Závěrečná zkouška z MV011 **Vzorové zadání**

1	2	3	4	5	$\sum$	Jméno:
						Učo:

Za každý příklad lze získat maximálně 10 bodů.

1. V náhodně vybraném fotbalovém mužstvu o 11 hráčích sledujeme počet hráčů starších 20 let. Definujte pravděpodobnostní prostor tohoto pokusu. Jedná se o klasický pravděpodobnostní prostor? Pokud ano, napište pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů. Pokud ne, napište důvod.

2. Definujte nestranný a asymptoticky nestranný odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$. Formulujte postačující podmínku pro to, aby odhad parametrické funkce $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ byl konzistentní.

3. Ve skupině 30 studentů je 5 geniálních, 10 výborných a zbytek jsou průměrní studenti. Geniální studenti odpoví vždy správně, výborní v 80 % otázek, průměrní jen s pravděpodobností 0,5. Náhodně je vybrán jeden student a je mu položena otázka.
(A) Spočítejte pravděpodobnost, že student odpoví špatně;
(B) Spočítejte pravděpodobnost, že student je průměrný, když odpověděl špatně.
(C) Jsou jevy „student odpoví špatně“ a „student je průměrný, když odpověděl špatně“ stochasticky nezávislé? Zdůvodněte.

4. Řidič dodávkového auta projíždí 4 křižovatkami řízenými nezávislými semafory. Na každé křižovatce svítí zelený signál s pravděpodobností 0,4 a červený signál s pravděpodobností 0,6, oranžovou neuvažujeme. Náhodná veličina X popisuje počet křižovatek, které řidič projede, než bude nucen poprvé zastavit na červený signál.
(A) Spočítejte rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X.
(B) Načrtněte graf distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X.
(C) Spočítejte střední hodnotu EX.
(D) Spočítejte pravděpodobnost $P(1 \leq X \leq 2{,}4)$.

5. Při zjišťování denní teploty (s normálním rozdělením pravděpodobnosti) v měsíci květnu bylo provedeno 10 měření s výběrovým průměrem 20,4 °C a výběrovou směrodatnou odchylkou 4,7 °C. Odvoďte a číselně spočítejte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu teploty. Postup výpočtu a výsledek okomentujte. Jak byste výsledný interval v praxi intepretovali?

$u_{0,95}$	$u_{0,975}$	$F_{0,95}(9,9)$	$F_{0,975}(9,9)$	$F_{0,95}(10,10)$	$F_{0,975}(10,10)$	$F_{0,95}(9,8)$	$F_{0,975}(9,8)$	$F_{0,95}(8,9)$	$F_{0,975}(8,9)$
1,645	1,960	3,179	4,026	2,978	3,717	3,388	4,357	3,230	4,102

$t_{0,95}(10)$	$t_{0,975}(10)$	$t_{0,95}(9)$	$t_{0,975}(9)$	$\chi^2_{0,025}(10)$	$\chi^2_{0,05}(10)$	$\chi^2_{0,95}(10)$	$\chi^2_{0,975}(10)$	$\chi^2_{0,025}(9)$	$\chi^2_{0,05}(9)$	$\chi^2_{0,95}(9)$	$\chi^2_{0,975}(9)$
1,812	2,228	1,833	2,262	3,247	3,940	18,307	20,483	2,700	3,325	16,919	19,023

Pomocné vzorce jsou na druhé straně zadání!

Pomocné vzorce

Čebyševova nerovnost: $P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Mějme $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \dots, X_n\} \simeq N(\mu, \sigma^2)$ a výběrový průměr $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ a výběrový rozptyl $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. Pak platí

(1) Výběrový průměr $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(2) Statistika $U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

(3) Statistika $K = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$

(4) Statistika $T = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

Nechť $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \dots, X_{n_1}\} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\overline{X}$ výběrový průměr a S_1^2 výběrový rozptyl. Dále nechť $\perp\!\!\!\perp\{Y_1, \dots, Y_{n_2}\} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\overline{Y}$ výběrový průměr a S_2^2 výběrový rozptyl. Předpokládejme $\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$. Pak

1. Statistika
$$U_{\overline{X}-\overline{Y}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

2. Pokud $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak statistika
$$T_{\overline{X}-\overline{Y}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{12}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), S_{12}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

3. Statistika
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Nechť $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \dots, X_n\} \simeq A(\theta)$ a výběrový průměr $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Pak platí

Statistika $U = \frac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}\sqrt{n} \overset{A}{\sim} N(0,1)$

Nechť $\perp\!\!\!\perp\{X_1, \dots, X_n\} \simeq Po(\theta)$ a výběrový průměr $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Pak platí

Statistika $U = \frac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\overline{X}}}\sqrt{n} \overset{A}{\sim} N(0,1)$