosti vzhledem k míře** ν. Tedy $f(x; \theta)$ jsou jak hustoty absolutně spojitých náhodných veličin, tak pravděpodobnostní funkce.

Definice 4.1. Mějme parametrický prostor $\Theta \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že **systém parametrických hustot**

$$\mathcal{F}_{\text{reg}} = \{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$$

je **regulární**, jestliže platí

(1) $\Theta \subset \mathbb{R}$ je otevřená borelovská množina.

(2) Množina $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x; \theta) > 0\}$ nezávisí na parametru θ.

(3) Pro každé $x \in M$ existuje konečná parciální derivace

$$f'(x; \theta) = \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}.$$

(4) Pro všechny $\theta \in \Theta$ platí

$$\int_M \frac{f'(x; \theta)}{f(x; \theta)} dF(x; \theta) = \int_M \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} dF(x; \theta) = 0,$$

kde $F(x; \theta)$ je odpovídající distribuční funkce.

(5) Pro všechny $\theta \in \Theta$ je integrál

$$J(\theta) = \int_M \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dF(x; \theta)$$

konečný a nenulový.

Veličina $J(\theta)$ se nazývá **Fisherova informace o parametru θ.**

Poznámka 4.2. Pro jednoduchost někdy hovoříme o **regulárnosti** $f(x; \theta)$, ne o **regulárnosti systému hustot**.

Poznámka 4.3. Podmínku (4) lze ekvivalentně napsat takto

$$E_\theta \left(\frac{f'(X; \theta)}{f(X; \theta)} \right) = 0$$

a analogicky veličinu $J(\theta)$ lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$J(\theta) = E_\theta \left(\frac{f'(X; \theta)}{f(X; \theta)} \right)^2.$$

Pro náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ zaveďme tyto transformované náhodné veličiny

$$U_j(\theta) = \frac{f'(X_j; \theta)}{f(X_j; \theta)}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

tzv. j-té **skóre**, které mají díky podmínce (4) nulovou střední hodnotu a rozptyl

$$D_\theta U_j(\theta) = D_\theta \left(\frac{f'(X_j; \theta)}{f(X_j; \theta)} \right) = E_\theta \left(\frac{f'(X_j; \theta)}{f(X_j; \theta)} \right)^2 = J(\theta),$$

neboť všechny mají totéž rozdělení.

Dále označme

$$\sum_{j=1}^n U_j(\theta) = \mathbf{U}_n^*(\theta)$$

a počítejme střední hodnotu a rozptyl

$$E_\theta \mathbf{U}_n^*(\theta) = E_\theta \left(\sum_{j=1}^n U_j(\theta) \right) = \sum_{j=1}^n E_\theta U_j(\theta) = 0$$

$$D_\theta \mathbf{U}_n^*(\theta) = D_\theta \left(\sum_{j=1}^n U_j(\theta) \right) \overset{nez.}{=} \sum_{j=1}^n D_\theta U_j(\theta) = nJ(\theta).$$

Poznámka 4.4. Podmínka (4) souvisí s otázkou, zda při derivování rovnosti

$$1 = \int_M dF(x; \theta)$$

lze zaměnit pořadí derivace a integrálu, tj.

$$\boxed{0} = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_M dF(x; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_M \frac{f(x; \theta)}{f(x; \theta)} dF(x; \theta) \overset{?}{=} \underbrace{\int_M \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{f(x; \theta)}{f(x; \theta)} dF(x; \theta) = \boxed{0}}_{(*)}.$$

Pokud platí $(*)$, pak pořadí lze zaměnit, tedy Uvažujme nejprve spojitý případ

$$\boxed{0} = \int_M dF(x; \theta) = \int_M \frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta)\, d\nu(x) = \boxed{\int_M f'_j(x; \theta)\, d\nu(x)}$$
$$= \int_M f'(x; \theta) \frac{f(x; \theta)}{f(x; \theta)}\, d\nu(x) = \boxed{\int_M \frac{f'(x; \theta)}{f(x; \theta)} dF(x; \theta)},$$

kde ν je čítací (numerická) nebo Lebesgueova míra.

Věta 4.5 (Raova-Cramerova nerovnost). *Mějme náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ z rozdělení s regulární hustotou $f \in \mathcal{F}_{reg}$. Nechť $T_n(\mathbf{X})$ je nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\theta)$, pro který pro všechna $\theta \in \Theta$ platí $E_\theta T_n(\mathbf{X}) < \infty$.*
Dále nechť platí

(i) pro všechna $\theta \in \Theta$ existuje $\gamma'(\theta)$;
(ii) pro všechna $\theta \in \Theta$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_M \cdots \int_M T_n(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^n dF(x_i;\theta) = \int_M \cdots \int_M T_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^n dF(x_i;\theta)$$

Pak pro všechna $\theta \in \Theta$ platí

$$D_\theta T_n(\mathbf{X}) \geq \frac{(\gamma'(\theta))^2}{nJ(\theta)} = C_n(\theta)$$

a $C_n(\theta)$ se nazývá ***DOLNÍ RAOVA-CRAMEROVA HRANICE****.*

Důkaz. Protože $T_n(\mathbf{Y})$ je nestranným odhadem parametrické funkce $\gamma(\theta)$, platí

$$\gamma(\theta) = E_\theta T_n(\mathbf{X}) = \int_M \cdots \int_M T_n(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^n dF(x_i;\theta)$$
$$= \int_M \cdots \int_M T_n(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n),$$

kde ν je čítací (numerická) nebo Lebesgueova míra.

Díky předpokladům ve větě můžeme psát

$$\gamma'(\theta) = [E_\theta T_n(\mathbf{X})]' = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_M \cdots \int_M T_n(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)\, d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n)$$
$$= \int_M \cdots \int_M T_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)\, d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n)$$
$$= \int_M \cdots \int_M T_n(x_1,\ldots,x_n)\sum_{j=1}^n f'(x_j;\theta)\prod_{i=1, i\neq j}^n f(x_i;\theta)\, d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n)$$
$$= \int_M \cdots \int_M T_n(x_1,\ldots,x_n)\sum_{j=1}^n \frac{f'(x_j;\theta)}{f(x_j;\theta)}\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)\, d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n)$$
$$= E_\theta\left[T_n(\mathbf{X})\sum_{j=1}^n \frac{f'(X_j;\theta)}{f(X_j;\theta)}\right] = E_\theta\left[T_n(\mathbf{X})\sum_{j=1}^n U_j(\theta)\right]$$

Označme

$$\sum_{j=1}^n U_j(\theta) = \mathbf{U}_n^*(\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \gamma'(\theta) = E_\theta\left[\mathbf{U}_n^*(\theta)T_n(\mathbf{X})\right]$$

takže

$$|\gamma'(\theta)| = |E[\mathbf{U}_n^* T_n(\mathbf{X})]| = |\underbrace{C(\mathbf{U}_n^*(\theta), T_n(\mathbf{X}))}_{viz E\mathbf{U}_n^*=0}| \overset{Schwarz.ner.}{\leq} \sqrt{DT_n(\mathbf{X})}\underbrace{\sqrt{D\mathbf{U}_n^*(\theta)}}_{=\sqrt{nJ(\theta)}}.$$

tj.

$$(\tau'(\theta))^2 \leq DT_n(\mathbf{X})nJ(\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\gamma'(\theta))^2}{nJ(\theta)} \leq DT_n(\mathbf{X}),$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Definice 4.6. Řekneme, že odhad $T_n(\mathbf{X})$ je

(a) **VYDATNÝM** (také EFICIENTNÍM) odhadem $\gamma(\boldsymbol{\theta})$, pokud

$$\varepsilon_n[T_n(\mathbf{Y})] = \frac{C_n(\boldsymbol{\theta})}{DT_n(\mathbf{Y})} = 1$$

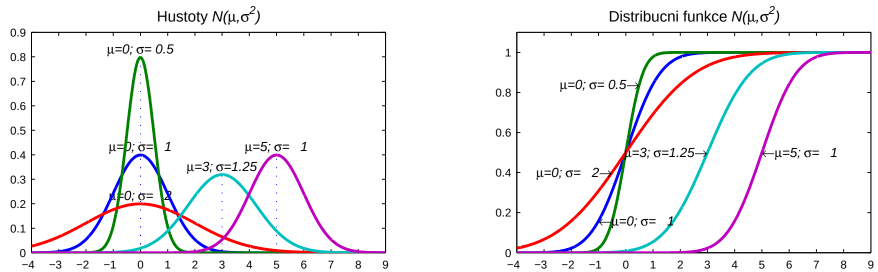
(b) **ASYMPTOTICKY VYDATNÝM** odhadem $\tau(\boldsymbol{\theta})$, pokud

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n[T_n(\mathbf{X})] = 1$$

a číslo $\boxed{\varepsilon_n[T_n(\mathbf{Y})]}$ se nazývá **vydatnost** (eficience) **odhadu** $T_n(\mathbf{X})$.

Příklad 4.7. NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ A REGULARITA. Mějme náhodnou veličinu Y s normálním rozdělením

$$\boxed{Y \sim N(\mu,\sigma^2)} \sim f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2},$$



přičemž:

(a) $\boxed{\sigma^2 \text{ je \textbf{známé}, tj. } \theta_1 = \mu.}$

Pak **hustota** $f(y)$ **je regulární v prvních derivacích** (viz body (1) až (5)) a také **je regulární v druhých derivacích** (viz body (1) až (6))

(1) Množina $\boldsymbol{\Theta}_1 = (-\infty,\infty)$ je neprázdná otevřená množina.
(2) Množina $M = \{y \in \mathbb{R} : f(y) > 0\}$ je $(-\infty,\infty)$ a nezávisí na $\mu \in \boldsymbol{\Theta}_1$.
(3) Pro každé $\mathbf{y} \in M$ existuje konečná derivace

$$f'_\mu(y) = \tfrac{d\, f(y)}{d\, \mu} = f(y)\tfrac{y-\mu}{\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_1 = \tfrac{Y-\mu}{\sigma^2}}.$$

(4) Pro všechna $\mu \in \boldsymbol{\Theta}_1$ platí

$$\boxed{EU_1} = \int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{f'_\mu(y)}{f(y)}f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f'_\mu(y)dy = \tfrac{1}{\sigma^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu)f(y)dy}_{0} = \boxed{0}.$$

(5) Pro všechna $\mu \in \mathbb{R}$ je integrál J_{11} konečný a kladný

$$\boxed{J_{11}} = EU_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\tfrac{f'_\mu(y)}{f(y)}\right)^2 f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{(f'_\mu(y))^2}{f(y)}dy$$
$$= \tfrac{1}{\sigma^4}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu)^2 f(y)dy}_{DY=\sigma^2}$$
$$= \boxed{\tfrac{1}{\sigma^2}} > 0.$$

(6) Protože $f''_{\mu\mu}(y) = \frac{d}{d\,\mu}\left(\frac{y-\mu}{\sigma^2} f(y)\right) = \frac{(y-\mu)^2-\sigma^2}{\sigma^4} f(y)$, pak

$$\boxed{E\left(\frac{f''_{\mu\mu}(Y)}{f(Y)}\right)} = E\left(\frac{(Y-\mu)^2-\sigma^2}{\sigma^4}\right) = \frac{1}{\sigma^4}\underbrace{E(Y-\mu)^2}_{DY=\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} = \boxed{0}.$$

(b) $\boxed{\mu \text{ je } \textbf{známé}, \text{ tj. } \theta_2 = \sigma^2.}$

Pak **hustota** $f(y)$ **je regulární v prvních derivacích** (viz body (1) až (5)) a také **je regulární v druhých derivacích** (viz body (1) až (6))

