Závěrečná zkouška z MV011 **Seznam otázek z teorie**

(Modře jsou uvedeny poznámky k zadání)

1. V zadání uvedu nějaký konkrétní náhodný pokus, např. „V náhodně vybraném fotbalovém mužstvu o 11 hráčích sledujeme počet hráčů starších 20 let.“ Definujte jevové pole pro tento pokus a matematicky zapište nějaký zadaný jev (např. pro jev „alespoň jeden hráč je starší 20 let“).

2. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole. Uveďte axiomatickou definici pravděpodobnosti P na $(\Omega, \mathcal{A})$. Uveďte alespoň čtyři vlastnosti pravděpodobnosti P.

3. V zadání uvedu nějaký konkrétní náhodný pokus, např. „V náhodně vybraném fotbalovém mužstvu o 11 hráčích sledujeme počet hráčů starších 20 let.“ Definujte pravděpodobnostní prostor tohoto pokusu. Jedná se o klasický pravděpodobnostní prostor? Pokud ano, napište pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů. Pokud ne, napište důvod.

4. V zadání uvedu konkrétní funkci $F(x)$, např. „$F(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$“. Nakreslete graf této funkce. Jedná se o distribuční funkci? Pokud ano, vyberte si libovolné 4 vlastnosti, které splňuje distribuční funkce a ověřte je. Pokud ne, napište důvod.

5. V zadání uvedu konkrétní náhodnou veličinu X, např. „Pravděpodobnost, že náhodně vybraný zaměstanec má zájem o jazykový kurz, je 0,7. Náhodná veličina X značí zájem nebo nezájem vybraného zaměstnance“. Jakým rozdělením pravděpodobnosti se řídí zadaná náhodná veličina? Napište její pravděpodobnostní funkci a dále její střední hodnotu a rozptyl.

6. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má alternativní rozdělení pravděpodobnosti $A(\theta)$ (parametr θ bude zadán číselně, tj. např. $A(1/3)$). Napište střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny a napište, jak by se vypočítala pravděpodobnost $P(a < X \leq b)$ (místo a a b budou čísla).

7. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má binomické rozdělení pravděpodobnosti $Bi(n, \theta)$ (parametry n a θ budou zadány číselně, tj. např. $Bi(12; 1/3)$). Napište střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny a napište, jak by se vypočítala pravděpodobnost $P(a < X \leq b)$ (místo a a b budou čísla).

8. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti $Po(\lambda)$ (parametr λ bude zadán číselně, tj. např. $Po(1/3)$). Napište střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny a napište, jak by se vypočítala pravděpodobnost $P(a < X \leq b)$ (místo a a b budou čísla).

9. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má rovnoměrné spojité rozdělení pravděpodobnosti $Ro(c, d)$ (parametry c a d budou zadány číselně, tj. např. $Ro(0; 4)$). Pomocí grafu hustoty graficky znázorněte pravděpodobnost $P(a < X \leq b)$ (místo a a b budou čísla) a do obrázku také vyznačte střední hodnotu.

10. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti $N(\mu, \sigma^2)$ (parametry μ a σ^2 budou zadány číselně, tj. např. $N(0; 4)$). Pomocí grafu hustoty graficky znázorněte pravděpodobnost $P(a < X \leq b)$ (místo a a b budou čísla) a do obrázku také vyznačte střední hodnotu.

11. Uveďte příklad náhodné veličiny, která má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti $Ex(\lambda)$ (parametr λ bude zadáne číselně, tj. např. $Ex(1/3)$). Pomocí grafu hustoty graficky znázorněte pravděpodobnost $P(a < X \leq b)$ (místo a a b budou čísla) a do obrázku také vyznačte střední hodnotu.

12. Definujte střední hodnotu diskrétní náhodné veličiny X a napište některé její vlastnosti (alespoň 4).

13. Definujte rozptyl náhodné veličiny X. Definujte také směrodatnou odchylku náhodné veličiny X. Napište některé vlastnosti rozptylu (alespoň 4).

14. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ (rozdělení bude zadáno konkrétně, např. $Po(4)$). Formulujte, jak a za jakých podmínek by se aproximovalo rozdělení náhodné veličiny $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pomocí centrální limitní věty.

15. Formulujte a matematicky popište, jak se dá aproximovat Binomické rozdělení pravděpodobnosti pomocí normálního (Gaussova) rozdělení.

16. Definujte nestranný a asymptoticky nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$. Formulujte postačující podmínku pro to, aby odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ byl konzistentní.

17. Definujte $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $\gamma(\boldsymbol{\theta})$. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ a σ^2 jsou neznámé parametry. Uveďte $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

18. Uvažujeme regresní model $Y = m(x) + \varepsilon$ (funkce $m(x)$ bude zadána konkrétně, např. $2x + 1$). Provedeme měření v bodech $x_1, \ldots, x_n$ (body budou zadány konkrétně, např. $1, 2, 3, 4, 5$). Napište matici plánu. Kolik budeme odhadovat parametrů? Formulujte předpoklady o náhodných chybách ε.

19. Definujte lineární regresní model pro obecnou regresní přímku. Napište matici plánu a soustavu normálních rovnic, které se řeší při odhadech neznámých parametrů.

20. Testujeme, zda určitý faktor (bude zadán konkrétně, např. „červená, modrá nebo zelená barva auta“) ovlivňuje výsledek nějakého měření (opět bude konkrétně, např. „naměřená rychlost auta“). Definujte základní model a minimální submodel, které se používají při analýze rozptylu. Formulujte hypotézu, která se zde testuje.