VLASTNOSTI NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ A ODVOZENÁ ROZDĚLENÍ

RNDR. MARIE FORBELSKÁ, PHD.

Věta 1. Mějme náhodnou veličinu s normálním rozdělením $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$. Dále nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ jsou reálné konstanty. Potom náhodná veličina, která je lineární transformací původní, má opět normální rozdělení, a to $\boxed{Y = a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)}$. Speciálně náhodná veličina $\boxed{U = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)}$ má tzv. *standardizované normální rozdělení.*

Důkaz. Hustota náhodné veličiny $X \sim f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Inverzní transformace je tvaru $h(y) = \frac{y-a}{b}$ a absolutní hodnota její derivace je rovna $|h'(y)| = \frac{1}{|b|}$. Pak hustota transformované náhodné veličiny

$$Y = a + bX \sim f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b|\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[y-(a+b\mu)]^2}{b^2\sigma^2}\right\}$$

a odtud plyne tvrzení věty. □

Věta 2. Nechť náhodný vektor $\boxed{\mathbf{X} = (X_1, X_2)' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}$ má dvourozměrné normální rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, tj. má hustotu tvaru

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

Pak náhodná veličina

$$Y = X_1 + X_2$$

má také normální rozdělení a platí

$$\boxed{Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}.$$

Důkaz. Mějme náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, který je definován takto

$$\begin{array}{rclcl} Y_1 & = & X_1 + X_2 & = & g_1(X_1, X_2) \\ Y_2 & = & X_2 & = & g_2(X_1, X_2) \end{array}.$$

Vypočtěme inverzní zobrazení

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & y_1 - y_2 & = & h_1(y_1, y_2) \\ x_2 & = & y_2 & = & h_2(y_1, y_2) \end{array}$$

a jakobián $|J| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. **Sdružená hustota** náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ je pak tvaru

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = f_{(X_1,X_2)}(y_1 - y_2, y_2) \cdot 1$$

a odtud pak **marginální hustota**

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(y_1 - y_2, y_2)\, dy_2$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y_1-y_2-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{y_1-y_2-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} dy_2$$

Mějme substituce $\boxed{\begin{array}{rcl} v &=& y_2 - \mu_2 \\ u &=& y_1 - \mu_1 - \mu_2 \end{array}}$. Pak $\boxed{u - v} = y_1 - \mu_1 - \mu_2 - y_2 + \mu_2 = \boxed{y_1 - y_2 - \mu_1}$
a

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \left[\sigma_2^2(u-v)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(u-v)v + \sigma_1^2 v^2\right]\right\} dv.$$

Položme $\boxed{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} = a}$. Pak

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}(\sigma_2^2 - 2\sigma_2^2 uv + \sigma_2^2 v^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 uv + 2\rho\sigma_1\sigma_2 v^2 + \sigma_1^2 v^2)\right\} dv \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left[(\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\, v^2 + 2\sigma_2\left(\sigma_2 + \rho\sigma_1\right) uv + \sigma_2^2 v^2\right]\right\} dv \end{aligned}$$

Dále položme $\boxed{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = b^2}$ a $\boxed{\sigma_2\left(\sigma_2 + \rho\sigma_1\right) u = c}$. Potom

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left[\left(bv - \frac{c}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \sigma_2^2 u^2\right]\right\} dv \\ &= \frac{1}{2\pi a} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left(\sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2}\right)\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{bv - c/b}{a}\right)^2\right\} dv. \end{aligned}$$

Uvažujme substituci $\boxed{w = \frac{bv - c/b}{a}}$, pak $dv = \frac{a}{b} dw$ a

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left(\sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2}\right)\right\} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}w^2\right\} dw}_{=1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left(\sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2} &= \sigma_2^2 u^2 - \frac{\left[\sigma_2\left(\sigma_2 + \rho\sigma_1\right) u\right]^2}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_2^2 u^2 - \frac{\sigma_2^2 u^2 (\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \rho^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \\ &= \frac{\sigma_2^2 u^2 (\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 - \rho^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)u^2}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \\ &= \frac{a^2}{b^2}u^2, \end{aligned}$$

pak náhodná veličina $Y = Y_1$ má hustotu

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{b}\right)^2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(y_1 - \mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\right\}$$

t.j.

$$Y \quad \sim \quad N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)$$

Tím je věta dokázána. $\square$

Věta 3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou **nezávislé** náhodné veličiny takové, že $\boxed{X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)}$, $i = 1, \ldots, n$. Nechť $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. Potom náhodná veličina

$$\boxed{Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)}.$$

Důkaz. Provedeme matematickou indukcí.