(1) Množina $\boldsymbol{\Theta}_2 = (0, \infty)$ je neprázdná otevřená množina.
(2) Množina $M = \{y \in \mathbb{R} : f(y) > 0\}$ je $(-\infty, \infty)$ a nezávisí na $\sigma^2 \in \boldsymbol{\Theta}_2$.
(3) Pro každé $\mathbf{y} \in M$ existuje konečná derivace

$$f'_{\sigma^2}(y) = \frac{d\,f(y)}{d\,\sigma^2} = f(y)\frac{(y-\mu)^2-\sigma^2}{2\sigma^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_2 = \frac{(Y-\mu)^2-\sigma^2}{2\sigma^4}}.$$

(4) Pro všechna $\sigma^2 \in \boldsymbol{\Theta}_2$ platí

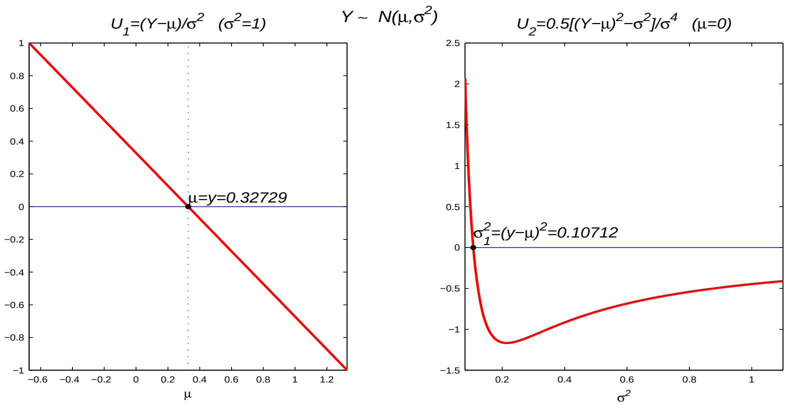
$$\boxed{EU_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_{\sigma^2}(y)}{f(y)} f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f'_{\sigma^2}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{(y-\mu)^2-\sigma^2}{2\sigma^4}dy = \boxed{0}.$$

(5) Pro všechna $\sigma^2 \in \boldsymbol{\Theta}_2$ je integrál J_{22} konečný a kladný

$$\boxed{J_{22}} = EU_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{f'_{\sigma^2}(y)}{f(y)}\right)^2 f(y)dy = \frac{1}{4\sigma^8}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(y-\mu)^2-\sigma^2\right]^2 f(y)dy$$
$$= \frac{1}{4\sigma^8}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu)^4 f(y)dy}_{\mu_4=3\sigma^4} - \frac{2\sigma^2}{4\sigma^8}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu)^2 f(y)dy}_{\sigma^2} + \frac{\sigma^4}{4\sigma^8}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy}_{1}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2\sigma^4}} > 0$$

(6) Protože $f''_{\sigma^2\sigma^2}(y) = \frac{d}{d\,\sigma^2}\left(f(y)\frac{(y-\mu)^2-\sigma^2}{2\sigma^4}\right) = \frac{(y-\mu)^4-6\sigma^2(y-\mu)^2+3\sigma^4}{4\sigma^8} f(y)$, pak

$$\boxed{E\left(\frac{f''_{\sigma^2\sigma^2}(Y)}{f(Y)}\right)} = \frac{1}{4\sigma^8}\left[\underbrace{E(Y-\mu)^4}_{\mu_4=3\sigma^4} - 6\sigma^2\underbrace{E(Y-\mu)^2}_{DY=\sigma^2} + 3\sigma^4\right] = \boxed{0}.$$



Ukázky skórových funkcí U_1 (resp. U_2) pro $N(\mu, \sigma^2)$ při známém σ^2 (resp. μ).

__Příklad__ **4.8.** NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ. Mějme náhodnou veličinu Y s normálním rozdělením

$$\boxed{Y \sim N(\mu, \sigma^2)} \sim f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2}$$

a náhodný výběr $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ z téhož rozdělení, přičemž:

(a) $\boxed{\sigma^2 \text{ je } \textbf{známé}, \text{ tj. } \theta_1 = \mu.}$

(1) Skórová funkce náhodného výběru (viz příklad 4.7): $\boxed{U_1^*(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i - \mu}{\sigma^2}}$.

(2) Fisherova informace o parametru μ z náhodného výběru (viz příklad 4.7):

$$\boxed{J_n(\mu) = nJ(\mu) = \frac{n}{\sigma^2}}.$$

(3) Uvažujme parametrickou funkci $\boxed{\tau(\mu) = \mu}$ a výběrový průměr, tj. statistiku

$$T_n(\mathbf{Y}) = \boxed{\bar{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

(i) Platí $\boxed{E\bar{Y} = \mu}$, tj. $\bar{Y}$ je **nestranným odhadem** parametru μ a $D\bar{Y} = \frac{\sigma^2}{n}$.
(ii) $\bar{Y}$ je **regulárním odhadem** parametrické funkce $\tau(\mu) = \mu$, přičemž $\tau'_\mu(\mu) = 1$, neboť $\bar{Y}$ je nestranným odhadem a platí

$$\boxed{E\left(\bar{Y}U_1^*(\mu)\right)} = \frac{1}{n\sigma^2}E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mu\right)\right]$$
$$= \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{EY_i^2}_{\sigma^2+\mu^2} + \frac{2}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\underbrace{E(Y_iY_j)}_{\mu^2(nez.)} - \frac{n\mu^2}{\sigma^2}$$
$$= \frac{\sigma^2+\mu^2}{\sigma^2} + \frac{n(n-1)}{n\sigma^2}\mu^2 - \frac{n\mu^2}{\sigma^2} = \boxed{1 = \tau'_\mu(\mu)}.$$

(iii) $\bar{Y}$ je **vydatným odhadem** μ, neboť dolní Raova-Cramerova hranice

$$\boxed{C_n(\mu)} = \frac{\left[\tau'_\mu(\mu)\right]^2}{J_n(\mu)} = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}} = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}} = D\bar{Y}.$$

(b) $\boxed{\mu \text{ je } \textbf{známé}, \text{ tj. } \theta_2 = \sigma^2.}$

(1) Skórová funkce náhodného výběru (viz příklad 4.7):

$$U_2^*(\sigma^2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\mu)^2-\sigma^2}{2\sigma^4} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} Z_i - \frac{1}{2\sigma^2}.$$

(2) Fisherova informace o parametru $\tau(\sigma^2) = \sigma^2$ z náhodného výběru (viz příklad 4.7):

$$J_n(\sigma^2) = nJ(\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4}.$$

(3) Uvažujme parametrickou funkci $\boxed{\tau(\sigma^2)=\sigma^2}$ a výběrový rozptyl, tj. statistiku

$$T_n(\mathbf{Y})=\boxed{S^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(Y_i-\mu)^2}_{\text{označme } Z_i}-n(\bar{Y}-\mu)^2\right]$$
$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}Z_i-n(\bar{Y}-\mu)^2\right].$$

Počítejme

$$\begin{aligned} EZ_i &= DY_i=\sigma^2\\ DZ_i &= EZ_i^2-(EZ_i)^2=\mu_4-\sigma^4=2\sigma^4\\ C(Z_i,Z_j) &= E(Z_iZ_j)-\underbrace{E(Z_i)E(Z_j)}_{\sigma^4}=0 \qquad\Rightarrow\qquad E(Z_iZ_j)=\sigma^4 \text{ pro } i\neq j. \end{aligned}$$

Pak

(i) Snadno lze ukázat, že platí $\boxed{ES^2=\sigma^2}$, tj. S^2 je **nestranným odhadem** parametru σ^2. Dále obecně pro výběrový rozptyl platí:

$$DS^2=\frac{\mu_4}{n}-\frac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4$$

a protože v případě normálního rozdělení máme

$$\mu_4=3\sigma^2,$$

dostáváme

$$DS^2=\frac{3\sigma^2}{n}-\frac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4=\frac{\sigma^4\left[3(n-1)-(n-3)\right]}{n(n-1)}=\frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

(ii) S^2 je **regulárním odhadem** parametrické funkce $\tau(\sigma^2)=\sigma^2$, přičemž $\tau'_{\sigma^2}(\sigma^2)=1$, neboť je nestranným odhadem a platí

$$\boxed{E\big(S^2U_2^*(\sigma^2)\big)}=\frac{1}{2(n-1)\sigma^4}E\left[\Big(\sum_{i=1}^{n}Z_i-n(\bar{Y}-\mu)^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}Z_i-n\sigma^2\Big)\right]$$
$$=\frac{1}{2(n-1)\sigma^4}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\underbrace{EZ_i^2}_{\mu^4=3\sigma^4}+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\underbrace{E(Z_iZ_j)}_{\sigma^4}$$
$$-n\sum_{i=1}^{n}\underbrace{E\big(Z_i(\bar{Y}-\mu)^2\big)}_{\frac{(n+2)\sigma^4}{n^2}}$$
$$-n\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\underbrace{EZ_i}_{\sigma^2}+n^2\sigma^2\underbrace{E(\bar{Y}-\mu)^2}_{D\bar{Y}=\frac{\sigma^2}{n}}\Bigg]$$
$$=\frac{3n\sigma^4+n(n-1)\sigma^4-(n+2)\sigma^4-n^2\sigma^4+n\sigma^4}{2(n-1)\sigma^4}$$
$$=\boxed{1=\tau'_{\sigma^2}(\sigma^2)},$$

přičemž platí

$$E\big(Z_i(\bar{Y}-\mu)^2\big)=E\left\{Z_i\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{n^2}\Bigg[\underbrace{EZ_i^2}_{3\sigma^4}+\sum_{i\neq j=1}^{n}\underbrace{E(Z_iZ_j)}_{\sigma^4}$$
$$+\sum_{i\neq j=1}^{n}\sum_{i\neq j\neq k=1}^{n}\underbrace{E\big(Z_i(Y_j-\mu)(Y_k-\mu)\big)}_{0}\Bigg]$$
$$=\frac{1}{n^2}\left[3\sigma^4+(n-1)\sigma^4\right]=\frac{(n+2)\sigma^4}{n^2}.$$

(iii) S^2 je **asymptoticky vydatným odhadem** σ^2, neboť dolní Raova-Cramerova hranice je rovna

$$\boxed{C_n(\sigma^2)}=\frac{\left[\tau'_{\sigma^2}(\sigma^2)\right]^2}{J_n(\sigma^2)}=\frac{1}{\frac{n}{2\sigma^4}}=\boxed{\frac{2\sigma^4}{n}}<DS^2=\frac{2\sigma^4}{n-1}\quad\text{a}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{C_n(\sigma^2)}{DS^2}=1.$$

5. KONSTRUKCE BODOVÝCH ODHADŮ

Mějme náhodný výběr $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ rozsahu n z rozdělení o distribuční funkci $F(x; \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)' \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^m$. Množina $\boldsymbol{\Theta}$ nechť je neprázdná a otevřená.

Budeme předpokládat, že distribuční funkci $F(x; \boldsymbol{\theta})$ lze vyjádřit ve tvaru

$$F(x; \boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{x} f(x; \boldsymbol{\theta}) d\nu(t) \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)' \in \boldsymbol{\Theta},$$

kde ν je $\sigma-$konečná míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (např. *Lebesgueova* nebo *čitací*) a $f(x; \boldsymbol{\theta})$ je nezáporná měřitelná funkce, tzv. **hustota pravděpodobnosti** (vzhledem k míře ν).

Pak **sdružená hustota** náhodného vektoru $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ je vzhledem k nezávislosti jednotlivých složek vektoru a jejich stejnému rozdělení rovna

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \boldsymbol{\theta}).$$

Mějme dále **parametrickou funkcí**

$$\gamma : \boldsymbol{\Theta} \to \mathbb{R}.$$

Předmětem našeho zájmu bude hodnota parametru $\boldsymbol{\theta}$ nebo, obecněji, hodnota některé parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

5.1. METODA MOMENTŮ. Předpokládejme, že pro náhodný výběr existují obecné momenty:

$$\mu'_k = \mu'_k(\boldsymbol{\theta}) = EX_i^k \qquad i = 1, \dots, n \qquad k = 1, \dots, m.$$

Výběrové obecné momenty jsou definovány vzorcem

$$\boxed{M'_k = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i^k} \qquad k = 1, 2, \dots$$

Momentová metoda odhadu parametru $\boldsymbol{\theta}$ spočívá v tom, že za odhad $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ vezmeme řešení rovnic

$$\boxed{M'_k = \mu'_k(\boldsymbol{\theta})} \qquad k = 1, \dots, m.$$

a nazveme je **odhadem metodou momentů**.

