1. Choleského metoda

Choleského metoda je metoda pro řešení systému rovnic

$$Ax = b.$$

Věta. (Cholesky). *Nechť matice $A \in \mathcal{M}_n$ je symetrická a nechť všechny její hlavní minory jsou různé od nuly, tj.*

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak existuje taková horní trojúhelníková matice $T \in \mathcal{M}_n$, že $A = T^T T$.

Důsledek. *Nechť T je matice uvedená v předchozí větě. Prvky této matice jsou určeny vztahy:*

$$\begin{aligned}
t_{11} &= \sqrt{a_{11}} & & \\
t_{1j} &= \frac{a_{1j}}{t_{11}}, & & j = 2, \dots, n \\
t_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li}^2}, & & i = 2, \dots, n \\
t_{ij} &= \frac{1}{t_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li} t_{lj} \right) & & \text{pro } j > i \\
t_{ij} &= 0 & & \text{pro } i > j.
\end{aligned} \tag{1}$$

Poznámka. Je-li A pozitivně definitní matice, probíhá výpočet bez komplikací. V tomto případě jsou všechny prvky matice T reálné. Obecně může mít matice T ryze imaginární prvky. Tyto prvky se vyskytují v celém řádku matice a při dalším výpočtu se imaginární jednotky vyruší. Tento rozklad vede opět na řešení dvou systémů s trojúhelníkovými maticemi:

$$T^T \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}, \qquad T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}.$$

Počet násobicích operací Choleského metody je přibližně $n^3/6$; přitom je třeba ještě vyčíslit n druhých odmocnin.

Příklad 1. Choleského metodou řešte systém

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\
-x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 6.
\end{aligned}$$

Řešení. Najdeme rozklad matice A ve tvaru $T^T T = A$. Prvky matice T vypočteme ze vztahů (1).

$$\begin{aligned}
t_{11} &= 1, \quad t_{12} = 2, \quad t_{13} = -1, \\
t_{22} &= \sqrt{a_{22} - t_{12}^2} = i\sqrt{2}, \\
t_{23} &= \frac{1}{t_{22}}(a_{23} - t_{13}t_{12}) = -i3\sqrt{2}, \\
t_{33} &= \sqrt{a_{33} - (t_{13}^2 + t_{23}^2)} = 5.
\end{aligned}$$

Matice je tvaru

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyní řešíme $T^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -i3\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení tohoto systému je vektor $\boldsymbol{z} = (1, -i\sqrt{2}/2, 2)^T$. Nyní řešíme $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2}/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení tohoto systému (a tedy i řešení daného systému) je vektor

$$\boldsymbol{x} = (0, \tfrac{7}{10}, \tfrac{2}{5})^T.$$

2. Croutova metoda

Přímý rozklad matice na součin trojúhelníkových matic lze také použít pro třídiagonální matice. Uvedeme metodu, kterou navrhl Crout.

Uvažujme třídiagonální matici A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hledejme rozklad matice A ve tvaru: $A = LU$

(2)
$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix},$$
$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Je třeba určit $(2n-1)$ prvků matice L a $(n-1)$ prvků matice U, tedy celkem $(3n-2)$ prvků. Tyto prvky lze určit z následujících rovnic:

(3)
$$\begin{array}{ll} a_{11} = l_{11} & \\ a_{i,i-1} = l_{i,i-1}, & i = 2, 3, \ldots, n \\ a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, & i = 2, 3, \ldots, n \\ a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1}, & i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{array}$$

Tyto rovnice se snadno získají porovnáním prvků matice A s odpovídajícími prvky součinu LU. Uvedená metoda se nazývá *Croutova*.

Věta. *Nechť $A \in \mathcal{M}_n$ je třídiagonální matice s vlastnostmi:*

$$\begin{array}{lll} a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0, & i = 2,3,\dots,n-1, & \\ |a_{11}| > |a_{12}|, & & \\ |a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|, & i = 2,\dots,n-1, & \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{l}\textit{A řádkově}\\ \textit{diag. dominantní}\end{array} \\ |a_{nn}| > |a_{n,n-1}|. & & \end{array}$$

Pak matice A je regulární a hodnoty l_{ii}, $i = 1,\dots,n$, vypočtené ze vztahů (3) jsou různé od nuly.

Důsledek. *Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty, lze matici A rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice tvaru (2).*

Poznámka. Počet násobicích operací pro realizaci Croutovy metody je $(5n-4)$, počet sčítacích operací $(3n-3)$.

Jestliže matici A vyjádříme ve tvaru $A = LU$, pak systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lze opět jednoduše řešit takto:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} L\boldsymbol{y} & = & \boldsymbol{b} \\ U\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{y}. \end{array} \right.$$

Příklad 1. Croutovou metodou řešte systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & & & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ & & & & 2x_3 & - & 3x_4 & = & \frac{7}{5} \end{array}$$

Řešení. Podle vztahů (3) určíme prvky matic L a U:

$$\begin{array}{ll} i = 1 & l_{11} = a_{11} = 2, \quad u_{12} = \dfrac{a_{12}}{l_{11}} = -\frac{1}{2} \\ i = 2 & l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 4 - 1(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{2} \\ & l_{21} = a_{21} = 1 \\ & u_{23} = \dfrac{a_{23}}{l_{22}} = \dfrac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9} \\ i = 3 & l_{32} = a_{32} = 1, \quad l_{33} = a_{33} - l_{32}u_{23} = 3 - 1.\frac{2}{9} = \frac{25}{9} \\ & u_{34} = \dfrac{a_{34}}{l_{33}} = -\dfrac{2}{\frac{25}{9}} = -\frac{18}{25} \\ i = 4 & l_{43} = a_{43} = 2, \quad l_{44} = a_{44} - l_{43}u_{34} = -3 - 2(-\frac{18}{25}) = -\frac{39}{25} \end{array}$$

Matice L a U jsou tvaru

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{9}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{25}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{39}{25} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{18}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní řešíme systém $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Řešením je vektor $\boldsymbol{y} = (2, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{3})^T$. Nyní řešíme systém $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Řešením tohoto systému a tedy i daného systému je vektor $\boldsymbol{x} = (\frac{38}{15}, \frac{16}{15}, -\frac{9}{5}, -\frac{5}{3})^T$.