(1) Nechť $n = 1$. Pak z předpokladů věty je $a_1 \neq 0$ a z věty 1 plyne, že

$$Y = a_0 + a_1 X \sim N(a_0 + a_1 \mu_1, a_1^2 \sigma_1^2).$$

(2) Nechť tvrzení věty platí pro libovolné přirozené $n \geq 1$ a $X_1, \ldots, X_{n+1}$ jsou nezávislé náhodné veličiny takové, že

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Je-li $a_{n+1} = 0$, pak zřejmě

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i X_i \sim N(a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \sigma_i^2).$$

Je-li $a_{n+1} \neq 0$, pak

$$Y = \underbrace{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i}_{Y_1} + \underbrace{a_{n+1} X_{n+1}}_{Y_2} = Y_1 + Y_2$$

je součtem dvou nezávislých náhodných veličin.

První náhodná veličina Y_1 má podle indukčního předpokladu normální rozdělení

$$Y_1 \sim N(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$$

je-li alespoň jedno z čísel $a_1, \ldots, a_n$ různé od nuly, v opačném případě je tvrzení zřejmé.

Druhá náhodná veličina Y_2 má podle věty 1 normální rozdělení

$$Y_2 \sim N(a_{n+1} \mu_{n+1}, a_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2).$$

Náhodný vektor $(Y_1, Y_2)'$ vytvořený ze dvou nezávislých normálních náhodných veličin má normální rozdělení

$$(Y_1, Y_2)' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde

$$\boldsymbol{\mu} = \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, a_{n+1} \mu_{n+1}\right)' \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 & 0 \\ 0 & a_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2 \end{pmatrix},$$

tedy

$$\rho = 0.$$

Podle věty 2 dostaneme

$$Y = Y_1 + Y_2 \sim N\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

$\square$

Věta 4. Nechť náhodná veličina $\boxed{U \sim N(0,1)}$. Potom náhodná veličina $\boxed{K = U^2 \sim \chi^2(1)}$ má χ^2 rozdělení o 1 stupni volnosti.

Důkaz. Označme distribuční funkci náhodné veličiny U jako

$$F_U(u) = P(U \leq u)$$

a hustotu pravděpodobnosti

$$f_U(u) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}u^2\right\}.$$

Vypočtěme nejprve distribuční funkci náhodné veličiny K

$$F_K(y) = P(K \leq y) = P(U^2 \leq y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ P(|U| \leq \sqrt{y}) = F_U(\sqrt{y}) - F_U(-\sqrt{y}) & y \geq 0 \end{cases}$$

a odtud pak hustotu pravděpodobnosti $f_K(y) = F'_K(y)$

$$f_K(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_U(\sqrt{y}) + f_U(-\sqrt{y})\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} & y \geq 0 \end{cases} \sim \chi^2(1)$$

$\square$

Věta 5. Nechť K_1 a K_2 jsou **nezávislé** náhodné veličiny a $\boxed{K_i \sim \chi^2(\nu_i)}$, $i = 1, 2$. Pak náhodná veličina $\boxed{K = K_1 + K_2 \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2)}$ má χ^2 rozdělení o $\nu_1 + \nu_2$ stupních volnosti.

Důkaz. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny K_i je rovna

$$f_{K_i}(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i < 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{\nu_i}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)} x_i^{\frac{\nu_i}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x_i} & x_i \geq 0 \end{cases}$$

Mějme náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, který je definován takto

$$\begin{array}{lllll} Y_1 & = & K_1 + K_2 & = & g_1(K_1, K_2) \\ Y_2 & = & K_2 & = & g_2(K_1, K_2) \end{array}.$$

Vypočtěme inverzní zobrazení

$$\begin{array}{lllll} x_1 & = & y_1 - y_2 & = & h_1(y_1, y_2) \\ x_2 & = & y_2 & = & h_2(y_1, y_2) \end{array} \quad \text{a jakobián} \quad |J| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Sdružená hustota náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ je pak tvaru

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = f_{(K_1,K_2)}(y_1 - y_2, y_2) \cdot 1 = f_{K_1}(y_1 - y_2) f_{K_2}(y_2)$$

a odtud pak **marginální hustota** $f_{Y_1}(y_1) = 0$ pro $y_1 < 0$ a pro $y_1 \geq 0$ je rovna

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{K_1}(\underbrace{y_1 - y_2}_{\geq 0}) f_{K_2}(\underbrace{y_2}_{\geq 0})\, dy_2$$

$$= \int_0^{y_1} \frac{1}{2^{\frac{\nu_1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)} (y_1 - y_2)^{\frac{\nu_1}{2}-1} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(y_1 - y_2)\right\} \frac{1}{2^{\frac{\nu_2}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} y_2^{\frac{\nu_2}{2}-1} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}y_2\right\} dy_2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}y_1\right\} \int_0^{y_1} (y_1 - y_2)^{\frac{\nu_1}{2}-1} y_2^{\frac{\nu_2}{2}-1} dy_2$$

