Pojmová analýza

Jan Paseka
založeno na přednášce Rudolfa Willeho

verze z May 7, 1999

Contents

Chapter 0

Základy teorie uspořádaných množin

Formální pojmová analýza je založena na teorii uspořádaných množin a to zejména na teorii úplných svazů. Znalosti z této oblasti nejsou u čtenáře předpokládány, matematické základy jsou shrnuty v této kapitole. Museli jsme se přitom ale omezit na to nejnutnější; pro široký úvod do teorie uspořádaných množin nezbyl žádný prostor. Ze stejného důvodu musíme předpokládat, že čtenář umí pracovat s matematickým textem: používáme bez dalšího řeči matematiky, tedy teorii množin.

V první části zavedeme uspořádané množiny, v druhé úplné svazy. Obě tyto části mají pro následující kapitoly zásadní význam. Při prvním čtení lze však přeskočit třetí část, která se zabývá uzávěrovými operátory, a právě tak část čtvrtou o Galoisových konexích. Mnohé z toho, co tyto části obsahují, se objeví později pod jiným označením, druhá polovina této kapitoly je věnována zdomácnění základních pojmů formální pojmové analýzy v teorii uspořádáných množin a svazů. Držíme se přitom na mnoha místech klasického postupu **G. Birkhoffa**.

1 Uspořádané množiny

Definice 1.1 **Binární relace** *R mezi dvěma množinami M a N je množina dvojic (m,n) tak, že $m \in M$ a $n \in N$, tedy podmnožina množiny $M \times N$ všech takovýchto dvojic. Místo $(m,n) \in R$ často píšeme mRn, a namísto $(m,n) \notin R$ někdy $m\not{R}n$. Je-li $N = M$, mluvíme o* **binární relaci na množině** *M. R^{-1} označuje* inverzní relaci k R, *to jest relaci mezi N a M s $nR^{-1}m :\Leftrightarrow mRn$.*

Definice 1.2 *Binární relace R na množině M se nazývá* relace uspořádání *(nebo krátce* uspořádání*), pokud splňuje pro všechny prvky $x,y,z \in M$ následující:*

1. *xRx* *(reflexivita)*

2. *xRy a $x \neq y \Rightarrow y \not{R} x$* *(antisymetrie)*
3. *xRy a $yRz \Rightarrow xRz$* *(tranzitivita)*

Pro R se často používá označení $\leq$ (pro R^{-1} pak označení $\geq$), a píšeme $x < y$ pro $x \leq y$ a zároveň $x \neq y$. Jako obvykle čteme $x \leq y$ jako "'x je menší nebo rovno y"', atd. Uspořádaná množina *je dvojice $(M, \leq_M)$, přičemž M je množina a $\leq$ uspořádání na M.* Místo dvojice $(M, \leq_M)$ píšeme často také M.*

Příklady uspořádaných množin jsou: reálná čísla $\mathbf{R}$ s obvyklou $\leq$-relací, ale také prostor $\mathbf{R}^n$ s $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i$ pro $i = 1, 2, \ldots n$; přirozená čísla $\mathbf{N}$ s relací dělitelnosti $|$; *potenční množina* $\mathcal{P}(M)X$ všech podmnožin libovolné množiny X s množinovou inkluzí. V dalším probereme mnohé další příklady.

Definice 1.3 *Řekneme, že a je* dolní soused *b, pokud $a < b$ a neexistuje takový prvek c tak, že $a < c < b$. b je pak* horní soused *a, a píšeme $a \prec b$.*

Hasseovy diagramy: Každá konečná množina M je reprezentovatelná *liniovým diagramem* (nazývaným v literatuře často také *Hasseův diagram*). Prvky z M se označují pomocí malých kroužků v rovině pohledu. Jsou-li $x, y \in M$ s $x \prec y$, pak je y odpovídající kroužek nad x – odpovídajícím kroužkem (posunutí bokem je připustěno), a oba kroužky se spojí jedinou úsečkou. Z takovéhoto diagramu lze relaci uspořádání vyčíst následovně: $x \leq y$ právě tehdy, když kroužek, který představuje y, je dosažitelný z kroužku reprezentujícího x kroužku pomocí rostoucí cesty z úseček.

Definice 1.4 *Dva prvky x, y uspořádané množiny M se nazývají* srovnatelné, *pokud $x \leq y$ nebo $y \leq x$, jinak mluvíme o* nesrovnatelných *prvcích. Podmnožina M, ve které jsou každé dva prvky srovnatelné, se nazývá* řetězec, *podmnožina, ve které jsou všechny prvky navzájem nesrovnatelné,* antiřetězec. Šířka *konečné uspořádané množiny M je definovaná jako maximální mohutnost antiřetězce v M, pro libovolnu uspořádanou množinu M pak jako supremum mohutností antiřetězců v M. Podobně se definuje* délka *uspořádané množiny jako supremum mohutností řetězců v Mzmenšené o jedničku.*

Definice 1.5 *Je-li M uspořádaná množina a jsou-li $a, b \in M$ prvky z M splňující $a \leq b$, definujem* interval

$$[a,b] := \{x \in M \mid a \leq x \leq b\}.$$

*V literatuře se často hovoří místo o uspořádání příp. uspořádané množině, o *částečném uspořádání* příp. **částečně uspořádané množině**.

Říkáme pak, že

$$(a] := \{x \in M \mid x \le a\}$$

je hlavní ideál a

$$[a) := \{x \in M \mid x \ge a\}$$

hlavní filtr.

$a \prec b$ je pak rovnocenné s $a < b$ a $[a,b] = \{a,b\}$.

Definice 1.6 *Zobrazení $\varphi : M \longrightarrow N$ mezi dvěma uspořádanými množinami $(M, \le_M)$ a $(N, \le_N)$ se nazývá* **izotonní zobrazení**, *jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí*

$$x \le y \Rightarrow \varphi x \le \varphi y.$$

Je-li navíc pro φ splněno obrácení

$$x \le y \Leftarrow \varphi x \le \varphi y,$$

mluvíme o φ izotonním vnoření , *φ je pak nutně injektivní. Bijektivní vnoření se nazývát* **izomorfismus uspořádaných množin**.

Ne všechna bijektivní izotonní zobrazení jsou izomorfní. Abychom o izotonním zobrazení φ dokázali, že se jedná o isomorfismus , dokáže se obvykle, že inverzní zobrazení φ^{-1} existuje a zároveň je izotonní.