Někdy se může stát, že m rovnic nepostačuje k jednoznačnému určení $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, pak se většinou připojují další rovnice

$$M'_k = \mu'_k(\boldsymbol{\theta}) \qquad \text{pro} \qquad k = m+1, m+2$$

atd., až se získá potřebný počet rovnic. To samozřejmě lze provádět jen za předpokladu, že existují příslušné momenty μ'_k.

Odhadem dané **parametrické funkce** $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ **metodou momentů** rozumíme statistiku

$$\boxed{\widetilde{\gamma} = \gamma(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})}.$$

Odhady získané metodou momentů obvykle nejsou dostatečně kvalitní, v jednotlivých konrétních případech zpravidla lze dokázat konzistenci odhadů.

Příklad 5.1. Mějme náhodný výběr $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ rozsahu n z normálního rozdělení o parametrech μ a σ^2, které odhadneme momentovou metodou.

Pak

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)' = (\mu, \sigma^2)',$$

tj. $m = 2$ a $\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Snadno lze spočítat, že

$$\mu'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \mu$$

$$\mu'_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \mu^2 + \sigma^2.$$

Výběrové obecné momenty jsou rovny

$$M'_1 = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$M'_2 = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Chceme-li najít odhady momentovou metodou, musíme řešit soustavu rovnic:

$$M'_1 = \mu$$

$$M'_2 = \mu^2 + \sigma^2$$

Z první rovnice ihned dostaneme

$$\widetilde{\mu} = \bar{X},$$

což dosadíme do druhé rovnice a počítáme

$$\widetilde{\sigma}^2 = M'_2 - \bar{X}^2 = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}_{=(n-1)S^2} = \tfrac{n-1}{n} S^2,$$

kde

$$S^2 = \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \qquad \text{je výběrový rozptyl.}$$

Protože

$$E_{\boldsymbol{\theta}}(\widetilde{\mu}) = E_{\boldsymbol{\theta}} \bar{X} = \mu,$$

vidíme, že že odhad $\widetilde{\mu}$ **je nestranný**, avšak

$$E_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{\sigma}^2) = E \tfrac{n-1}{n} S^2 = \tfrac{n-1}{n} \sigma^2,$$

takže $\widetilde{\sigma}^2$ **není nestranný**, avšak je **asymptoticky nestranný**.

Lze ukázat, že oba odhady jsou **konzistentní** (slabě i silně).

5.2. METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI. Označme sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru $\mathbf{X}$ takto

$$L(\boldsymbol{\theta}; x_1, \ldots, x_n) = L(\theta_1, \ldots, \theta_m; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \boldsymbol{\theta})$$

a nazveme ji **věrohodnostní funkcí náhodného výběru**.

Odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MLE}}$ nazveme **maximálně věrohodným**, jestliže pro každé $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ platí

$$L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MLE}}; x_1, \ldots, x_n) \geq L(\boldsymbol{\theta}; x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Zpravidla je vhodnější pracovat s logaritmem funkce L. Pak za předpokladů známých z diferenciálního počtu vede hledání maximálně věrohodného odhadu $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ k řešení rovnic

$$\tfrac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta_1, \ldots, \theta_m; x_1, \ldots, x_n) = \tfrac{\partial}{\partial \theta_j} l(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \tfrac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_m) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

které jsou ve statistické literatuře známé pod názvem **soustava věrohodnostních rovnic**.

Poznámka 5.2. Maximálně věrohodné odhady mají řadu výhodných vlastností:

(1) Existuje-li **vydatný** (eficientní) **odhad**, má soustava věrohodnostních rovnic **jediné řešení** a to je rovné **vydatnému** (eficientnímu) **odhadu**.
(2) Existuje-li **postačující** (suficientní) **odhad**, **je každé řešení věrohodnostních rovnic** funkcí **postačujícího** (suficientního) **odhadu**.
(3) Pochází-li náhodný výběr z **regulárního rozdělení**, pak existuje maximálně věrohodný odhad, který je **konzistentní** a **asymptoticky normální**, tj. v jednorozměrném případě

$$\widehat{\theta}_{\text{MLE}} \overset{A}{\sim} N(\theta, nJ(\theta)).$$

Příklad 5.3. Mějme náhodný výběr $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ rozsahu n z normálního rozdělení o parametrech μ a σ^2. Tyto parametry odhadneme metodou maximální věrohodnosti.

Opět $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)' = (\mu, \sigma^2)'$, tj. $m = 2$ a $\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Pak

$$L(\boldsymbol{\theta}; x_1, \ldots, x_n) = L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\boxed{\ln L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) = l(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) = -\tfrac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \tfrac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}.$$

Vyjádřeme věrohodnostní rovnice

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\tfrac{n}{2} \tfrac{1}{2\pi\sigma^2} 2\pi + \tfrac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \tfrac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu) = 0$$

Z druhé rovnice plyne, že

$$\boxed{\widehat{\mu}_{\text{MLE}}} = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \boxed{\bar{X}}$$

Po dosazení do první věrohodnostní rovnice dostaneme

$$-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\widehat{\sigma}^2_{\text{MLE}}} = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2 = \boxed{\tfrac{n-1}{n} S^2},$$

kde

$$S^2 = \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \qquad \text{je výběrový rozptyl.}$$

Upravme nejprve logaritmus věrohodnostní funkce takto:

$$\begin{aligned}
l(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) &= -\tfrac{n}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \tfrac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)]^2 \\
&= -\tfrac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \tfrac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 \right\} \\
&= -\tfrac{n}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \tfrac{1}{2\sigma^2} \left[ns^2 + n(\bar{x} - \mu)^2\right]
\end{aligned}$$

kde

$$\bar{x} = \bar{X}$$

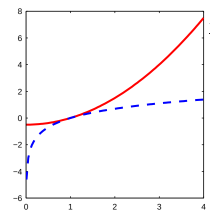
$$s^2 = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \tfrac{n-1}{n} S^2.$$

Nyní dokažme, že funkce $l(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n)$ nabývá v bodě $(\widehat{\mu}_{\text{MLE}}, \widehat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) = (\bar{x}, s^2)$ svého maxima, takže po dosazení dostáváme

$$l(\bar{x}, s^2; x_1, \ldots, x_n) = -\tfrac{n}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{n}{2} \ln(s^2) - \tfrac{n}{2}.$$

Ověřme, zda platí

$$\begin{aligned}
l(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) &\overset{?}{\leq} l(\bar{x}, s^2; x_1, \ldots, x_n) \\
-\tfrac{n}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \tfrac{ns^2 + n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2} &\overset{?}{\leq} -\tfrac{n}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{n}{2} \ln(s^2) - \tfrac{n}{2} \\
0 &\overset{?}{\leq} \underbrace{\left(\tfrac{s^2}{2\sigma^2} - \tfrac{1}{2}\right) - \ln \tfrac{s}{\sigma}}_{\text{1. člen}} + \underbrace{\tfrac{(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}}_{\geq 0}
\end{aligned}$$



Protože pro všechna kladná

$$t = \tfrac{s}{\sigma} > 0$$

platí

$$\ln t < \tfrac{t^2-1}{2},$$

je první i druhý člen nezporný a nerovnost platí.

Protože

$$E_{\boldsymbol{\theta}}(\widehat{\mu}_{\text{MLE}}) = E_{\boldsymbol{\theta}} \bar{X} = \mu,$$

ale

$$E_{\boldsymbol\theta}(\hat\sigma^2_{\text{MLE}}) = E_{\boldsymbol\theta}\tfrac{n-1}{n}S^2 = \tfrac{n-1}{n}\sigma^2,$$

vidíme že odhad $\widehat{\mu}_{\text{MLE}}$ **je nestranný**, avšak $\widehat{\sigma}^2_{\text{MLE}}$ již **nestranný není** (ale asymptoticky nestranný).

V tomto případě jsme došli ke stejnému výsledku jako u momentové metody.

5.3. Srovnání metody momentů s metodou maximální věrohodnosti.

Obecně se dá říci, že momentová metoda je poměrně jednoduchá. Používá se zejména v těch případech, kdy jiné metody odhadu jsou numericky či z jiných důvodů těžko zvládnutelné. Na druhé straně pokud jde o rozdělení, která nemají konečné momenty, pak se tato metoda nedá aplikovat vůbec. Někdy se odhady pořízené momentovou metodou berou alespoň jako počáteční aproximace pro řešení věrohodnostních rovnic, pokud je pro jejich řešení nutný iterační postup.

5.4. METODA MINIMÁLNÍHO χ^2.

Nejprve si připomeňme jedno velmi důležité vícerozměrné diskrétní rozdělení, a to multinomické.

Multinomické rozdělení popisuje situaci, kdy máme k neslučitelných jevů, které mohou nastat v každém z n nezávislých pokusů s pravděpodobnostmi

$$\pi_1,\dots,\pi_k \qquad \text{přičemž} \qquad \sum_{j=1}^k \pi_j = 1.$$

Nechť náhodná veličina Y_j značí počet případů, kdy nastal j-tý jev, takže Y_j může nabývat hodnot od nuly do n a musí platit

$$\sum_{j=1}^k Y_j = n.$$

Náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1,\dots,Y_k)'$ pak má multinomické rozdělení s pravděpodobnostní funkcí

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} n!\prod\limits_{j=1}^k \frac{\pi_j^{y_j}}{y_j!} & \text{pro } y_j = 0,1,\dots,n;\ \sum\limits_{j=1}^k y_j = n\ \sum\limits_{j=1}^k \pi_j = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

což lze ekvivalentně napsat i takto

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} n!\frac{\pi_1^{y_1}\cdot\dots\cdot\pi_{k-1}^{y_{k-1}}(1-\pi_1-\dots-\pi_{k-1})^{(n-y_1-\dots-y_{k-1})}}{y_1!\cdot\dots\cdot y_{k-1}!(n-y_1-\dots-y_{k-1})!} & \text{pro } y_j = 0,1,\dots,n \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

což značíme

$$\boxed{\mathbf{Y} \sim Mn(n,\pi_1,\dots,\pi_k)},$$

přičemž platí pro $j,h = 1,\dots,k$

$$\begin{aligned} EY_j &= n\pi_j \\ DY_j &= n\pi_j(1-\pi_j) \\ C(Y_j,Y_h) &= -n\pi_j\pi_h \end{aligned}$$

Multinomické rozdělení je zobecněním binomického rozdělení a je patrně nejdůležitějším diskrétním mnohorozměrným rozdělením. Svým významem by se dalo přirovnat k mnohorozměrnému normálnímu rozdělení, jemuž se podobá především díky dvěma vlastnostem: podmíněná i marginální rozdělení jsou opět multinomická.

Nyní se opět vrátíme k náhodnému výběru $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)'$ rozsahu n z rozdělení o distribuční funkci $F(x;\boldsymbol\theta)$, kde $\boldsymbol\theta = (\theta_1,\dots,\theta_m)' \in \boldsymbol\Theta \subset \mathbb{R}^m$.