Zaveďme substituci $\boxed{t = \frac{y_2}{y_1}}$, pak $dy_2 = y_1 dt$ a

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}y_1\right\} y_1^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{\frac{\nu_1}{2}-1} t^{\frac{\nu_2}{2}-1} dt}_{=\beta\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}y_1\right\} y_1^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1}$$

Položíme-li $K = Y_1$, pak

$$f_K(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}y} y^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1} & y \geq 0 \end{cases} \quad \sim \quad \chi^2(\nu_1+\nu_2).$$

□

Věta 6. Nechť $U_1, \ldots, U_n$ jsou **nezávislé** náhodné veličiny se standardizovaných normálním rozdělením, t.j. $\boxed{U_i \sim N(0,1)}$ pro $i = 1, \ldots, n$. Pak náhodná veličina $\boxed{K = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 \sim \chi^2(n)}$ má χ^2 rozdělení o n stupních volnosti.

Důkaz. Náhodné veličiny $U_1^2, \ldots, U_n^2$ jsou nezávislé a z věty 4 plyne, že $U_i^2 \sim \chi^2(1)$ pro $i = 1, \ldots, n$. Odtud indukcí pomocí věty 5 ihned dostáváme tvrzení věty. □

Věta 7. Nechť náhodné veličiny $\boxed{U \sim N(0,1)}$ a $\boxed{K \sim \chi^2(\nu)}$ jsou **nezávislé**. Pak náhodná veličina $\boxed{T = \frac{U}{\sqrt{K/\nu}} \sim t(\nu)}$ má Studentovo rozdělení o ν stupních volnosti.

Důkaz. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny U je rovna $f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$ pro $u \in \mathbb{R}$ a náhodné veličiny K je tvaru $f_K(x) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & y \geq 0 \end{cases}$.

Mějme náhodný vektor $\mathbf{Y} = (K_1, K_2)'$, který je definován takto $\begin{array}{rclcl} Y_1 & = & \frac{U}{\sqrt{K/\nu}} & = & g_1(U,K) \\ Y_2 & = & K & = & g_2(U,K) \end{array}$.

Vypočtěme inverzní zobrazení

$$\begin{array}{rclcl} u & = & y_1\sqrt{y_2/\nu} & = & h_1(y_1,y_2) \\ x & = & y_2 & = & h_2(y_1,y_2) \end{array}, \quad u \in \mathbb{R} \quad x \geq 0.$$

Jakobián tohoto inverzního zobrazení je roven

$$|J| = \begin{vmatrix} \sqrt{y_2/\nu} & \frac{1}{2}\nu^{-\frac{1}{2}} y_2^{-\frac{1}{2}} y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{y_2/\nu}.$$

Sdružená hustota náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ je pak tvaru

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = f_{(U,K)}(y_1\sqrt{y_2/\nu}, y_2)\sqrt{y_2/\nu} = f_U(y_1\sqrt{y_2/\nu}) f_K(y_2)\sqrt{y_2/\nu}$$

a odtud dostaneme **marginální hustotu**

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1}(y_1\sqrt{y_2/\nu}) f_{Y_2}(y_2)\sqrt{y_2/\nu}dy_2 \\ &= \int_0^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\tfrac{y_1^2 y_2}{\nu}\right\} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} y_2^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}y_2\right\} \sqrt{y_2/\nu}\, dy_2 \\ &= \frac{1}{2^{\frac{\nu+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\nu^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{y_1^2}{\nu}+1\right) y_2\right\} y_2^{\frac{\nu-1}{2}} dy_2 \end{aligned}$$

Zaveďme substituci $\boxed{t = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{\nu}+1\right) y_2}$, pak $dy_2 = 2\left(\frac{y_1^2}{\nu}+1\right)^{-1} dt$ a

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2^{\frac{\nu+1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})\nu^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{\nu+1}{2}} \left(\frac{y_1^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{\nu+1}{2}-1} dt}_{=\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}\nu^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{y_1^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Položíme-li $T = Y_1$, pak

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\nu^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad \sim \qquad t(\nu).$$

$\square$

Věta 8. Nechť K_1 a K_1 jsou **nezávislé** náhodné veličiny a $\boxed{K_i \sim \chi^2(\nu_i)}$, $i = 1, 2$. Pak náhodná veličina $\boxed{F = \frac{K1/\nu_1}{K2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2)}$ má Fisher-Snedecorovo F rozdělení o ν_1 a ν_2 stupních volnosti.