Definice 1.7 *Jsou-li $(M_1, \le)$ a $(M_2, \le)$ uspořádané množiny, pak definujeme jejich* součin *jako uspořádanou množinu $(M_1 \times M_2, \le)$ kde*

$$(x_1, x_2) \le (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 \le y_1 \text{ a } x_2 \le y_2.$$

Definici součinu lze rozšířit na libovolně mnoho faktorů: Je-li T indexová množina a jsou-li M_t, $t \in T$ usořádané množiny, pak klademe

$$\textstyle\prod_{t \in T} M_t := (\prod_{t \in T} M_t, \le), \text{ kde}$$

$$(x_t)_{t \in T} \le (y_t)_{t \in T} :\Leftrightarrow x_t \le y_t \text{ pro všechna } t \in T.$$

Definice 1.8 *Abychom mohli definovat* kardinální součet *neboli* **disjunktní sjednocení** *dvou uspořádaných množin, zaveďme nejdříve označení*

$$\dot{M}_t := \{t\} \times M_t,$$

množiny $\dot{M}_1$ a $\dot{M}_2$ jsou pak disjunktní kopie M_1 a M_2. Definujeme pak

$$(M_1, \le) + (M_2, \le) := (\dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \le),$$

přičemž uspořádání je zavedeno následovně:

$$(s, a) \le (t, b) :\Leftrightarrow s = taa \le b \text{ in } M_s.$$

Tyto definice lze snadno zobecnit na případ libovolně mnoha sčítanců.

Princip duality pro uspořádané množiny: Inverzní relace $\ge$ k uspořádání $\le$ je opět uspořádání. Mluvíme o **duálním** uspořádání k $\le$. Hasseův diagram duální uspořádané množiny $(M, \le_M)^d := (M, \ge)$ získáme z diagramu $(M, \le_M)$ jako zrcadlový obraz podle vodorovné přímky. Je-li $(M, \le_M) \cong (N, \le_N)^d$, jsou pak obě uspořádání *duálně izomorfní*.

K výroku $\mathbf{A}$ v jazyce uspořádaných množin , který obsahuje kromě čistě logických částí pouze znak $\le$, získáme duální výrok $\mathbf{A}^d$, pokud nahradíme v $\mathbf{A}$ znak $\le$ znakem $\ge$. $\mathbf{A}$ platí v nějaké uspořádané množině právě tehdy, když $\mathbf{A}^d$ platí v duální uspořádané množině. Princip duality se používá pro zjednodušení definic a důkazů. Tvrdí-li věta dva navzájem duální výroky, dokazuje se obvykle pouze jeden, zbývající se získá "‘duálně"’, tzn. se stejným důkazem pro duální uspořádání.

Definice 1.9 *Buď M uspořádaná množina a A podmnožina M.* Dolní závora A *je prvek s z M tak, že $s \le a$ pro všechna $a \in A$. Duálně definujeme* horní závoru A. *Existuje-li v množině všech dolních závor množiny A největší, mluvíme pak o* infimu *množiny A a značíme jej $\inf A$ nebo $\bigwedge A$; duálně mluvíme o nejmenší horní závoře jako o* supremu† *a píšeme* $\sup A$ *resp.* $\bigvee A$. *je-li $A = \{x, y\}$, píšeme místo* $\inf A$ *také $x \wedge y$ a pro* $\sup A$ *také $x \vee y$.*

2 Úplné svazy

Definice 2.1 *Uspořádaná množina $\mathcal{V} = (V, \le)$ je* svaz, *jestliže pro každé dva prvky x a y ve V existují supremum $x \vee y$ a infimum $x \wedge y$. $\mathcal{V}$ se nazývá* úplný svaz, *jestliže pro každou podmnožinu X množiny V existují supremum $\bigvee X$ a infimum $\bigwedge X$. Každý úplný svaz $\mathcal{V}$ má největší prvek, totiž $\bigvee V$, mluvíme pak o* jedničce *svazu a značíme jej $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}$. Duálně se nejmenší prvek $\mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ nazývá* nulou.

Definice úplného svazu požaduje, aby pro každou podmnožinu X existovalo supremum a infimum, tedy také pro $X =$. Máme pak $\bigwedge = \mathbf{1}_{\mathcal{V}}$ a $\bigvee = \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$, z čehož zejména plyne $V \ne$ pro každý úplný svaz. Každý neprázdný konečný svaz je úplný.

Ze svazových operací infimum und supremum lze nazpět získat uspořádání

$$x \le y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

Je-li T indexová množina a $X := \{x_t \mid t \in T\}$ je z V, píšeme místo $\bigvee X$ také $\bigvee_{t \in T} x_t$ a místo $\bigwedge X$ také $\bigwedge_{t \in T} x_t$. Operace supremuma příp. infima jsou asociativní: Je-li $\{X_t \mid t \in T\}$ systém podmnožin V, pak platí $\bigvee_{t \in T} (\bigvee X_t) = \bigvee (\bigcup_{t \in T} X_t)$ a duálně $\bigwedge_{t \in T} (\bigwedge X_t) = \bigwedge (\bigcup_{t \in T} X_t)$.

† Pro infimum resp. supremum je zvykem používat označení *průsek* resp. *spojení*

Princip duality pro svazy: Definice svazu příp. úplného svazu jsou samoduální: Je-li $(V, \leq)$ (úplný) svaz, je to také $(V, \leq)^d = (V, \geq)$. Princip duality pro uspořádané množiny lze přenést na svazy: z jednoho svazově-teoretického výroku lze získat duální výrok tak, že symboly $\leq, \vee, \wedge, \bigvee, \bigwedge, 0_V, 1_V$ atd. nahradíme $\geq, \wedge, \vee, \bigwedge, \bigvee, 1_V, 0_V$ atd.

Lemma 2.2 *Uspořádaná množina, ve které pro každou podmnožinu existuje infimum, je úplný svaz.*

Důkaz. Buď X libovolná podmnožina uspořádané množiny. Musíme dokázat, že supremum množiny X existuje. Množina S všech horních závor množiny X má infimum s (dokonce i tehdy, když je S prázdná). Každý prvek X je dolní závora množiny S, je tedy $\leq s$. Tím je pak s samotné horní závora množiny X a tedy i supremum.

Příklady: 1)Pro každou množinu M je potenční množina $\mathcal{P}(M)M$, tj. systém všech podmnožin M, uspořádána množinovou inkluzí $\subseteq$, a $(\mathcal{P}(M)M, \subseteq)$ je úplný svaz. Svazové operace supremum und infimum jsou zde množinové sjednocení a průnik.
2) Každý uzavřený reálný interval $[a, b]$ s přirozeným uspořádáním tvoří úplný svaz $([a, b], \leq)$ s obvyklým infimem příp. supremem jako svazovými operacemi. Naproti tomu uspořádaná množina $(\mathbf{R}, \leq)$ je sice svaz, ale ne úplný svaz: chybí jí největší a nejmenší prvek.
Další příklady úplných svazů v matematice podáme v odstavci 0.3.