Při odhadu neznámého parametru $\boldsymbol\theta$ metodou minimálního χ^2 na základě náhodného výběru $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)'$ postupujeme tak, že

(1) rozdělí se interval $(-\infty,\infty)$ na konečný počet pod dvou disjunktních podmnožin $\omega_1,\dots,\omega_k$ (pokud nejde o výběr z diskrétního rozdělení, které nabývá pouze konečného počtu hodnot)

(2) určí se pravděpodobnosti

$$p_j(\boldsymbol\theta) = \int_{\omega_j} dF(x;\boldsymbol\theta)$$

jako funkce parametru $\boldsymbol\theta$

(3) pro danou realizaci náhodného výběru se určí bod $\widehat{\boldsymbol\theta}$, v němž funkce

$$\chi^2(\boldsymbol\theta) = \sum_{j=1}^k \left(\frac{Y_j - np_j(\boldsymbol\theta)}{\sqrt{np_j(\boldsymbol\theta)}}\right)^2$$

nabývá minima, přičemž Y_j je počet bodů $X_1,\dots,X_n$ ležících v ω_j $(\sum_{j=1}^k Y_j = n)$.

Pokud je tato funkce diferencovatelná, hledání minima vede na řešení soustavy rovnic

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi^2(\boldsymbol\theta)}{\partial\theta_h} = \sum_{j=1}^k\left(\frac{Y_j - np_j(\boldsymbol\theta)}{p_j(\boldsymbol\theta)} + \frac{[Y_j - np_j(\boldsymbol\theta)]^2}{2np_j^2(\boldsymbol\theta)}\right)\frac{\partial p_j(\boldsymbol\theta)}{\partial\theta_h} = 0 \quad (h = 1,\dots,k) \tag{11}$$

vzhledem k neznámým $\theta_1,\dots,\theta_k$. Avšak i v nejjedodušších případech je velmi obtížné řešit systém rovnice (12). Potíže způsobuje člen $\frac{[Y_j-np_j(\boldsymbol\theta)]^2}{2np_j^2(\boldsymbol\theta)}$. Pro velká n je však vliv tohoto členu zanedbatelný, a proto se řešení soustavy (12) nahrazuje řešením soustavy

$$\sum_{j=1}^k \frac{Y_j - np_j(\boldsymbol\theta)}{p_j(\boldsymbol\theta)}\frac{\partial p_j(\boldsymbol\theta)}{\partial\theta_h} = 0 \quad (h = 1,\dots,k) \tag{12}$$

Tento postup se nazývá **modifikovanou metodou minimálního** χ^2.

Odhady získané oběma metodami jsou při dosti obecných podmínkách **konzistentními odhady**.

6. INTERVALOVÉ ODHADY

6.1. Definice intervalového odhadu. Odhady, jimiž jsme se doposud zabývali, se někdy nazývají **bodové odhady** parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Je tomu tak proto, že pro danou realizaci náhodného výběru $x_1, \ldots, x_n$ představuje odhad daný statistikou $T_n(x_1, \ldots, x_n)$ **jediné číslo** (**bod**), které je v jistém smyslu přiblížením ke skutečné hodnotě parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Úlohu odhadu však lze formulovat i jiným způsobem. Jde o to, sestrojit na základě daného náhodného výběru takový interval, jehož **konce** jsou **statistiky**, a který se s dostatečně velkou přesností pokryje skutečnou hodnotu parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$. V tomto případě mluvíme o **intervalovém odhadu** parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Podobná je úloha zkonstruovat na základě náhodného výběru statistiku, o níž lze s dostatečně velkou spolehlivostí prohlásit, že skutečná hodnota parametrické funkce je větší než tato statistika. V tomto případě mluvíme o **dolním odhadu** parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$. Analogicky lze zavést pomocí opačné nerovnosti pojem **horního odhadu** $\gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Definice 6.1. Nechť $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \ldots, X_n\} \simeq F(x; \boldsymbol{\theta})$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení o distribuční funkci $F(x; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Dále mějme parametrickou funkci $\gamma(\boldsymbol{\theta})$, $\alpha \in (0, 1)$ a statistiky $D = D(X_1, \ldots, X_n)$ a $H = H(X_1, \ldots, X_n)$.

Potom intervaly $\langle D, H \rangle$ nazveme $100(1-\alpha)$ % **intervalem spolehlivosti** pro parametrickou funkci $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ jestliže

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(D(X_1, \ldots, X_n) \le \gamma(\boldsymbol{\theta}) \le H(X_1, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha$$

Jestliže

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(D(X_1, \ldots, X_n) \le \gamma(\boldsymbol{\theta})) = 1 - \alpha,$$

pak statistiku $D = D(X_1, \ldots, X_n)$ nazýváme **dolním odhadem parametrické funkce** $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ se spolehlivostí $1 - \alpha$ (nebo s rizikem α).

Jestliže

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(\gamma(\boldsymbol{\theta}) \le H(X_1, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha$$

pak statistiku $H = H(X_1, \ldots, X_n)$ nazýváme **horním odhadem parametrické funkce** $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ se spolehlivostí $1 - \alpha$ (nebo s rizikem α).

<u>Poznámka</u> **6.2.** Vysvětleme si nyní smysl pojmu **spolehlivost intervalových odhadů**.

Konkrétní data $x_1, \ldots, x_n$ (tj. realizace náhodného výběru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$) nejsou náhodnými veličinami, nýbrž jsou to výsledky určitého pokusu ω, tj.

$$x_1 = X_1(\omega), \ldots, x_n = X_n(\omega).$$

Sestrojíme-li tedy na jejich základě intervalový odhad, řekněme (a, b), parametrické funkce $\gamma(\theta)$, pak nemá smysl mluvit o pravděpodobnosti $P(a < \gamma(\theta) < b)$, protože všechny tři symboly jsou reálná čísla (třebaže $\gamma(\theta)$ neznáme) a nerovnost $a < \gamma(\theta) < b$ buď platí nebo neplatí, tj. náš intervalový odhad je buď správný nebo nesprávný.

Budeme-li však sestrojovat intervalové odhady vícekrát po sobě, pak poměrná četnost případů, kdy intervalový odhad bude správný, bude přibližně rovna $1 - \alpha$.

Číslo $\boxed{\alpha}$ se volí poměrně malé, nejčastěji	0.05	spolehlivost je pak	0.95	tj. 95%
	0.01		0.99	tj. 99%

Kromě dostatečné spolehlivosti bychom chtěli, aby interval $\langle D_n(\mathbf{X}), T_n(\mathbf{X}) \rangle$ byl co možná nejkratší.

Tyto požadavky jsou však (při pevném rozsahu výběru n) protichůdné. Žádáme-li větší spolehlivost, musíme se smířit s delším intervalem; žádáme-li naopak kratší interval, musíme se smířit s nižší spolelivostí.

6.2. Kvantily. Nyní definujme kvantilovou funkci a kvantil.

Definice 6.3. Nechť F je distribuční funkcí a $\alpha \in (0, 1)$. Potom funkci

$$F^{-1}(\alpha) = Q(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \ge \alpha\}$$

se nazývá **kvantilová funkce** a číslo

$$x_\alpha = Q(\alpha)$$

se nazývá α-**kvantilem** rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$.

Z definice kvantilů vyplývá následující vztah. Je-li X absolutně spojitá náhodná veličina, pak platí

$$P(x_{\alpha/2} < X \le x_{1-\alpha/2}) = F(x_{1-\alpha/2}) - F(x_{\alpha/2})$$

6.3. Konstrukce intervalových odhadů. Popíšeme nyní jednu metodu konstrukce intervalových odhadů, která je použitelná ve většině případů.

(1) Najdeme nějakou tzv. <u>pivotovou statistiku</u>, tj. funkci $\boxed{h}$ náhodného výběru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ a parametrické funkce $\gamma(\theta)$, tedy náhodnou veličinu $\boxed{h(\mathbf{X}, \gamma(\theta))}$, tak aby její rozdělení již **nezáviselo na parametru** θ.

(2) Nechť $h_{\alpha/2}$ a $h_{1-\alpha/2}$ jsou kvantily rozdělení statistiky $h(\mathbf{X}, \gamma(\theta))$. Pak pro všechna θ platí

$$P_\theta(h_{\alpha/2} < h(\mathbf{X}, \gamma(\theta)) \le h_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

(3) Jestliže lze nerovnosti v závorce převést ekvivalentními úpravami na tvar, kde mezi nerovnostmi stojí jen $\gamma(\theta)$, pak jsme sestrojili intervalový odhad

$$D_n(\mathbf{X}) < \gamma(\theta) \le T_n(\mathbf{X})$$

o spolehlivosti $1 - \alpha$.

6.4. Kvantily některých důležitých rozdělení. Zaveďme následující značení:

Φ	distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení
G_n	distribuční funkce rozdělení χ^2 o n stupních volnosti
H_n	distribuční funkce Studentova rozdělení o n stupních volnosti
$Q_{n,m}$	distribuční funkce Fisherova-Snedecorova rozdělení o n a m stupních volnosti
u_α	kvantily standardizovaného normálního rozdělení
$\chi^2_\alpha(\nu)$	kvantily rozdělení χ^2 o ν stupních volnosti
$t_\alpha(\nu)$	kvantily Studentova rozdělení o ν stupních volnosti
$F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$	kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení o ν_1 a ν_2 stupních volnosti

Je-li distribuční funkce F absolutně spojitá a ryze monotónní a je-li příslušná hustota f **sudá funkce**, pak platí

$$F(x) = 1 - F(-x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

a odtud

$$x_\alpha = -x_{1-\alpha} \qquad \alpha \in (0, 1),$$

což speciálně platí pro **normální** a **Studentovo rozdělení**.

7. BODOVÉ A INTERVALOVÉ ODHADY PARAMETRŮ NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $\nu, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $\exists\ i \in \{1, \dots, n\} : b_i \neq 0$
Připomeňme, že platí:

Normální rozdělení:

s hustotou

$$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2) \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

má střední hodnotu $EX = \mu$ a rozptyl $DX = \sigma^2$. Toto rozdělení má následující vlastnosti:

$$\begin{aligned} \perp\!\!\!\perp \{X_1, \dots, X_n\} \ \wedge\ X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad &\Rightarrow \quad b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i \sim N\left(b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \mu_i, \sum_{i=1}^n b_i^2 \sigma_i^2\right) \\ X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad &\Rightarrow \quad U = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \end{aligned}$$

χ^2 **rozdělení**:

$$\begin{aligned} \perp\!\!\!\perp \{U_1, \dots, U_\nu\} \simeq N(0,1) \quad &\Rightarrow \quad K = U_1^2 + \dots + U_\nu^2 \sim \chi^2(\nu) \\ \perp\!\!\!\perp \{K_1 \sim \chi^2(\nu_1), \dots, K_k \sim \chi^2(\nu_k)\} \quad &\Rightarrow \quad K = K_1 + \dots + K_k \sim \chi^2(\nu_1 + \dots + \nu_k) \end{aligned}$$

Studentovo t-rozdělení:

$$U \sim N(0,1) \perp K \sim \chi^2(\nu) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{\nu}}} \sim t(\nu)$$

Fisherovo-Snedecorovo F-rozdělení:

$$K_1 \sim \chi^2(\nu_1) \perp K_2 \sim \chi^2(\nu_2) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{K_1/\nu_1}{K_2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2)$$

Ještě než začneme odvozovat rozdělení výběrových statistik, připomeňme si, že platí věty:

Věta 7.1. *Nechť náhodný vektor*

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

má $n-$rozměrné normální rozdělení a $\mathbf{B}$ *je* ***regulární*** *matice reálných čísel typu $n \times n$ a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. *Potom náhodný vektor*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}).$$

Důkaz. Hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je tvaru

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})}.$$

Inverzní transformace k transformaci

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}$$

je rovna

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{a})$$

a jakobián této inverzní transformace je tvaru

$$|\mathbf{J}| = \left|\mathbf{B}^{-1}\right| = |\mathbf{B}|^{-1}.$$

Pak hustotu pravděpodobnosti transformované náhodného vektoru

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}$$

lze vyjádřit takto

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= f_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{a}))|\mathbf{B}|^{-1} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} |\mathbf{B}|^{-1} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})-\boldsymbol{\mu}]'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})-\boldsymbol{\mu}]} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a}-\mathbf{B}\boldsymbol{\mu})'|\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}|^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a}-\mathbf{B}\boldsymbol{\mu})} \quad \sim \quad N_n(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}) \end{aligned}$$

□

Věta 7.2. *Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou* ***nezávislé*** *náhodné veličiny takové, že*

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2) \qquad i = 1, \dots, n.$$

a $\mathbf{B}$ *je* ***ortonormální*** *matice typu $n \times n$. Položme $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ a*

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)' = \mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}),$$

kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$. Potom Y_j jsou ***nezávislé*** *náhodné veličiny a*

$$Y_j \sim N(0, \sigma^2).$$

Důkaz. Protože $X_1, \dots, X_n$ jsou <u>nezávislé</u> náhodné veličiny s rozdělením $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, má náhodný vektor $\mathbf{X}$ hustotu pravděpodobnosti

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma}\right)^2}\right] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma}\right)^2} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \text{kde } \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_n.$$

Je-li $\mathbf{B}$ ortonormální matice (tj. $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}'$), pak z věty 7.1 plyne, že náhodný vektor

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_n(\mathbf{O}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}), \qquad \text{kde } \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} = \sigma^2\mathbf{B}'\mathbf{B} = \sigma^2\mathbf{I}_n$$

s hustotou pravděpodobnosti

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_j}{\sigma}\right)^2}\right] = \prod_{j=1}^n f_{Y_j}(y_j).$$

Odtud plyne tvrzení věty. □

Na základě těchto vlastností můžeme odvodit rozdělení výběrových statistik v případě náhodných výběrů z normálního rozdělení.