Důkaz. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny K_i je rovna

$$f_{K_i}(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i < 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{\nu_i}{2}}\Gamma(\frac{\nu_i}{2})} x_i^{\frac{\nu_i}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x_i} & x_i \geq 0 \end{cases}$$

Mějme náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, který je definován takto

$$\begin{array}{rclcl} Y_1 &=& \frac{K1/\nu_1}{K2/\nu_2} &=& g_1(K_1, K_2) \\ Y_2 &=& K_2 &=& g_2(K_1, K_2) \end{array}.$$

Vypočtěme inverzní zobrazení

$$\begin{array}{rclcl} x_1 &=& y_1 y_2 \frac{\nu_1}{\nu_2} &=& h_1(y_1, y_2) \\ x_2 &=& y_2 &=& h_2(y_1, y_2) \end{array} \quad \text{a jakobián} \quad |J| = \begin{vmatrix} y_2\frac{\nu_1}{\nu_2} & y_1\frac{\nu_1}{\nu_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2\frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

Sdružená hustota náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ je pak tvaru

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = f_{(K_1,K_2)}(y_1 y_2\tfrac{\nu_1}{\nu_2}, y_2) \cdot y_2\tfrac{\nu_1}{\nu_2} = y_2\tfrac{\nu_1}{\nu_2} f_{K_1}(y_1 y_2\tfrac{\nu_1}{\nu_2}) f_{K_2}(y_2)$$

a odtud pak **marginální hustota** $f_{Y_1}(y_1) = 0$ pro $y_1 < 0$ a pro $y_1 \geq 0$ je rovna

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{\nu_1}{2}}\Gamma(\frac{\nu_1}{2})}\left(y_1 y_2\tfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}-1} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(y_1 y_2 \tfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\} \frac{1}{2^{\frac{\nu_2}{2}}\Gamma(\frac{\nu_2}{2})} y_2^{\frac{\nu_2}{2}-1} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}y_2\right\} y_2\tfrac{\nu_1}{\nu_2} dy_2 \\ &= \frac{1}{2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} y_1^{\frac{\nu_1}{2}-1} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\nu_1}{\nu_2}y_1+1\right)y_2\right\} y_2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1} dy_2 \end{aligned}$$

Zaveďme substituci $\boxed{t = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}y_1 + 1\right) y_2}$, pak $dy_2 = 2\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}y_1 + 1\right)^{-1} dt$ a

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} y_1^{\frac{\nu_1}{2}-1} 2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}y_1 + 1\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1} dt}_{=\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} y_1^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}y_1 + 1\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}.$$

Položíme-li $F = Y_1$, pak

$$f_F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} y^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}y + 1\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} & y \geq 0 \end{cases} \sim F(\nu_1, \nu_2).$$

□

Věta 9. Nechť náhodný vektor $\boxed{\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}$ má $n-$rozměrné normální rozdělení a $\mathbf{B}$ je **regulární** matice reálných čísel typu $n \times n$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Potom náhodný vektor $\boxed{\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})}$.

Důkaz. Hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je tvaru

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\right\}.$$

Inverzní transformace k transformaci $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}$ je rovna $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{a})$, přičemž jakobián této inverzní transformace je roven $|\mathbf{J}| = |\mathbf{B}^{-1}| = |\mathbf{B}|^{-1}$. Pak hustotu transformované náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}$ lze vyjádřit takto

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= f_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{a}))|\mathbf{B}|^{-1} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}|\mathbf{B}|^{-1} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a}) - \boldsymbol{\mu}]'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a}) - \boldsymbol{\mu}]\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{a} - \mathbf{B}\boldsymbol{\mu})'|\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}|^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a} - \mathbf{B}\boldsymbol{\mu})\right\}. \end{aligned}$$

□

Věta 10. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou **nezávislé** náhodné veličiny takové, že $\boxed{X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)}$, $i = 1, \dots, n$. a $\mathbf{B}$ je **ortonormální** matice typu $n \times n$. Položme $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ a $\boxed{\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)' = \mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})}$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$. Potom Y_j jsou **nezávislé** náhodné veličiny a $\boxed{Y_j \sim N(0, \sigma^2)}$.