Definice 2.3 *Pro prvek v úplného svazu $\mathcal{V}$ definujeme*

$$\begin{aligned} v_* &:= \bigvee\{x \in V \mid x < v\} \\ \text{a} \quad v^* &:= \bigwedge\{x \in V \mid v < x\}. \end{aligned}$$

Prvek v nazýváme $\bigvee$-ireducibilní, *jestliže je $v \neq v_*$, pokud tedy v nelze rozložit na supremum ostře menších prvků. v_* je pak jediný dolní soused prvku v. Duálně nazýváme prvek v* $\bigwedge$-ireducibilní, *jestliže je $v \neq v^*$. $J(\mathcal{V})$ označuje množinu všech $\bigvee$-ireducibilních prvků a $M(\mathcal{V})$ množinu $\bigwedge$-ireducibilních. Množina $X \subseteq V$ se nazývá* supremum-hustá *ve V, pokud lze každý prvek z V reprezentovat jako supremum nějaké podmnožiny X, a duálně* infimum-hustá, *jestliže pro všechna $v \in V$ platí $v = \bigwedge\{x \in X \mid v \leq x\}$.*

Lemma 2.4 *Prvek v konečného svazu je $\bigvee$-ireducibilní právě tehdy, když má právě jednoho dolního souseda a $\bigwedge$-ireducibilní právě tehdy, když má právě jednoho horního souseda. Každá supremum-hustá množina obsahuje všechny $\bigvee$-ireducibilní prvky a každá infimum-hustá všechny $\bigwedge$-ireducibilní. V konečném svazu $\mathcal{V}$ je obráceně množina $J(\mathcal{V})$ supremum-hustá a $M(\mathcal{V})$ infimum-hustá.*

Důkaz. v je $\bigvee$-ireducibilní právě tehdy, když $v_* \neq v$. Toto je ale rovnocenné s tím, že v_* je největší z těch prvků, které jsou menší než v, obzvláště je tedy jediný dolní soused v. Duálně se tvrzení dokáže pro $\bigwedge$-ireducibilní prvky. Druhé tvrzení věty je triviální, třetí se dokazuje indukcí: Každý prvek, který sám není $\bigvee$-ireducibilní, je supremum ostře menších prvků. Jsou-li tyto suprema $\bigvee$-ireducibilních prvků, je i v.

Snadno lze udat příklad nekonečných úplných svazů, jež neobsahují ani $\bigvee$-ireducibilní ani $\bigwedge$-ireducibilní prvky, např. reálný interval $[0, 1]$ s přirozeným uspořádáním. Vždy $\bigvee$-ireducibilní jsou (pokud existují) horní sousedé nulového prvku (zvané *atomy* svazu), vždy $\bigwedge$-ireducibilní jsou *koatomy*, jež jsou dolní sousedé jedničky.

Definice 2.5 *Podmnožina U úplného svazu $\mathcal{V}$, jež je uzavřena na libovolná suprema, pro niž tedy platí*

$$T \subseteq U \Rightarrow \bigvee T \in U,$$

je $\bigvee$-podpolosvaz $\mathcal{V}$. *Duálně nazýváme $\bigwedge$-uzavřenou podmnožinu* $\bigwedge$-podpolosvazem. *Množina, jež je uzavřená jak vzhledem k supremům tak i infimům je* úplný podsvaz.

Definice 2.6 *Zobrazení $\varphi : V \longrightarrow W$ mezi dvěma úplnými svazy $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ se nazývá* **supremum-zachovávající**, *pokud pro každou podmnožinu X svazu V platí*

$$\varphi \bigvee X = \bigvee \varphi(X).$$

[‡] *Jiný název je* $\bigvee$-morfismus, *a duálně:* infimum-zachovávající zobrazení, $\bigwedge$-morfismus. *Zachovává-li φ jak supremuma tak infima, je φ* **úplný (svazový) homomorfismus**.

Každé supremum-zachovávající zobrazení, tedy zejména každý úplný homomorfismus, zachovává uspořádání. Obráceně je každý izomorfismus uspořádaných množin mezi úplnými svazy automaticky také *izomorfismus svazů*, t.j. bijektivní úplný homomorfismus.

3 Uzávěrové operátory

Definice 3.1 Uzávěrový systém *na množině G je množina podmnožin, která obsahuje G a je uzavřená na libovolné průniky. Formálně: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)G$ je uzávěrový systém, pokud $G \in \mathcal{A}$ a platí*

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{A}.$$

[‡] $\varphi(X)$ znamená $\{\varphi x \mid x \in X\}$.

Uzávěrový operátor φ *na* G *je zobrazení, které přiřadí každé podmnožině* $X \subseteq G$ uzávěr $\varphi X \subseteq G$, *přičemž platí:*

1. $X \subseteq Y \Rightarrow \varphi X \subseteq \varphi Y$ *(monotonie)*
2. $X \subseteq \varphi X$ *(extenzita)*
3. $\varphi\varphi X = \varphi X$ *(idempotence)*

Uzávěrový systém a uzávěrový operátor jsou spolu těsně spřízněny, jak ukazuje následující pomocná věta:

Lemma 3.2 *Je-li* $\mathcal{A}$ *uzávěrový systém na* G, *pak*

$$\varphi_{\mathcal{A}} X := \bigcap\{A \in \mathcal{A} \mid X \subseteq A\}$$

definuje uzávěrový operátor na G. *Obráceně, množina*

$$\mathcal{A}_\varphi := \{\varphi X \mid X \subseteq G\}$$

všech uzávěrů uzávěrového operátoru φ *je vždy uzávěrový systém, a platí*

$$\varphi_{\mathcal{A}_\varphi} = \varphi \quad \textit{a zrovna tak} \quad \mathcal{A}_{\varphi_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}.$$

Důkaz.

- $\varphi_{\mathcal{A}}$ je uzávěrový operátor: Z $X \subseteq Y$ plyne $\{A \in \mathcal{A} \mid X \subseteq A\} \supseteq \{A \in \mathcal{A} \mid Y \subseteq A\}$, tedy $\varphi_{\mathcal{A}} X = \bigcap\{A \in \mathcal{A} \mid X \subseteq A\} \subseteq \bigcap\{A \in \mathcal{A} \mid Y \subseteq A\} = \varphi_{\mathcal{A}} Y$ (monotonie). Extensita je triviální, idempotence: podle definice $\varphi_{\mathcal{A}}$ obsahuje každý prvek $\mathcal{A}$, který obsahuje X, také $\varphi_{\mathcal{A}} X$, a obráceně.
- $\mathcal{A}_\varphi$ je uzávěrový systém: Buď $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_\varphi$. Kvůli extensitě φ je $\bigcap \mathcal{X} \subseteq \varphi(\bigcap \mathcal{X})$. Z monotonie und idempotence plyne pro $X \in \mathcal{X}$ vždy $\varphi(\bigcap \mathcal{X}) \subseteq \varphi X = X$, což implikuje $\varphi(\bigcap \mathcal{X}) \subseteq \bigcap \mathcal{X}$.
- $X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X = \bigcap\{A \in \mathcal{A} \mid X \subseteq A\} \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{A}} X = X \Leftrightarrow X \in \mathcal{A}_{\varphi_{\mathcal{A}}}$.
- Pro $A \in \mathcal{A}_\varphi$ je $X \subseteq A$ ekvivalentní s $\varphi X \subseteq A$. Tedy je $\varphi_{\mathcal{A}_\varphi} X = \bigcap\{A \in \mathcal{A}_\varphi \mid X \subseteq A\} = \bigcap\{A \in \mathcal{A}_\varphi \mid \varphi X \subseteq A\} = \varphi X$, poněvadž $\varphi X \in \mathcal{A}_\varphi$.