Věta 7.3. *Mějme $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \dots, X_n\} \simeq N(\mu, \sigma^2)$ a výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ a výběrový rozptyl $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Pak platí*

$$\begin{array}{lll} (1) & \textit{Výběrový průměr} & \bar{X} \ \sim \ N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ (2) & \textit{Statistika} & U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \ \sim \ N(0,1) \\ (3) & \textit{Statistika} & K = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \ \sim \ \chi^2(n-1) \\ (4) & \textit{Statistika} & T = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \ \sim \ t(n-1) \end{array}$$

Důkaz. Mějme ortonormální matici typu $n \times n$, jejíž první řádek je $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)'$, tj. např.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1' \\ \mathbf{b}_2' \\ \mathbf{b}_3' \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n-1}' \\ \mathbf{b}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} & -\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} & \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} & -\frac{2}{\sqrt{2\cdot 3}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix}.$$

Podle věty 7.2

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)' = \mathbf{B}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$$

a Y_i jsou nezávislé normálně rozdělené náhodné veličiny s nulou střední hodnotou a se stejným rozptylem σ^2.

Nejprve dokážeme důležité vztahy

(a) Počítejme: $\boxed{\mathbf{Y}'\mathbf{Y}} = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \underbrace{\mathbf{B}'\mathbf{B}}_{=\mathbf{I}_n} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \boxed{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$.

(b) Vyjádřeme $\boxed{Y_1} = \mathbf{b}_1'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}}(n\bar{X} - n\mu) = \boxed{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}$.

(c) Nakonec spočítejme

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} &= \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2 \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}_{\mathbf{Y}'\mathbf{Y}} - 2(\bar{X} - \mu) \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}_{n(\bar{X} - \mu)} + n(\bar{X} - \mu)^2 \\
&= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \underbrace{n(\bar{X} - \mu)^2}_{Y_1^2} = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 = \boxed{\sum_{i=2}^n Y_i^2}.
\end{aligned}$$

Nyní budeme dokazovat jednotlivá tvrzení věty:

(1) Ze vztahu (b) dostaneme

$$Y_1 = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) = \mathbf{b}_1'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim N(\mu_{Y_1}, \sigma_{Y_1}^2),$$

přičemž

$$\mu_{Y_1} = \mathbf{b}_1' E(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{b}_1'(\mu - \mu) = 0$$

$$\sigma_{Y_1}^2 = \mathbf{b}_1' D\mathbf{X} \mathbf{b}_1 = \sigma^2 \mathbf{b}_1'\mathbf{b}_1 = \sigma^2.$$

Odtud ihned dostaneme, že

$$\bar{X} = \mu + \frac{Y_1}{\sqrt{n}} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Provedeme-li standardizaci, tj. takovou lineární transformaci, která zajišťuje nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl, dostaneme první tvrzení věty:

$$U = U_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - E\bar{X}}{\sqrt{D\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1).$$

(2) Náhodné veličiny Y_i jsou nezávislé normálně rozdělené náhodné veličiny s nulou střední hodnotou a se stejným rozptylem σ^2, tj.

$$\perp\!\!\!\perp \{Y_1, \ldots, Y_n\} \simeq N(0, \sigma^2).$$

Provedeme-li opět jejich standardizaci, dostaneme posloupnost nezávislých standardizovaných normálních náhodných veličin

$$\perp\!\!\!\perp \{\tfrac{Y_1}{\sigma}, \ldots, \tfrac{Y_n}{\sigma}\} \simeq N(0, 1),$$

jejichž kvadráty $K_i = \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2$ mají χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti, tj.

$$\perp\!\!\!\perp \{K_2 = \left(\tfrac{Y_2}{\sigma}\right)^2, \ldots, K_n = \left(\tfrac{Y_n}{\sigma}\right)^2\} \simeq \chi^2(1).$$

Protože náhodná veličina, která je součtem několika nezávislých náhodných veličin s χ^2 rozdělením, má opět χ^2 rozdělení, přitom její stupeň volnosti je roven součtu jednotlivých stupňů volnosti, dostáváme druhé tvrzení věty:

$$K = K_2 + \cdots + K_n = \sum_{i=2}^n \left(\tfrac{Y_i}{\sigma}\right)^2 = \tfrac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1).$$

(3) Protože $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny a nám se již dříve podařilo vyjádřit výběrový průměr a výběrový rozptyl takto

$$\bar{X} = \mu + \frac{Y_1}{\sqrt{n}} \qquad \text{a} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i^2,$$

je vidět, že statistiky $\bar{X}$ a S^2 jsou **stochasticky nezávislé**, značíme $\boxed{\bar{X} \perp S^2}$.

Abychom dostali náhodnou veličinu, která má Studentovo rozdělení, potřebujeme mít dvě nezávislé náhodné veličiny, z nichž jedna, označme ji jako U^*, má standardizované normální rozdělení, a druhá, označme ji jako K^*, má χ^2 rozdělení s ν stupni volnosti. Pak náhodná veličina $T^* = \frac{U^*}{\sqrt{\frac{K^*}{\nu}}}$ má Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti, tj.

$$U^* \sim N(0, 1) \perp K^* \sim \chi^2(\nu) \quad \Rightarrow \quad T^* = \frac{U^*}{\sqrt{\frac{K^*}{\nu}}} \sim t(\nu).$$

Položíme-li

$$U^* = U = U_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \text{a} \qquad K^* = K = \tfrac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

pak statistika

$$T^* = \frac{U^*}{\sqrt{\frac{K^*}{\nu}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2} S^2}{n-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

čímž jsme dokázali poslední tvrzení věty.

□

Poznámka 7.4. Statistiky $\boxed{U}$, $\boxed{K}$ a $\boxed{T}$ se nazývají <u>PIVOTOVÉ STATISTIKY</u>, přičemž

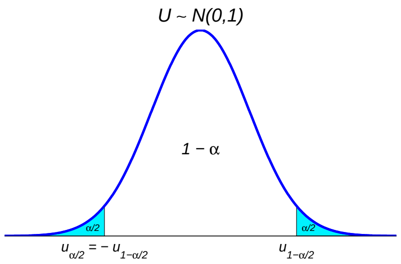
$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$	je pivotovou stastistikou pro neznámý parametr	μ	při známém σ
$K = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2$	- " -	σ^2	
$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$	- " -	μ	při neznámém σ

Důsledek 7.5. *Mějme* $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\} \simeq N(\mu,\sigma^2)$, *kde* μ *je* ***neznámý parametr*** *a* $\sigma^2 \in \mathbb{R}$ *je* ***známé*** *reálné číslo. Pak*

$\langle \bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\rangle$	- *je* $100(1-\alpha)\,\%$ *interval spolehlivosti pro střední hodnotu* μ *při známém* σ^2
$\bar{X} - u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	- *je* ***dolní odhad*** *střední hodnoty* μ *při známém* σ^2 *se spolehlivostí* $1-\alpha$
$\bar{X} + u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	- *je* ***horní odhad*** *střední hodnoty* μ *při známém* σ^2 *se spolehlivostí* $1-\alpha$

Důkaz. Za pivotovou statistiku zvolíme statistiku

$$U = U_{\bar{X}} = \tfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \;\sim\; N(0,1).$$



Pro lepší čitelnost místo $P_\theta = P_\mu$ budeme psát pouze P.

Počítejme

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P(u_{\frac{\alpha}{2}} \le U \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &= P(u_{\frac{\alpha}{2}} \le \tfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &= P(\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) \end{aligned}$$

□

Důsledek 7.6. *Mějme* $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\} \simeq N(\mu,\sigma^2)$, *kde* μ *a* σ^2 *jsou* ***neznámé parametry***. *Pak*

(1) pro střední hodnotu $\boxed{\mu}$

$\langle \bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\rangle$	- *je* $100(1-\alpha)\,\%$ *interval spolehlivosti pro střední hodnotu* μ *při neznámém* σ^2
$\bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	- *je* ***dolní odhad*** *střední hodnoty* μ *při neznámém* σ^2 *se spolehlivostí* $1-\alpha$
$\bar{X} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	- *je* ***horní odhad*** *střední hodnoty* μ *při neznámém* σ^2 *se spolehlivostí* $1-\alpha$

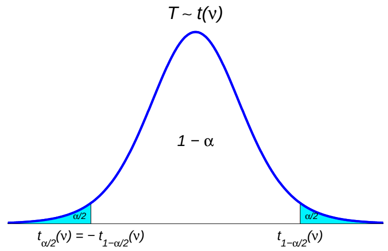
(2) pro rozptyl $\boxed{\sigma^2}$

$\left\langle \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\rangle$	- *je* $100(1-\alpha)\,\%$ *interval spolehlivosti pro rozptyl* σ^2
$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$	- *je* ***dolní odhad*** *rozptyl* σ^2 *se spolehlivostí* $1-\alpha$
$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$	- *je* ***horní odhad*** *rozptyl* σ^2 *se spolehlivostí* $1-\alpha$

Důkaz.

(1) V případě hledání intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu při neznámém rozptylu za pivotovou statistiku zvolíme statistiku

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \;\sim\; t(n-1).$$



Pro lepší čitelnost místo $P_{\boldsymbol{\theta}} = P_{\mu,\sigma^2}$ budeme psát pouze P.

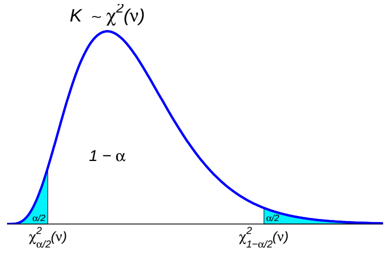
$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P(t_{\alpha/2}(n-1) \le T \le t_{1-\alpha/2}(n-1)) \\ &= P(t_{\alpha/2}(n-1) \le \tfrac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \le t_{1-\alpha/2}(n-1)) \\ &= P(\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\tfrac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \\ &\qquad \le \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\tfrac{S}{\sqrt{n}}) \end{aligned}$$

(2) V případě hledání intervalu spolehlivosti pro rozptyl za pivotovou statistiku zvolíme statistiku

$$K = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \;\sim\; \chi^2(n-1).$$

Počítejme

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \le K \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \\ &= P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \tfrac{n-1}{\sigma^2}S^2 \le \chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}}(n-1)) \\ &= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) \end{aligned}$$



□

V dalším si budeme všímat intervalů spolehlivosti pro DVA NEZÁVISLÉ VÝBĚRY.