Důkaz. Protože $X_1, \dots, X_n$ jsou <u>nezávislé</u> náhodné veličiny s rozdělením $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, má náhodný vektor $\mathbf{X}$ hustotu

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x_i - \mu_i}{\sigma}\right)^2\right\}\right] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\tfrac{x_i - \mu_i}{\sigma}\right)^2\right\} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

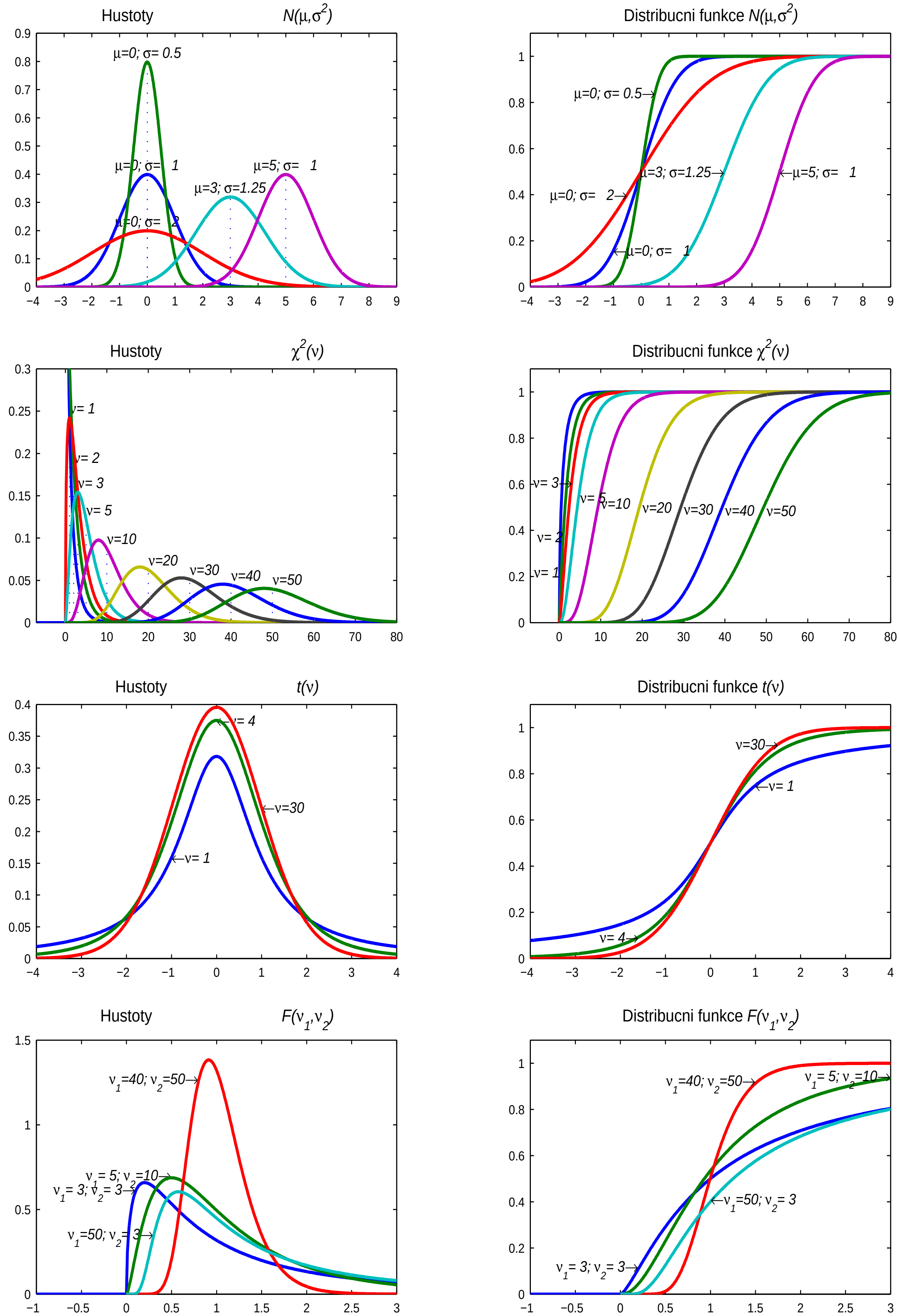
kde $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}_n$. Je-li $\mathbf{B}$ ortonormální matice (tj. $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}'$), pak z věty 9 plyne, že náhodný vektor

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \quad \sim \quad N_n(\mathbf{O}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}), \qquad \text{přičemž} \qquad \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} = \sigma^2\mathbf{B}'\mathbf{B} = \sigma^2\mathbf{I}_n$$

s hustotou tvaru

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{y_j}{\sigma}\right)^2\right\}\right] = \prod_{j=1}^n f_{Y_j}(y_j).$$

Odtud plyne tvrzení věty. □



Obrázek 1. Ukázky normálních a odvozených rozdělení.