Každý uzávěrový systém $\mathcal{A}$ lze považovat za množinu uzávěrů vhodného uzávěrového operátoru. Nazýváme proto prvky $\mathcal{A}$ rovněž uzávěry.

Lemma 3.3 *Je-li* $\mathcal{A}$ *uzávěrový systém, je pak* $(\mathcal{A}, \subseteq)$ *úplný svaz s operacemi* $\bigwedge \mathcal{X} = \bigcap \mathcal{X}$ *a* $\bigvee \mathcal{X} = \varphi_{\mathcal{A}} \bigcup \mathcal{X}$ *pro všechna* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$. *Obráceně je každý úplný svaz isomorfní se svazem všech uzávěrů nějakého uzávěrového systému.*

Důkaz. Že je $\bigcap \mathcal{X}$ infimum a tím (srovnej Lemma 2.2) $\varphi_{\mathcal{A}} \bigcup \mathcal{X}$ představuje supremum $\mathcal{X}$, je zřejmé. Je-li $(V, \leq)$ úplný svaz, je pak systém $\{(x] \mid x \in V\}$ uzávěrový systém, neboť pro každou podmnožinu $T \subseteq V$ platí $\bigcap_{y \in T}(y] = (\bigwedge T]$.

Příklady U mnoha matematických struktur je systém podstruktur uzávěrový systém. Potenční množina je přirozeně uzávěrový systém, další důležité příklady jsou:

(1) **Vektorové podprostory:** Pro vektorový prostor V je systém $\mathcal{U}(V)$ všech vektorových podprostorů uzávěrový systém. Úplný svaz $(\mathcal{U}(V), \subseteq)$ nazýváme *svaz vektorových podprostorů* vektorového prostoru V; v tomto svazu je $U_1 \vee U_2 = U_1 + U_2$

$$\bigvee \mathcal{X} = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n \mid \text{existují } U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{X} \text{ tak, že } u_i \in U_i \text{ pro } i = 1, \ldots, n\}.$$

(2) **Podgrupy:** Pro grupu G je množina $\mathcal{U}(G)$ všech podgrup grupy G uzávěrový systém. Úplný svaz $(\mathcal{U}(G), \subseteq)$ nazýváme *svaz podgrup* grupy G; v tomto svazu je, je-li G abelovská, $U_1 \vee U_2 = U_1 + U_2$ a všeobecněji

$$\bigvee \mathcal{X} = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n \mid \text{existují } U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{X} \text{ tak, že } u_i \in U_i \text{ pro } i = 1, \ldots, n\}.$$

(3) **Uzavřené množiny:** Pro topologický prostor T (např. pro $\mathbf{R}^n$) je množina $\mathcal{A}(T)$ všech uzavřených podmnožin T uzávěrový systém. V úplném svazu $(\mathcal{A}(T), \subseteq)$ je

$$\bigvee \mathcal{X} = \overline{\bigcup \mathcal{X}}.$$

(4) **Konvexní množiny:** Pro prostor $\mathbf{R}^n$ je množina $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ všech konvexních podmnožin uzávěrový systém, tedy $(\mathcal{C}(\mathbf{R}^n), \subseteq)$ je úplný svaz; v tomto svazu je spremum konvexní obal sjednocení.

(5) **Hrany polyedrů:** Pro polyedr P je množina $\mathcal{S}(P)$ všech hran P uzávěrový systém. Úplný svaz $(\mathcal{S}(P), \subseteq)$ se nazývá *svaz hran* P; pro tyto svazy neexituje žádné všeobecné "'dobré"' popsání suprem.

(6) **Relace ekvivalence:** Pro množinu M je množina $\mathcal{E}(M)$ všech relací equivalence uzávěrový operátor na $M \times M$. Úplný svaz $(\mathcal{E}(M), \subseteq)$ se nazývá *svaz ekvivalencí* na M; v tomto svazu je

$$\bigvee \mathcal{X} = \{(a,b) \in M \times M \mid \text{existují} R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{X} \text{ a } (x_i, x_{i+1}) \in R_i \text{ pro } i = 1, \ldots n \text{ s } a = x_1 \text{ a } b = x_{n+1}\}.$$

Definujeme $\mathcal{E}_n := \mathcal{E}(\{1, 2, \ldots, n\})$.

Tyto svazy mají mnohé strukturální vlastnsosti, které lze blíže zkoumat v teorii svazů. Zmíníme se zde o několika důležitých:

Definice 3.4 *Úplný svaz $\mathcal{V}$ se nazývá*

- distributivní, *pokud pro všechna $x, y, z \in V$ jsou splněny následující distributivní zákony:*

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{D}_\wedge) & x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
(\mathbf{D}_\vee) & x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)
\end{array}
$$

- úplně distributivní, *pokud je splněno následující zobecnění obou distributivních zákonů na libovolná infima und suprema pro všechny indexové množiny $S, T \neq$:*

$$
\begin{array}{lrl}
(\mathbf{D}_{\bigvee\bigwedge}) & & \bigwedge\left\{\bigvee\{x_{s,t} \mid t \in T\} \mid s \in S\right\} \\
& = & \bigvee\left\{\bigwedge\{x_{s,\varphi s} \mid s \in S\} \mid \varphi : S \to T\right\}.
\end{array}
$$

- modulární, *pokud je splněn následující zákon pro všechny x, y a z:*

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Distributivita a modularita jsou *samoduální* vlastnosti: splňuje-li svaz je svaz $\mathcal{V}$, pak také $\mathcal{V}^d$. Všechny udané vlastnosti se přenáší na úplné podsvazy. Potenční množiny jsou úplně distributivní, vektorové podprostory jsou modulární. Pro speciální případ $S := \{0, 1\}, x_{0,t} := x\mathrm{a}x_{1,t} := x_t \forall t \in T$ získáme z úplné distributivity slabší zákon

$$(\mathbf{D}_{\wedge\bigvee}) \qquad x \wedge \bigvee_{t \in T} x_t = \bigvee_{t \in T} (x \wedge x_t),$$

a odpovídajícně duální zákon $(\mathbf{D}_{\vee\bigwedge})$.