Věta 7.7. *Nechť* $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_{n_X}\} \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ *je náhodný výběr rozsahu* n_X *z normálního rozdělení* $N(\mu_X,\sigma_X^2)$, $\bar{X}$ *je jeho výběrový průměr a* S_X^2 *jeho výběrový rozptyl.*

Dále nechť $\perp\!\!\!\perp\{Y_1,\dots,Y_{n_Y}\} \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ *je náhodný výběr rozsahu* n_Y *z normálního rozdělení* $N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$, $\bar{Y}$ *je jeho výběrový průměr a* S_Y^2 *jeho výběrový rozptyl.*

Předpokládejme, že oba výběry jsou stochasticky nezávislé, tj. $\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$. *Pak*

(1) Statistika

$$U_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \;\sim\; N(0,1).$$

(2) Pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, *pak statistika*

$$T_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{S_{XY}}\sqrt{\frac{n_Xn_Y}{n_X+n_Y}} \;\sim\; t(n_X+n_Y-2), \text{ kde } S_{XY}^2 = \tfrac{(n_X-1)S_X^2+(n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}.$$

(3) Statistika

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \;\sim\; F(n_X-1,n_Y-1).$$

Důkaz. Z nezávislosti náhodných výběrů vyplývá, že všechny statistiky $\bar{X}$, $\bar{Y}$, S_X^2 a S_Y^2 jsou nezávislé, tj.

$$\perp\!\!\!\perp\{\bar{X}, \bar{Y}, S_X^2, S_Y^2\}.$$

(1) Protože výběrové průměry normálních náhodných výběrů mají opět normální rozdělení, tj.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \tfrac{\sigma_X^2}{n_X}\right)$$

a

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \tfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right),$$

tak i jejich rozdíl je opět normální, tj.

$$Z = \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \tfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right).$$

Potom standardizovaná náhodná veličina U_Z má standardní normální rozdělení, tj.

$$U_Z = U_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \sim N(0,1),$$

tím jsme dokázali první tvrzení věty.

(2) Je-li $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, pak statistika U_Z je tvaru

$$\begin{aligned} U_Z = U_{\bar{X}-\bar{Y}} &= \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \\ &= \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma}\sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}} \sim N(0,1). \end{aligned}$$

Označíme-li dvě nezávislé statistiky s χ^2 rozdělením

$$K_X = \frac{n_X - 1}{\sigma^2} S_X^2 \sim \chi^2(n_X - 1) \qquad \text{a} \qquad K_Y = \frac{n_Y - 1}{\sigma^2} S_Y^2 \sim \chi^2(n_Y - 1),$$

pak statistika $K = K_X + K_Y$ má opět χ^2 rozdělení se stupni volnosti, které jsou součtem stupňů volnosti statistik K_X a K_Y, tj.

$$\begin{aligned} K = K_X + K_Y &= \frac{n_X - 1}{\sigma^2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{\sigma^2} S_Y^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left[(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2\right] \sim \chi^2(n_X + n_Y - 2). \end{aligned}$$

Položme

$$S_{XY}^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2},$$

pak

$$K = \frac{n_X + n_Y - 2}{\sigma^2} S_{XY}^2.$$

Abychom dostali náhodnou veličinu, která má Studentovo rozdělení, potřebujeme mít dvě nezávislé náhodné veličiny, z nichž jedna, označme ji jako U^*, má standardizované normální rozdělení, a druhá, označme ji jako K^*, má χ^2 rozdělení s ν stupni volnosti. Pak náhodná veličina $T^* = \frac{U^*}{\sqrt{\frac{K^*}{\nu}}}$ má Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti, tj.

$$U^* \sim N(0,1) \perp K^* \sim \chi^2(\nu) \quad \Rightarrow \quad T^* = \frac{U^*}{\sqrt{\frac{K^*}{\nu}}} \sim t(\nu).$$

Položíme-li

$$U^* = U = U_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma}\sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}} \sim N(0,1)$$

a

$$K^* = K = \frac{n_X + n_Y - 2}{\sigma^2} S_{XY}^2 \sim \chi^2(n_X + n_Y - 2)$$

pak statistika

$$\begin{aligned} T^* = \frac{U^*}{\sqrt{\frac{K^*}{\nu}}} &= \frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sigma}\sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X+n_Y}}}{\sqrt{\frac{\frac{n_X+n_Y-2}{\sigma^2}S_{XY}^2}{n_X+n_Y-2}}} \\ &= \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_{XY}}\sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}} \sim t(n_X + n_Y - 2), \end{aligned}$$

čímž jsme dokázali druhé tvrzení věty.

(3) Chceme-li dokázat třetí tvrzení, musíme najít dvě nezávislé náhodné veličiny, které mají χ^2 rozdělení. Označme je $K_1^* \sim \chi^2(\nu_1)$ a $K_2^* \sim \chi^2(\nu_2)$. Pak náhodná veličina

$$F^* = \frac{K_1^*/\nu_1}{K_2^*/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2).$$

Položíme-li

$$K_1^* = K_X = \frac{n_X - 1}{\sigma_X^2} S_X^2 \qquad \text{a} \qquad K_2^* = K_Y = \frac{n_Y - 1}{\sigma_Y^2} S_Y^2,$$

dostáváme

$$F^* = \frac{K_1^*/\nu_1}{K_2^*/\nu_2} = \frac{\frac{n_X-1}{\sigma_X^2} S_X^2/(n_X - 1)}{\frac{n_Y-1}{\sigma_Y^2} S_Y^2/(n_Y - 1)} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \sim F(n_X - 1, n_Y - 1)$$

a tím jsme dokázali i poslední tvrzení věty.

□

Důsledek 7.8. *Nechť* $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_{n_X}\} \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ *je náhodný výběr rozsahu* n_X *z normálního rozdělení* $N(\mu_X,\sigma_X^2)$, $\bar X$ *je jeho výběrový průměr a* S_X^2 *jeho výběrový rozptyl.*

Dále nechť $\perp\!\!\!\perp\{Y_1,\dots,Y_{n_Y}\} \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ *je náhodný výběr rozsahu* n_Y *z normálního rozdělení* $N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$, $\bar Y$ *je jeho výběrový průměr a* S_Y^2 *jeho výběrový rozptyl.*

Předpokládejme, že oba výběry jsou stochasticky nezávislé, tj. $\mathbf{X}\perp\mathbf{Y}$. *Pak*

(1) jsou-li $\boxed{\sigma_Y^2 \text{ a } \sigma_X^2 \text{ známé}}$, *pak* $100(1-\alpha)\%$ *interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot* $\mu_X-\mu_Y$ *je tvaru*

$$\left\langle \bar X-\bar Y-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}},\ \bar X-\bar Y+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right\rangle.$$

(2) Jestliže $\boxed{\sigma_Y^2 \text{ a } \sigma_X^2 \text{ nejsou známé}}$ *a platí* $\boxed{\sigma_Y^2=\sigma_X^2=\sigma^2}$, *pak* $100(1-\alpha)\%$ *interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot* $\mu_X-\mu_Y$ *je tvaru*

$$\left\langle \bar X-\bar Y-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X+n_Y-2)\,S\sqrt{\tfrac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}},\ \bar X-\bar Y+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X+n_Y-2)\,S\sqrt{\tfrac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}}\right\rangle.$$

(3) Při $\boxed{\text{neznámých } \mu_x,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2}$ *je* $100(1-\alpha)\%$ *interval spolehlivosti pro podíl rozptylů* $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ *roven*

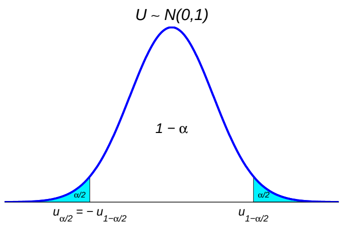
$$\left\langle \frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)},\ \frac{S_X^2}{S_Y^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)\right\rangle.$$

Důkaz. Obdobně jako v předchozí větě

(1) jako pivotovou statistiku použijeme

$$U_{\bar X-\bar Y}=\frac{\bar X-\bar Y-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}\ \sim\ N(0,1).$$

Počítejme



$$\begin{aligned}1-\alpha &= P\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\le U_{\bar X-\bar Y}\le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\ &= P\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\le \frac{\bar X-\bar Y-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}\le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\ &= P\left(\bar X-\bar Y-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\le \mu_X-\mu_Y\right.\\ &\qquad\left.\le \bar X-\bar Y+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali první tvrzení.

(2) V případě hledání intervalu spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot při neznámém rozptylu $\sigma^2=\sigma_X^2=\sigma_Y^2$ za pivotovou statistiku zvolíme statistiku

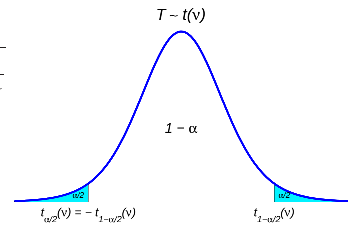
$$T_{\bar X-\bar Y}=\frac{\bar X-\bar Y-(\mu_X-\mu_Y)}{S_{XY}}\sqrt{\frac{n_Xn_Y}{n_X+n_Y}}\ \sim\ t(n_X+n_Y-2),$$

kde

$$S_{XY}^2=\frac{(n_X-1)S_X^2+(n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}.$$

Označme $\nu=n_X+n_Y-2$ a počítejme

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P(t_{\alpha/2}(\nu)\le T_{\bar X-\bar Y}\le t_{1-\alpha/2}(\nu))\\ &= P\left(t_{\alpha/2}(\nu)\le \frac{\bar X-\bar Y-(\mu_X-\mu_Y)}{S_{XY}}\sqrt{\frac{n_Xn_Y}{n_X+n_Y}}\right.\\ &\qquad\left.\le t_{1-\alpha/2}(\nu)\right)\\ &= P\left(\bar X-\bar Y-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\ S\sqrt{\tfrac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}}\le \mu_X-\mu_Y\right.\\ &\qquad\left.\le \bar X-\bar Y+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\ S\sqrt{\tfrac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}}\right),\end{aligned}$$

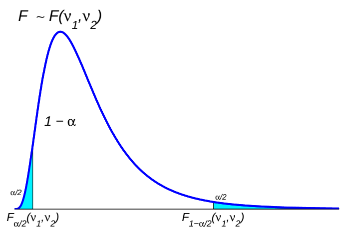


čímž jsme dokázali druhé tvrzení.

(3) V případě hledání intervalu spolehlivosti pro podíl rozptylů za pivotovou statistiku zvolíme statistiku

$$F=\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\ \sim\ F(n_X-1,n_Y-1).$$

Položme $\nu_1=n_X-1$ a $\nu_2=n_Y-1$ a počítejme



$$\begin{aligned}1-\alpha &= P(F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2))\le K\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2))\\ &= P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2))\le \frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2))\right)\\ &= P\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)}\le\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\right.\\ &\qquad\left.\le \frac{S_X^2}{S_Y^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)\right)\end{aligned}$$

a tím jsme dokázali i poslední tvrzení.

□

V dalším se zaměříme na interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot u tzv. <u>PÁROVÝCH VÝBĚRŮ</u>.

Věta 7.9. *Nechť* $\mathbf{X}_1=(X_1,Y_1)',\dots,\mathbf{X}_n=(X_n,Y_n)'$ *je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení* $N_2(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ *s parametry* $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_X\\ \mu_Y\end{pmatrix}$ *a* $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y\\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2\end{pmatrix}$, *kde* $\mu_X,\mu_Y\in\mathbb{R}$, $\sigma_X^2>0$, $\sigma_Y^2>0$ *a* $\rho\in(0,1)$.

