

1. V zadání uvedu nějaký konkrétní náhodný pokus, např. „V náhodně vybraném fotbalovém mužstvu o 11 hráčích sledujeme počet hráčů starších 20 let.“ Definujte jevové pole pro tento pokus a matematicky запиšte nějaký zadaný jev (např. pro jev „alespoň jeden hráč je starší 20 let“).
2. Nechť  $(\Omega, \mathcal{A})$  je jevové pole. Uveďte axiomatickou definici pravděpodobnosti  $P$  na  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Uveďte alespoň čtyři vlastnosti pravděpodobnosti  $P$ .
3. V zadání uvedu nějaký konkrétní náhodný pokus, např. „V náhodně vybraném fotbalovém mužstvu o 11 hráčích sledujeme počet hráčů starších 20 let.“ Definujte pravděpodobnostní prostor tohoto pokusu. Jedná se o klasický pravděpodobnostní prostor? Pokud ano, napište pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů. Pokud ne, napište důvod.
4. V zadání uvedu konkrétní funkci  $F(x)$ , např. „ $F(x) = e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ “. Nakreslete graf této funkce. Jedná se o distribuční funkci? Pokud ano, vyberte si libovolné 4 vlastnosti, které splňuje distribuční funkce a ověřte je. Pokud ne, napište důvod.
5. V zadání uvedu konkrétní náhodnou veličinu  $X$ , např. „Pravděpodobnost, že náhodně vybraný zaměstnanec má zájem o jazykový kurz, je 0,7. Náhodná veličina  $X$  značí zájem nebo nezájem vybraného zaměstnance“. Jakým rozdělením pravděpodobnosti se řídí zadaná náhodná veličina? Pro tyto konkrétní hodnoty napište její rozdělení pravděpodobnosti (pravděpodobnostní funkci nebo hustotu) a dále její střední hodnotu a rozptyl.
6. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má alternativní rozdělení pravděpodobnosti  $A(\theta)$  (parametr  $\theta$  bude zadán číselně, tj. např.  $A(1/3)$ ). Pro tuto konkrétní náhodnou veličinu napište její střední hodnotu a rozptyl a popište, jak by se pomocí pravděpodobnostní funkce vypočítala pravděpodobnost  $P(a < X \leq b)$  (místo  $a$  a  $b$  budou čísla).
7. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má binomické rozdělení pravděpodobnosti  $Bi(n, \theta)$  (parametry  $n$  a  $\theta$  budou zadány číselně, tj. např.  $Bi(12; 1/3)$ ). Pro tuto konkrétní náhodnou veličinu napište její střední hodnotu a rozptyl a popište, jak by se pomocí pravděpodobnostní funkce vypočítala pravděpodobnost  $P(a < X \leq b)$  (místo  $a$  a  $b$  budou čísla).
8. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti  $Po(\lambda)$  (parametr  $\lambda$  bude zadán číselně, tj. např.  $Po(1/3)$ ). Pro tuto konkrétní náhodnou veličinu napište její střední hodnotu a rozptyl a popište, jak by se pomocí pravděpodobnostní funkce vypočítala pravděpodobnost  $P(a < X \leq b)$  (místo  $a$  a  $b$  budou čísla).
9. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má rovnoměrné spojité rozdělení pravděpodobnosti  $Ro(c, d)$  (parametry  $c$  a  $d$  budou zadány číselně, tj. např.  $Ro(0; 4)$ ). Pomocí grafu hustoty graficky znázorněte pravděpodobnost  $P(a < X \leq b)$  (místo  $a$  a  $b$  budou čísla) a do obrázku také vyznačte střední hodnotu. Napište, jaký má tato náhodná veličina rozptyl.
10. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti  $N(\mu, \sigma^2)$  (parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$  budou zadány číselně, tj. např.  $N(0; 4)$ ). Pomocí grafu hustoty graficky znázorněte pravděpodobnost  $P(a < X \leq b)$  (místo  $a$  a  $b$  budou čísla) a do obrázku také vyznačte střední hodnotu. Napište, jaký má tato náhodná veličina rozptyl.
11. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti  $Ex(\lambda)$  (parametr  $\lambda$  bude zadán číselně, tj. např.  $Ex(1/3)$ ). Pomocí grafu hustoty graficky znázorněte pravděpodobnost  $P(a < X \leq b)$  (místo  $a$  a  $b$  budou čísla) a do obrázku také vyznačte střední hodnotu.

12. Definujte střední hodnotu diskretní náhodné veličiny  $X$  a napište libovolné 4 její vlastnosti.
13. Definujte rozptyl náhodné veličiny  $X$ . Definujte také směrodatnou odchylku náhodné veličiny  $X$ . Napište právě 4 vlastnosti rozptylu.
14. Nechť  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$  je náhodný výběr z rozdělení  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$  (rozdělení bude zadáno konkrétně, např.  $Po(4)$ ). Formulujte, jak a za jakých podmínek by se aproximovalo rozdělení náhodné veličiny  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  pomocí centrální limitní věty ( $n$  bude zadáno konkrétně).
15. Formulujte a matematicky popište, jak se dá aproximovat Binomické rozdělení pravděpodobnosti pomocí normálního (Gaussova) rozdělení.
16. Definujte nestranný a asymptoticky nestranný odhad parametrické funkce  $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ . Formulujte postačující podmínku pro to, aby odhad parametrické funkce  $\gamma(\boldsymbol{\theta})$  byl konzistentní.
17. Definujte  $100(1 - \alpha)\%$  interval spolehlivosti pro parametrickou funkci  $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ . Nechť  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  je náhodný výběr z rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ , kde  $\mu$  a  $\sigma^2$  jsou neznámé parametry. Uveďte  $100(1 - \alpha)\%$  interval spolehlivosti pro střední hodnotu  $\mu$ .
18. Uvažujeme regresní model  $Y_i = m(x_i) + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (funkce  $m(x)$  bude zadána konkrétně, např.  $\beta_0 + \beta_1 x$ ). Napište matici plánu pro měření v bodech  $x_1, \dots, x_n$  (body budou zadány konkrétně, např. 1, 2, 3, 4, 5). Rozhodněte, zda je tato matice plně hodnosti a své rozhodnutí zdůvodněte. Formulujte předpoklady o náhodných chybách  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
19. Definujte lineární regresní model pro obecnou regresní přímku. Napište matici plánu a soustavu normálních rovnic, které se řeší při odhadech neznámých parametrů.
20. Testujeme, zda určitý faktor (bude zadán konkrétně, např. „červená, modrá nebo zelená barva auta“) ovlivňuje výsledek nějakého měření (opět bude konkrétně, např. „naměřená rychlost auta“). Definujte základní model a minimální submodel, které se používají při analýze rozptylu. Formulujte hypotézu, která se zde testuje.