Chapter 1

Pojmové svazy kontextů

Elementární základní pojmy formální pojmové analýzy jsou *formální kontext* a *formální pojem*. Dodatek "'formální"' má v obou případech zdůraznit, že se přitom jedná o matematické stuace, jež odráží pouze některé aspekty významu obecného jazyka *kontextu* a *pojmu*. Tento dodatek budeme používat pouze u definic a nebudeme jej z pohodlnosti používat, jak už je např. vidět v nadpisu prvního odstavce. Bude tedy vlastně platit dohoda, že kdekoliv budeme psát *kontext* nebo *pojem*, mělo by se vlastně číst *formální kontext* příp. *formální pojem*.

1 Kontext a pojem

Definice 1.1 Formální kontext $\mathbf{K} := (G, M, I)$ *sestává ze dvou množin G a M spolu s relací I mezi G a M. Prvky množiny G nazýváme* **předměty**, *prvky množiny M* **znaky** *kontextu. gIm čteme jako "'předmět g* **má** *znak m"'.*

Malý kontext lze pohodlně znázornit pomocí *tabulky*, tzn. pomocí pravoúhlé tabulky, jejíž řádky jsou označeny předměty a jejíž sloupce jsou označeny znaky. Křížek v řádku g a sloupci m udává, že předmět g má znak m.

Definice 1.2 *Pro množinu $A \subseteq G$ předmětů definujeme množinu*

$$A' := \{m \in M \mid gIm \text{ pro všechna } g \in A\}$$

(množina společných znaků všech předmětů v A). Odpovídajícbě definujeme pro množinu B znaků podmnožinu

$$B' := \{g \in G \mid gIm \text{ pro všechna } m \in B\}$$

(množina všech předmětů, které mají všechny znaky z B).

Definice 1.3 Formální pojem *kontextu (G, M, I) je dvojice (A, B), kde $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A' = B$ a $B' = A$. Nazýváme pak A* rozsah *a B* obsah *pojmu (A, B).* **BG** *označuje systém všech pojmů kontextu (G, M, I).*

Rozsah A a obsah B pojmu (A, B) jsou spojeny co nejtěsněji relací I. Každá z těchto dvou částí určuje druhou a tím i celý pojem, neboť je $B' = A$ příp. $A' = B$. Další jednoduchá pravidla této souhry jsou poznačena v následujícím jednoduchém lemmatu:

Lemma 1.4 *Je-li (G, M, I) kontext a jsou-li $A, A_1, A_2 \subseteq G$ množiny předmětů, B, B_1, B_2 množiny znaků, tak platí*

1) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2' \subseteq A_1'$ *1') $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2' \subseteq B_1'$*

2) $A \subseteq A''$ *2') $B \subseteq B''$*

3) $A' = A'''$ *3') $B' = B'''$*

4) $A \subseteq B' \Leftrightarrow B \subseteq A' \Leftrightarrow A \times B \subseteq I$.

Důkaz. 1) Je-li $m \in A_2'$, tak platí gIm pro všechna $g \in A_2$, tedy zejména gIm pro všechna $g \in A_1$ pokud $A_1 \subseteq A_2$, a tímto pak $m \in A_1'$. 2) Je-li $g \in A$, tak platí gIm pro všechna $m \in A'$, odkud plyne $g \in A''$. 3) $A' \subseteq A'''$ plyne bezprostředně z 2'), a z $A \subseteq A''$ obdržíme dle 1) $A''' \subseteq A'$. 4) plyne přímo z definice.

Lemma ukazuje, že oba odvozovací operátory tvoří Galoisovu konexi mezi svazy potenčních množin $\mathcal{P}(M)G$ a $\mathcal{P}(M)M$ (porovnej s 0.4). Obdržíme tedy na G a na M dva navzájem duálně izomorfní uzávěrové systémy:

Pro každou množinu $A \subseteq G$ je A' *pojmový obsah* (tzn. obsah nějakého pojmu), neboť (A'', A') je vždy pojem. A'' je pak nejmenší *pojmový rozsah*, který A obsahuje. Je tedy množina $A \subseteq G$ pojmový rozsah právě tehdy, když je $A = A''$, a odpovídajícně to platí pro pojmové obsahy. Sjednocení pojmových rozsahů není obecně opět pojmový rozsah. Naproti tomu je průnik libovolně mnoha pojmových rozsahů (příp. pojmových obsahů) vždy pojmový rozsah (pojmový obsah), jak ukazuje následující lemma:

Lemma 1.5 *Je-li T indexová množina a je-li pro každé $t \in T$ $A_t \subseteq G$ množina předmětů, tak je*

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)' = \bigcap_{t \in T} A_t'.$$

Odpovídající platí pro množiny znaků.

Důkaz.

$$\begin{aligned} m \in \Big(\bigcup_{t\in T} A_t\Big)' &\Leftrightarrow gIm \text{ pro všechna } g \in \bigcup_{t\in T} A_t \\ &\Leftrightarrow gIm \text{ pro všechna } g \in A_t \text{ pro všechna } t \in T \\ &\Leftrightarrow m \in A_t' \text{ pro všechna } t \in T \\ &\Leftrightarrow m \in \bigcap_{t\in T} A_t'. \end{aligned}$$

Definice 1.6 *Jsou-li (A_1, B_1) a (A_2, B_2) pojmy kontextu, pak říkáme, že pojem (A_1, B_1) je* podpojem *pojmu (A_2, B_2), jestliže $A_1 \subseteq A_2$ (to je ekvivalentní tomu, že $B_2 \subseteq B_1$). (A_2, B_2) je pak* nadpojem *pojmu (A_1, B_1), a píšeme $(A_1, B_1) \le (A_2, B_2)$. Relace $\le$ se nazývá* **hierarchické uspořádání** *(nebo jen* **Uspořádání***) pojmů. Takto uspořádanou množinu všech pojmů kontextu (G, M, I) označujeme* **BV** *a nazýváme ji* **pojmový svaz**.