Pro $i=1,\dots,n$ *označme*
$$\begin{aligned}Z_i &= X_i-Y_i\\ \bar Z &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n Z_i\\ S_Z^2 &= \tfrac{1}{n-1}\textstyle\sum_{i=1}^n (Z_i-\bar Z)^2.\end{aligned}$$

Pak

$$\left\langle \bar Z-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt n},\ \bar Z+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt n}\right\rangle$$

je intervalový odhad parametrické funkce $\mu_X-\mu_Y$ *o spolehlivosti* $1-\alpha$.

Důkaz. Připomeňme, že marginální náhodné veličiny jsou opět normální, tj.

$$\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\} \simeq N(\mu_X,\sigma_X^2) \qquad \text{a} \qquad \perp\!\!\!\perp\{Y_1,\dots,Y_n\} \simeq N(\mu_Y,\sigma_Y^2).$$

Takže pro jejich rozdíl $Z_i = X_i - Y_i$ platí, že mají také normální rozdělení

$$\perp\!\!\!\perp\{Z_1,\dots,Z_n\} \simeq N(\mu_Z D,\sigma_Z^2),$$

kde

$$\begin{aligned} EZ_i &= E(X_i - Y_i) = \mu_x - \mu_Y \\ DZ_i &= D(X_i - Y_i) = C(X_i - Y_i, X_i - Y_i) \\ &= C(X_i,X_i) - C(X_i,Y_i) - C(Y_i,X_i) + C(Y_i,Y_i) \\ &= DX_i - 2\underbrace{C(X_i,Y_i)}_{=\rho\sigma_X\sigma_Y} + DY_i = \sigma_X^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2. \end{aligned}$$

Budeme-li aplikovat důsledek 7.6 na $Z_1,\dots,Z_n$, dostaneme tvrzení věty. □

8. BODOVÉ A INTERVALOVÉ ODHADY ZALOŽENÉ NA CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTĚ

Odhady parametrů normálního rozdělení, které jsme doposud zkoumali, mají díky **centrální limitní větě** (CLV) širší použití.

Často lze najít takovou **transformaci** $\boxed{h}$, že náhodná veličina $\boxed{h(\mathbf{X},\gamma(\boldsymbol{\theta}))}$ má pro $n\to\infty$ **asymptoticky** standardizované normální rozdělení $\boxed{N(0,1)}$, tj.

$$h(\mathbf{X},\gamma(\boldsymbol{\theta})) \overset{A}{\sim} N(0,1)$$

Přitom rozdělení, z něhož výběr pochází

- nemusí splňovat požadavky **spojitosti** a **ryzí monotonie** distribuční funkce,
- může být i diskrétní.

Bodové i intervalové odhady lze pak sestrojit stejným způsobem jako v případě normálních náhodných výběrů, jejich **spolehlivost** bude $\boxed{1-\alpha}$ jen přibližně, tj. **asymptoticky**.

Věta 8.1. *Mějme* $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\} \simeq \mathcal{L}(\mu(\boldsymbol{\theta}),\sigma^2(\boldsymbol{\theta}))$ *a výběrový průměr* $\bar X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. *Nechť* $S_*^2 = S_*^2(\mathbf{X})$ *je* ***(slabě) konzistentním odhadem*** *rozptylu* $\sigma^2(\boldsymbol{\theta})$. *Pak statistika*

$$U_* = \tfrac{\bar X - \mu(\boldsymbol{\theta})}{S_*}\sqrt{n} \overset{A}{\sim} N(0,1).$$

Důkaz. Podle Lindebergovy-Levyho CLV mají standardizované průměry asymptoticky standardizované normální rozdělení, tj.

$$U_{\bar X} = \frac{\bar X - E\bar X}{\sqrt{D\bar X}} = \frac{\bar X - \mu(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{\frac{\sigma^2(\boldsymbol{\theta})}{n}}} = \frac{\bar X - \mu(\boldsymbol{\theta})}{\sigma(\boldsymbol{\theta})}\sqrt{n} \overset{A}{\sim} N(0,1),$$

což lze ekvivalentně napsat také takto

$$U_{\bar X} \xrightarrow{\mathcal{L}} U \sim N(0,1).$$

Abychom dokázali, že také $U_* = \frac{\bar X - \mu(\boldsymbol{\theta})}{S_*}\sqrt{n} \overset{A}{\sim} N(0,1)$, budeme potřebovat následující tvrzení, které uvedeme bez důkazu (lze najít např. v knize Rao, R. C.: *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*. Academia Praha, 1978)

Jestliže $\quad Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad\wedge\quad Y_n \xrightarrow{P} c \quad\Rightarrow\quad Z_n\cdot Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cZ$

Pokud položíme

$$Z_n = U_{\bar X} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z = U$$

a

$$Y_n = \tfrac{\sigma(\boldsymbol{\theta})}{S_*} \xrightarrow{P} 1,$$

neboť S_*^2 je (slabě) konzistentním odhadem rozptylu $\sigma^2(\boldsymbol{\theta})$, pak již dostaneme tvrzení věty, tj.

$$U_* = Z_nY_n = \tfrac{\bar X - \mu(\boldsymbol{\theta})}{S_*}\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} cZ = 1\cdot U \sim N(0,1).$$

Jako transformaci jsme zvolili funkci

$$h(\mathbf{X},\mu(\boldsymbol{\theta})) = U_{\bar X}\cdot\tfrac{\sigma(\boldsymbol{\theta})}{S_*} = \tfrac{\bar X - \mu(\boldsymbol{\theta})}{S_*}\sqrt{n}.$$

□

DŮSLEDEK 8.2. *Nechť* $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\ldots,X_n\} \simeq \mathcal{L}(\mu(\boldsymbol\theta),\sigma^2(\boldsymbol\theta))$ *je náhodný výběr s konečnými druhými momenty. Potom intervalovým odhadem střední hodnoty* $\boxed{\mu(\boldsymbol\theta)}$ *o asymptotické spolehlivosti* $1-\alpha$ *je interval*

$$\left\langle \bar X - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\tfrac{S}{\sqrt{n}}, \bar X + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\tfrac{S}{\sqrt{n}}\right\rangle,$$

kde S^2 *je výběrový rozptyl, tj.*

$$S^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X).$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý, neboť $S_*^2 = S^2$ je konzistentním odhadem rozptylu a jako pivotovou statistiku jsme při tvorbě intervalového odhadu použili U_* s asymptoticky standardizovaným normálním rozdělením. □

DŮSLEDEK 8.3. ***(Binární náhodné výběry)****. Nechť* $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\ldots,X_n\} \simeq A(p)$ *je náhodný výběr s alternativním (binárním) rozdělením. Potom intervalovým odhadem parametru* $\boxed{p}$ *o asymptotické spolehlivosti* $1-\alpha$ *je interval*

$$\left\langle \bar X - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\bar X(1-\bar X)}{n}}, \bar X + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\bar X(1-\bar X)}{n}}\right\rangle.$$

Důkaz. Nejprve připomeňme, že pro náhodné veličiny s alternativním (binárním) rozdělením platí

$$EX_i = p \qquad \text{a} \qquad DX_i = p(1-p).$$

Protože $\bar X$ je konzistentním odhadem střední hodnoty, což je parametr p, pak statistika

$$S_*^2 = \bar X(1-\bar X)$$

je konzistentním odhadem rozptylu $p(1-p)$.

Při tvorbě intervalového odhadu jako pivotovou statistiku jsme opět použili U_* s asymptoticky standardizovaným normálním rozdělením. □

DŮSLEDEK 8.4. ***(Poissonovské náhodné výběry)****. Nechť* $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\ldots,X_n\} \simeq Po(\lambda)$ *je náhodný výběr s Poisonovým rozdělením. Potom intervalovým odhadem parametru* $\boxed{\lambda}$ $(0<\lambda<\infty)$ *o asymptotické spolehlivosti* $1-\alpha$ *je interval*

$$\left\langle \bar X - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\bar X}{n}}, \bar X + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\bar X}{n}}\right\rangle.$$

Důkaz. Připomeňme, že pro náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením platí

$$EX_i = DX_i = \lambda.$$

Protože $\bar X$ je konzistentním odhadem střední hodnoty, což je parametr λ, pak statistika

$$S_*^2 = \bar X$$

je konzistentním odhadem rozptylu λ.

Při tvorbě intervalového odhadu jako pivotovou statistiku jsme opět použili U_* s asymptoticky standardizovaným normálním rozdělením. □

9. TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

Mějme náhodný výběr $\mathbf X = (X_1,\ldots,X_n)'$ rozsahu n z rozdělení o distribuční funkci $F(x;\boldsymbol\theta)$, kde $\boldsymbol\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_m)' \in \boldsymbol\Theta \subset \mathbb R^m$. Množina $\boldsymbol\Theta$ nechť je neprázdná a otevřená.

Předpokládejme, že o parametru $\boldsymbol\theta$ existují dvě konkurující si hypotézy: H_0: $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta_0 \subset \boldsymbol\Theta$, H_1: $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta_1 = \boldsymbol\Theta - \boldsymbol\Theta_0$

Tvrzení $\boxed{H_0}$ / $\boxed{H_1}$ se nazývá **nulovou** / **alternativní** **hypotézou**.

Je-li $\boxed{\boldsymbol\Theta_0}$ / $\boxed{\boldsymbol\Theta_1}$ **jednobodová**, nazývá se **jednoduchou**, v opačném případě **složenou hypotézou**.

O platnosti této hypotézy se má rozhodnout na základě náhodného výběru $\mathbf X = (X_1,\ldots,X_n)'$, a to tak, že ↗ **zamítneme** *nebo* ↘ **nezamítneme** platnost hypotézy H_0.

Na testování použijeme statistiku $T_n = T(\mathbf X)$, kterou nazýváme **testovací statistikou**. Množinu hodnot, které může testovací statistika nabýt, rozdělíme na dvě disjunktní oblasti. Jednu označíme $\boxed{W_\alpha}$, a nazveme ji **kritickou oblastí** (nebo také *oblastí zamítnutí hypotézy*) a druhá je doplňkovou oblastí (*oblast nezamítnutí testované hypotézy*).

Na základě realizace náhodného výběru $\mathbf x = (x_1,\ldots,x_n)'$ vypočítáme hodnotu testovací statistiky $t_n = T(\mathbf x)$.

- Pokud hodnota testovací statistiky t_n nabude hodnoty z kritické oblasti, tj. $\boxed{t_n = T(\mathbf x) \in W_\alpha}$, pak **nulovou hypotézu zamítáme**.
- Pokud hodnota testovací statistiky nabude hodnoty z oblasti nezamítnutí, tj. $\boxed{t_n = T(\mathbf x) \notin W_\alpha}$, tak **nulovou hypotézu nezamítáme**, což ovšem neznamená že přijímáme alternativu.

Toto rozhodnutí nemusí však být správné. V následující tabulce jsou uvedeny možné situace

H_0	PLATÍ	NEPLATÍ
ZAMÍTÁME $t_n = T(\mathbf x) \in W_\alpha$	***chyba 1. druhu*** (α_0 je ***hladina testu***) $\alpha_0 = \sup_{\boldsymbol\theta\in\boldsymbol\Theta_0} P_{\boldsymbol\theta}(T(\mathbf X)\in W_\alpha \mid H_0) \le \alpha$	O.K.
NEZAMÍTÁME $t_n = T(\mathbf x) \notin W_\alpha$	O.K. (tzv. ***síla testu*** či ***silofunkce***) $1-\beta(\boldsymbol\theta) = P_{\boldsymbol\theta}(T(\mathbf X)\in W_\alpha \mid H_1)$	***chyba 2. druhu*** $\beta(\boldsymbol\theta) = P_{\boldsymbol\theta}(T(\mathbf X)\notin W_\alpha \mid H_1)$ pro $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta_1$

Volba kritického oboru W_α se řídí požadavky:

(1) Chceme, aby pravděpodobnost chyby 1. druhu byla menší nebo rovna předem zvolenému malému $\alpha \in (0,1)$ (obvykle se volí $\alpha = 0.01$ nebo $\alpha = 0.05$), tj. aby platilo pro $\forall \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta_0$

$$\alpha_0 = \sup_{\boldsymbol\theta\in\boldsymbol\Theta_0} P_{\boldsymbol\theta}(T(\mathbf X)\in W_\alpha \mid H_0) \le \alpha.$$

Pro spojitá rozdělení je vždy možné (i když ne nutné) zvolit test, jehož hladina je právě rovna α. U diskrétních rozdělení jsou možnými hladinami testu jen některé diskrétní hodnoty. Není-li zvolená hladina mezi nimi, rozhodneme se pro hladinu, která je nejbližší nižší (nebo nejbližší vyšší).