Věta 1.1 (Hlavní věta o pojmových svazech) *Pojmový svaz* **BV** *je úplný svaz, ve kterém jsou infimum a supremum popsány následovně:*

$$\bigwedge_{t\in T} (A_t, B_t) = \Big(\bigcap_{t\in T} A_t, \Big(\bigcup_{t\in T} B_t\Big)''\Big)$$

$$\bigvee_{t\in T} (A_t, B_t) = \Big(\Big(\bigcup_{t\in T} A_t\Big)'', \bigcap_{t\in T} B_t\Big).$$

Úplný svaz $\mathcal{V}$ je právě tehdy izomorfní s **BV***, jestliže existují zobrazení $\gamma : G \longrightarrow V$ a $\mu : M \longrightarrow V$ tak, že $\gamma(G)$ je supremum-hustá ve $\mathcal{V}$ a $\mu(M)$ je infimum-hustá ve $\mathcal{V}$, a gIm je ekvivalentní s $\gamma g \le \mu m$ pro všechna $g \in G$ a všechna $m \in M$. Zejména máme $\mathcal{V} \cong \mathcal{BV}(V, V, \le)$.*

Důkaz. Hlavní věty: Nejdříve vysvětlíme formuli pro infimum. Protože $A_t = B_t'$ platí pro všechna $t \in T$, lze s pomocí lemmatu 1.5 přeformulovat $\big(\bigcap_{t\in T} A_t, (\bigcup_{t\in T} B_t)''\big)$ na $\big((\bigcup_{t\in T} B_t)', (\bigcup_{t\in T} B_t)''\big)$, je tedy tvaru (X', X'') a tedy jistě pojem. Že se může jednat pouze o infimum, tedy největší společný podpojem pojmů (A_t, B_t), plyne okamžitě z toho, že rozsah tohoto pojmu je právě průnik rozsahů (A_t, B_t). Formule pro supremum se odůvodní analogicky. Tím je nyní dokázáno, že **BV** je úplný svaz.

Nyní dokážeme, nejdříve ve speciílním tvaru $\mathcal{V} = $ **BV**, existenci zobrazení γ a μ s požadovanýni vlastnostmi. Definujeme

$$\gamma g := (\{g\}'', \{g\}') \text{ pro } g \in G$$

$$\text{a} \mu m := (\{m\}', \{m\}'') \text{ pro } m \in M.$$

Máme $\gamma g \le \mu m \Leftrightarrow \{g\}'' \subseteq \{m\}' \Leftrightarrow \{g\}' \supseteq \{m\} \Leftrightarrow m \in \{g\}' \Leftrightarrow gIm$, jak bylo řečeno. Mimo to platí pro každý pojem (A, B) na základě dokázaných formulí

$$\bigvee_{g\in A} (\{g\}'', \{g\}') = (A, B) = \bigwedge_{m\in B} (\{m\}', \{m\}''),$$

$\gamma(G)$ je tedy supremum– a $\mu(M)$ infimum-hustá v **BV**. Je-li obecněji $\mathcal{V} \cong$ **BV** a $\varphi :$ **BV** $\longrightarrow \mathcal{V}$ izomorfismus, pak definujeme γ a μ pomocí

$$\gamma g := \varphi(\{g\}'', \{g\}') \text{ pro } g \in G$$

$$\text{a } \mu m := \varphi(\{m\}', \{m\}'') \text{ pro } m \in M.$$

Tvrzené vlastnosti se přenáší.

Je-li obráceně $\mathcal{V}$ úplný svaz a jsou-li $\gamma : G \longrightarrow V, \mu : M \longrightarrow V$ zobrazení s udanými vlastnostmi, pak definujeme

$$\varphi : \mathbf{BV} \longrightarrow V$$

jako

$$\varphi(A, B) := sup\{\gamma(g) \mid g \in A\}.$$

φ je zřejmě izotonní. Abychom dokázali, že φ je izomorfismus, musíme tedy dokázat, že φ^{-1} existuje a že je zároveň izotonní. Definujeme k tomu pro $x \in V$

$$\psi x := (\{g \in G \mid \gamma g \le x\}, \{m \in M \mid x \le \mu m\}),$$

a ukážeme, že ψx je pojem kontextu (G, M, I):

$$\begin{aligned} h \in \{g \in G \mid \gamma g \le x\} &\Leftrightarrow \gamma h \le x \\ &\Leftrightarrow \gamma h \le \mu n \forall n \in \{m \in M \mid x \le \mu m\} \\ &\Leftrightarrow hIn \forall n \in \{m \in M \mid x \le \mu m\} \\ &\Leftrightarrow h \in \{m \in M \mid x \le \mu m\}'. \end{aligned}$$

Druhou podmínku získáme odpovídajícně. Máme tedy definováno zobrazení $\psi : V \longrightarrow$ **BV**, a bezprostředně z definice lze vyčíst, že ψ je izotonní. Dokážeme ještě $\varphi = \psi^{-1}$. Je $\varphi\psi x = \bigvee\{\gamma g \mid g \in G, \gamma g \le x\} = x$, protože $\gamma(G)$ je supremum-hustá v $\mathcal{V}$. Z druhé strany je $\varphi(A, B) = \bigwedge\{\mu m \mid m \in B\}$, protože $\mu(M)$ je infimum-hustá v $\mathcal{V}$ ist, a tedy

$$\begin{aligned} \psi\varphi(A, B) &= \psi \bigwedge\{\mu m \mid m \in B\} \\ &= (\{g \in G \mid \gamma g \le \bigwedge\{\mu m \mid m \in B\}\}, \{\ldots\}') \\ &= (\{g \in G \mid \gamma g \le \mu m \forall m \in B\}, \{\ldots\}') \\ &= (\{g \in G \mid gIm \forall m \in B\}, \{\ldots\}') \\ &= (B', B'') = (A, B). \end{aligned}$$

Zvolíme-li za úplný svaz $\mathcal{V}$ speciálně $G := V, M := V, I := \leq$ a γ a μ jako identity na V, pak obdržíme $\mathcal{V} \cong \mathbf{BV}$.

Princip duality pro pojmové svazy Pro kontext (G, M, I) je také (M, G, I^{-1}) kontext, a sice s pojmovým svazem $\mathcal{BV}(M, G, I^{-1}) = \mathbf{BV}^d$. Jinak řečeno: zaměníme-li role předmětů a znaků, obdržíme tak duální pojmový svaz. Tím se princip duality přenáší také na formální pojmovou analýzu.

Zobrazení γ a μ, jež se vyskytla v hlavní větě, udávají, jak lze kontext opět nalézt v pojmovém svazu. Toto prohloubíme v následující definici.

Definice 1.7 *Pro předmět $g \in G$ píšeme g' místo $\{g\}'$ pro* předmětový obsah $\{m \in M \mid gIm\}$ *k předmětu g. Odpovídajícně je $m' := \{g \in G \mid gIm\}$* znakový rozsah *ke znaku m. Ve shodě s označením použitým v hlavní větě píšeme γg pro* předmětový pojem (g'', g') *μm pro* znakový pojem (m', m'').

Můžeme pak vždy jak kontext tak i všechny pojmové rozsahy a pojmové obsahy vyčíst z liniového diagramu: Hledáme-li k nějakému malému kroužku, který reprezentuje pojem, odpovídající pojmový rozsah, tak tento sestává z těch předmětů, které leží na stoupajících tazích z tohoto kroužku. Odpovídajícně najdeme pojmový obsah tak, že sledujeme okem všechny stoupající tahy z tohoto kroužku a poznačíme si na nich zanesené znaky.

2 Kontext a pojmový systém

Z systému všech pojmů kontextu lze bez obtíží tento kontext zrekonstruovat: Je totiž $G = \bigcup\{A \mid (A, B) \in \mathbf{BG}\}, M = \bigcup\{B \mid (A, B) \in \mathbf{BG}\}, I = \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in \mathbf{BG}\}$. Z pojmového svazu lze tento kontext vyčíst ještě jednodušeji, jak ukazuje hlavní věta. Z druhé strany mohou být pojmové svazy různích kontextů velmi dobře navzájem izomorfní. K manipulacím s kontextem, které nemění strukturu pojmového svazu, patří sloučení předmětů se stejným obsahem příp. znaků se stejným rozsahem:

Definice 2.1 *Kontext (G, M, I) se nazývá* čistý, *jestliže pro každé dva předměty $g, h \in G$ z $g' = h'$ implikuje $g = h$ a odpovídajícně $m' = n' \Rightarrow m = n$ pro všechna $m, n \in M$.*

Stejně tak jsou bez významu na strukturz pojmového svazu znaky, které lze zapsat jako kombinaci jiných znaků. Precizněji to formulujme takto: Je-li $m \in M$ znak a je-li $X \subseteq M$ množina znaků s $m \notin X$, ale $m' = X'$, tak je znakový pojem μm infimum znakových pojmů $\mu x, x \in X$, množina $\mu(M \setminus \{m\})$ je tedy zároveň infimum-hustá v $\mathbf{BV}$ a podle Hlavní věty je $\mathbf{BV} \cong \mathcal{BV}(G, M \setminus \{m\}, I \cap (G \times (M \setminus \{m\})))$. Toto odstranění **reducibilních znaků**, tzn. znaků s $\bigwedge$-reducibilních znakových pojmů, příp. **reducibilních předmětů**, tedy předmětů s $\bigvee$-reducibilními předmětovými pojmy, nazýváme *redukcí* kontextu. Vždy reducibilní jsou **plné řádky** a **plné sloupce**; tím míníme předměty g s $g' = M$ příp. znaky m s $m' = G$.

Definice 2.2 *Čistý kontext (G, M, I) se nazývá* řádkově redukovaný, *jestliže každý předmětový pojem je $\bigvee$-ireducibilní, a* sloupcově redukovaný, *jestliže každý znakový pojem je $\bigwedge$-ireducibilní. Kontext, který je jak řádkově redukovaný tak sloupcově redukovaný, je* redukovaný.

Snadno lze zadat nekonečné kontexte, ve kterých jsou všechny znaky a všechny předměty reducibilní (srov. str. 10), nelze tedy simultánně všechny reducibilní předměty a znaky vypustit. U **konečných** pojmových svazů to však není žádný problém, protože v konečném svazu je každý prvek spojení $\bigvee$-ireducibilních a průsek $\bigwedge$-ireducibilních prvků.

Lemma 2.3 *Pro každý konečný svaz $\mathcal{V}$ existuje až na izomorfismus* právě jeden redukovaný kontext $\mathbf{K}$ tak, že $\mathcal{V} \cong \mathcal{BV}(\mathbf{K})$, totiž*

$$\mathbf{K} = (J(\mathcal{V}), M(\mathcal{V}), \leq).$$

Pro praktickou práci s kontexty znamená lemma následující: Každý konečný kontext lze převést do redukovaného tvaru, aniž se změní struktura pojmového svazu, a tato je jednoznačná. Nejdřívi kontext očistíme, tedy sloučíme všechny prvky se stejným obsahem a právě tak znaky se stejným rozsahem. Pak vyškrkáme všechny předměty, jejichž obsah lze zapsat jako průnik jiných předmětových obsahů, a právě tak všechny znaky, jejichž rozsah je průnik jiných znakových rozsahů.

Z pojmů redukovaného kontextu lze získat jednoduše získat původní pojmy, když si zapsali postup redukce. Je-li (G, M, I) konečný kontext, $\underline{G}$ množina ireducibilních předmětů a $\underline{M}$ množina ireducibilních znaků, tak je redukovaný kontext $(\underline{G}, \underline{M}, I \cap (\underline{G} \times \underline{M}))$, a každý pojem (A, B) kontextu (G, M, I) odpovídá pojmu $(A \cap \underline{G}, B \cap \underline{M})$ redukovaného kontextu $(\underline{G}, \underline{M}, I \cap (\underline{G} \times \underline{M}))$. Pro každý předmět $g \in G$ a každý pojmový rozsah A kontextu (G, M, I) platí

$$g \in A \Leftrightarrow g'' \cap \underline{G} \subseteq A \cap \underline{G},$$

duálně pak pro znakyk. Poznamenejme si tedy pro každý reducibilní předmět g množinu $g'' \cap \underline{G}$ a pro každý reducibilní znak m množinu $m'' \cap \underline{M}$, pak lze snadno

*Dva kontexty (G_1, M_1, I_1) a (G_2, M_2, I_2) jsou **izomorfní**, jestliže existují bijekce $\alpha : G_1 \longrightarrow G_2, \beta : M_1 \longrightarrow M_2$ tak, že $gI_1m \Leftrightarrow (\alpha g)I_2(\beta m)$ pro všechna $g \in G_1, m \in M_1$.

$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\times$	$\times$	$\nearrow\!\!\!\nwarrow$	$\nwarrow$
$\nearrow\!\!\!\nwarrow$	$\times$	$\times$	$\times$
$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	
$\nearrow$	$\times$	$\times$	$\nearrow\!\!\!\nwarrow$

$\times$	$\nearrow\!\!\!\nwarrow$	$\nwarrow$
$\nearrow\!\!\!\nwarrow$	$\times$	$\times$
$\nearrow$	$\times$	$\nearrow\!\!\!\nwarrow$

Figure 1.1: Kontext s relacemi šipka a redukovaný kontext.

zjistit pojmy kontextu (G, M, I) z pojmů redukovaného kontextu $(\underline{G}, \underline{M}, I \cap (\underline{G} \times \underline{M}))$.

Redukování čistého kontextu lze provést jiným způsobem, totiž s pomocí *relacemi šipka*, které budou definovány následovně:

Definice 2.4 *Je-li (G, M, I) kontext, $g \in G$ předmět a $m \in M$ znak, pak píšeme*

$$g \nwarrow m \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} g \not\!I m \ \text{a} \\ \text{jestliže } g' \subseteq h' \text{ a } g' \neq h', \text{ pak } hIm \end{cases}$$
$$g \nearrow m \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} g \not\!I m \ \text{a} \\ \text{jestliže } m' \subseteq n' \text{ a } m' \neq n', \text{ pak } gIn \end{cases}$$
$$g \nearrow\!\!\!\nwarrow m \quad :\Leftrightarrow \quad g \nwarrow m \text{ a } g \nearrow m.$$

Je tedy $g \nwarrow m$ právě tehdy, když g' je maximální mezi všemi předmětovými obsahy, ve kterých se m nevyskytuje. Jinými slovy: $g \nwarrow m$ platí právě tehdy, když g nemá znak m, m ale leží v obsahu každého vlastního podpojmu pojmu γg.