(2) Mezi testy na hladině $\boxed{\alpha}$ se pak snažíme zvolit test s co **nejmenší pravděpodobností chyby druhého druhu**, tj. **co nejsilnější test**.

Vidíme, že postavení obou hypotéz je nesymetrické. Za **nulovou hypotézu** volíme tu, jejíž **neoprávněné zamítnutí** (chyba 1. druhu) **je závažnější**.

Definice 9.1. Chybu, která spočívá **v nesprávném zamítnutí nulové hypotézy, i když je správná**, budeme nazývat **chybou prvého druhu**, pravděpodobnost

$$\boxed{\alpha_0 = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} P_{\boldsymbol{\theta}}(T(\mathbf{X}) \in W_\alpha | H_0)}$$

nazveme **hladinou významnosti** (též **hladinou testu**).

Chybu, která spočívá **v nesprávném přijetí nulové hypotézy, i když neplatí**, budeme nazývat **chybou druhého druhu** a její pravděpodobnost pro $\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_1$ označíme

$$\boxed{\beta(\boldsymbol{\theta}) = P_{\boldsymbol{\theta}}(T(\mathbf{X}) \notin W_\alpha | H_1)}.$$

Pravděpodobnost $1-\beta(\boldsymbol{\theta})$ nazýváme **silou testu** (též **silou kritické oblasti** W_α) a jakožto funkci $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_1$ ji také nazveme **silofunkcí testu**.

9.1. JEDNODUCHÁ HYPOTÉZA A JEDNODUCHÁ ALTERNATIVA.

Nejprve rozebereme nejjednodušší případ, kdy $\boxed{\boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1\}}$.

V dalším budeme značit symbolem $\boxed{\nu}$ σ–konečnou míru na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ (např. *Lebesgueova* nebo *čítací*) a $\boxed{f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}$ nezápornou měřitelnou funkci, tzv. **hustotu pravděpodobnosti vzhledem k míře** ν. Tedy $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ jsou jak hustoty absolutně spojitých náhodných veličin, tak pravděpodobnostní funkce.

Budeme předpokládat, že pravděpodobnostní míry $P_{\boldsymbol{\theta}_0}$ a $P_{\boldsymbol{\theta}_1}$ jsou absolutně spojité vzhledem k σ-konečné míře ν.

Označme hustoty $\begin{array}{l} p_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_0), \\ p_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}_1). \end{array}$

Lemma 9.2 (Neymanovo–Pearsonovo). *Nechť k danému $\alpha \in (0,1)$ existuje takové kladné číslo $c > 0$, že pro množinu* $\boxed{W_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : p_1(\mathbf{x}) \geq c p_0(\mathbf{x})\}}$ *platí* $\boxed{\int_{W_0} p_0(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{x}) = \alpha}$.

Pak pro libovolnou množinu $W \in \mathcal{B}^n$ splňující podmínku $\boxed{\int_W p_0(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{x}) \leq \alpha}$ *platí*

$$\int_{W_0} p_1(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{x}) \geq \int_W p_1(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{x}).$$

Důkaz. Pro jednoduchost pro $j = 0, 1$ místo $\int_{W_0} p_j(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{x})$ pišme $\int_{W_0} p_j\, d\nu$. Pak platí

$$\int\limits_{W_0} p_1\, d\nu - \int\limits_{W} p_1\, d\nu = \int\limits_{W_0 - W \in W_0} \underbrace{p_1}_{\geq c p_0} d\nu \;-\; \int\limits_{W - W_0 \notin W_0} \underbrace{p_1}_{< c p_0} d\nu$$

$$\geq \int\limits_{W_0 - W} c\, p_0\, d\nu \;-\; \int\limits_{W - W_0} c\, p_0\, d\nu = c \left(\underbrace{\int_{W_0} p_0\, d\nu}_{=\alpha} - \underbrace{\int_{W} p_0\, d\nu}_{\leq \alpha} \right) \geq 0.$$

□

Poznámka 9.3. Předchozí lemma lze vyslovit takto:

Test s kritickým oborem $\boxed{W_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : p_1(\mathbf{x}) \geq c p_0(\mathbf{x})\}}$ určuje nejsilnější test hypotézy H_0 proti H_1 na dané hladině α.

Příklad 9.4 (Náhodný výběr z normálního rozdělení při známém rozptylu). Mějme $\perp\!\!\!\perp\{X_1,\dots,X_n\} \simeq N(\mu,\sigma^2)$, kde σ^2 je známé. Nechť $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$. Je třeba najít kritický obor $\boxed{W_0}$ nejsilnějšího testu

$$\boxed{H_0} : \mu = \mu_0 \qquad \text{proti} \qquad \boxed{H_1} : \mu = \mu_1 \quad \text{na hladině} \quad \alpha \in (0,1).$$

Platí

$$\mathbf{X} \sim \boxed{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\mu)} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\mu) = \prod_{i=1}^n \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} = \boxed{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right\}}.$$

Dále si připomeňme, že položíme-li $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, resp. pro realizace $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, pak za platnosti nulové hypotézy $\boxed{H_0}$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \tfrac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \Rightarrow \qquad U_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - E_{\mu_0}(\bar{X})}{\sqrt{D_{\mu_0}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1). \tag{13}$$

Dále využijeme vztah

$$\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu)^2. \tag{14}$$

Označme $\quad p_0(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\mu=\mu_0) \quad$ a $\quad p_1(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\mu=\mu_1).$

Podmínku $\boxed{p_1(\mathbf{x}) \geq c p_0(\mathbf{x})}$ lze napsat také takto $\boxed{\frac{p_1(\mathbf{x})}{p_0(\mathbf{x})} \geq c > 0}$.

Počítejme s využitím vztahu (14)

$$\tfrac{p_1(\mathbf{x})}{p_0(\mathbf{x})} = \exp\left\{\tfrac{n}{2\sigma^2}\left[(\bar{x}-\mu_0)^2 - (\bar{x}-\mu_1)^2\right]\right\} \geq c.$$

Po zlogaritmování dostaneme

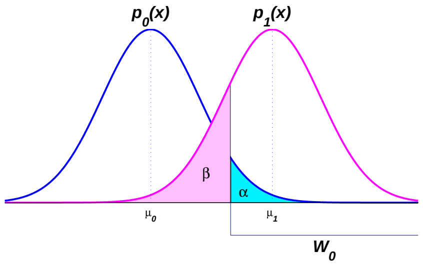
$$\tfrac{n}{2\sigma^2}\left[(\bar{x}-\mu_0)^2 - (\bar{x}-\mu_1)^2\right] = \tfrac{n}{2\sigma^2}\left[2\bar{x}(\mu_1-\mu_0) - (\mu_1^2-\mu_0^2)\right] \geq \ln c \tag{15}$$

(1) Předpokládejme, že $\mu_0 < \mu_1$.

Pak nerovnost (15) dále upravujme takto

$$\bar{x} \geq \underbrace{\tfrac{\mu_1+\mu_0}{2} + \tfrac{\sigma^2 \ln c}{n(\mu_1-\mu_0)}}_{\text{označme } k_1}$$

Dokážeme najít takové $\boxed{k_1}$, aby platilo $\boxed{P_{\mu_0}(\bar{X} \geq k_1) = \alpha}$?



Díky normalitě výběrového průměru (viz (13)) však můžeme počítat a upravovat

$$\alpha = P_{\mu_0}(\bar{X} \geq k_1) = P_{\mu_0}\left(\tfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \tfrac{k_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\tfrac{k_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

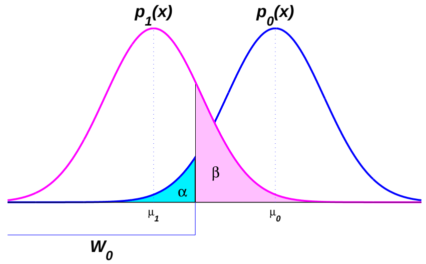
takže

$$\Phi\left(\tfrac{k_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \qquad \Rightarrow \qquad u_{1-\alpha} = \tfrac{k_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{k_1 = \mu_0 + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}}$$

a kritický obor lze vyjádřit takto

$$W_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \geq k_1\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \geq \mu_0 + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}\right\}.$$

(2) Nyní předpokládejme, že $\mu_0 > \mu_1$.



Pak nerovnost (15) dále upravujme takto

$$\bar{x} \leq \underbrace{\frac{\mu_1+\mu_0}{2} - \frac{\sigma^2 \ln c}{n(\mu_0-\mu_1)}}_{\text{označme } k_2}$$

Díky normalitě výběrového průměru (viz (13)) však můžeme počítat a upravovat

$$\alpha = P_{\mu_0}(\bar{X} \leq k_2) = P_{\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{k_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{k_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

takže

$$\Phi\left(\frac{k_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad u_\alpha = -u_{1-\alpha} = \frac{k_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_2 = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}}$$

a kritický obor lze vyjádřit takto

$$W_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq k_2\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}\right\}.$$

Všimněme si, že při jednoduché hypotéze i alternativě

$$\boxed{H_0} : \mu = \mu_0 \qquad \text{proti} \qquad \boxed{H_1} : \mu = \mu_1 \quad \text{na hladině} \quad \alpha \in (0,1)$$

při (1) $\mu_0 < \underbrace{\mu_1}_{\text{libovolné}}$ má W_0 stejný tvar nezávislý na μ_1

(2) $\mu_0 > \underbrace{\mu_1}_{\text{libovolné}}$ má W_0 stejný tvar nezávislý na μ_1

Říkáme, že test je **stejnoměrně nejsilnější** vůči všem alternativám typu $\begin{array}{l}(1)\ \mu_0 < \mu_1 \\ (2)\ \mu_0 > \mu_1\end{array}$.

<u>**Poznámka**</u> **9.5.** V současné době běžný statistický software (Statistika, SPSS, S$^+$, SAS) udává **dosaženou hladinu** (v anglicky psané literatuře *P–value*, *significance value*). Je to nejmenší hladina testu, při které bychom ještě hypotézu H_0 zamítli.

9.2. JEDNODUCHÁ HYPOTÉZA A SLOŽENÁ ALTERNATIVA.

Nechť parametrický prostor $\mathbf{\Theta}$ má nejméně 3 různé body, z nichž jeden je $\boldsymbol{\theta}_0$. Položme $\mathbf{\Theta}_0 = \{\boldsymbol{\theta}_0\}$. Je třeba otestovat hypotézu

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{proti} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Theta} - \mathbf{\Theta}_0.$$

Nejprve si představme, že bychom se snažili najít pomocí N-P lemmatu nejsilnější test hypotézy H_0 proti alternativě $H_1' : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1 \in \mathbf{\Theta} - \mathbf{\Theta}_0$.

Obecně je třeba počítat s tím, že každý takovýto dílčí test bude mít jiný kritický obor. Může se však stát, že kritické obory budou stejné pro všechny zmíněné dílčí testy. Pak je rozumné test H_0 proti složené alternativě H_1 založit právě na tomto společném kritickém oboru. V tomto případě říkáme, že jde o **stejnoměrně nejsilnější test** $\boxed{H_0}$ **proti** $\boxed{H_1}$.