Příklad 2.5 *Obrázek 1.1 ukazuje kontext s relacemi šipka; vedle je pak redukovaný kontext.*

Tyto relace lze pohodlně zapsat do tabulky, protože připadají pouze na ty dvojice znak-předmět, které nestojí v relaci I. Jejich význam pro redukci udává následující pomocná věta:

Lemma 2.6 *V každém kontextu platí:*

a) *γg je $\bigvee$-ireducibilní $\Leftrightarrow$ existuje $m \in M$ tak, že $g \nwarrow m$.*

b) *μm je $\bigwedge$-ireducibilní $\Leftrightarrow$ existuje $g \in G$ tak, že $g \nearrow m$.*

Kromě toho v každém konečném kontextu platí:

a) *γg je $\bigvee$-ireduzibilní $\Leftrightarrow$ existuje $m \in M$ tak, že $g \nearrow\!\!\!\nwarrow m$.*

b) *μm je $\bigwedge$-ireducibilní $\Leftrightarrow$ existuje $g \in G$ tak, že $g \nearrow\!\!\!\nwarrow m$.*

Důkaz. a) Klademe $(\gamma g)_* := \bigvee\{x \in \mathbf{BV} \mid x < \gamma g\}$. $(\gamma g)_*$ je podpojem pojmu γg a γg je právě tehdy $\bigvee$-ireduzibilní, když je $\gamma g \neq (\gamma g)_*$ a toto je ekvivalentní tomu, že existuje znak m v obsahu pojmu $(\gamma g)_*$, který neleží v obsahu pojmu γg, tj. tomu, že $g \nwarrow m$ pro $m \in M$. Vybereme-li m maximální mezi znaky tak, že $g \nwarrow m$, pak platí také $g \nearrow m$, tedy $g \nearrow\!\!\!\nwarrow m$. b) Dokáže se duálně.

Abychom zredukovali konečný čistý kontext, zaneseme nejprve do tabulky relace šipka a vyškrtáme všechny řádky a sloupce v tabulce, které neobsahují žádnou oboustrannou šipku.

Předpoklad konečnosti v lemmatech 2.3 a 2.6 lze zeslabit:

Definice 2.7 *Kontext (G, M, I) se nazývá* dvojnásobně fundovaný, *jestliže pro každý předmět $g \in G$ a každý znak $m \in M$ tak, že $g \not\!I m$ existují předmět $h \in G$ a znak $n \in M$ tak, že*

$$g \nearrow n \text{ a } m' \subseteq n', \text{ a zároveň}$$
$$h \nwarrow m \text{ a } g' \subseteq h'.$$

Úplný svaz $(V, \leq)$ nazýváme **dvojnásobně fundovaný**, *jestliže pro každé dva prvky $x < y$ z V existují prvky $s, t \in V$ tak, že:*

$$s \text{ je minimální vzhledem k } s \leq y,\ s \not\leq x, \text{ a zároveň}$$
$$t \text{ je maximální vzhledem k } t \geq x,\ t \not\geq y.$$

Prvek s , který je, jak je popsáno v definici, minimální vzhledem k $s \not\leq x$, musí být $\bigvee$-ireduzibilní a splňovat $s_* \leq x$. Duálně je t právě tehdy maximální vzhledem k $t \not\geq y$, když t je $\bigvee$-ireduzibilní a platí $t \not\geq y, t^* \geq y$.

Lemma 2.8 **a)** *Každý konečný kontext je dvojnásobně fundovaný.*

b) *Kontext, ve kterém neesistují žádné nekonečné řetězce $g_1, g_2, \ldots$ předmětů tak, že $g_1' \subset g_2' \subset \ldots$ und a žádné nekonečné řetězce $m_1, m_2, \ldots$ znaků tak, že $m_1' \subset m_2' \subset \ldots$, je dvojnásobně fundovaný.*

c) *Každý pojem nějakého dvojnásobně fundovaného kontextu je supremum $\bigvee$-ireducibilních pojmů a infimum $\bigwedge$- ireducibilních pojmů. Lemma 2.3 platí tedy také pro pojmové svazy dvojnásobně fundovaných kontextů.*

d) *Je-li (G, M, I) dvojnásobně fundovaný a $g \in G$, $m \in M$, pak platí: jestliže $g \nwarrow m$, pak existuje znak n tak, že $g \nearrow\!\!\!\nwarrow n$, pokud $g \nearrow m$, pak existuje předmět h tak, že $h \nearrow\!\!\!\nwarrow m$.*

Důkaz. b) Pokud $g \not{I} m_i$ a neplatí-li $g \nearrow m_i$, pak existuje podle definice relací šipka znak $m_{i+1} \neq m_i$ tak, že $g \not{I} m_{i+1}$ a $m_i' \subset m_{i+1}'$. Platí-li dodatečně $g \nwarrow m_i$, pak také $g \nwarrow m_{i+1}$. S tímto argumentem získáme, vycházeje z $m_1 := m$ řetěz znaků s rostoucími sloucovými rozsahy. Tento řetězec musí být podle předpokladu konečný, a končí se znakem $m_j =: n$ tak, že $g \nearrow n$ a $g \nwarrow n$, tedy $g \nearrow\!\!\!\nwarrow n$. **a)** plyne bezprostředně z b). **c)** Buď (A, B) pojem a $(C, D) := \bigvee\{\gamma x \mid x \in A, \gamma x \ \bigvee -\text{ireducibilní}\}$. Předpokládejme $(C, D) < (A, B)$. Pak existuje $m \in D, g \in A$ tak, že $g \not{I} m$. Tedy existuje $h \in G$ tak, že $h \nwarrow m$ a $g' \subseteq h'$, tedy $h \in A$. Kvůli $h \nwarrow m$ je γh $\bigvee$-ireducibilní, tedy $h \in C$ a tímto $m \in h'$, což je spor. **d)** Z $g \nwarrow m$ plyne $g \not{I} m$, tedy existuje $n \in M$ tak, že $m' \subseteq n'$ a $g \nearrow n$. Dohromady pak $g \nearrow\!\!\!\nwarrow n$.

Lemma 2.9 *Je-li* **BV** *dvojnásobně fundovaný, je také* (G, M, I) *dvojnásobně fundovaný. Není-li úplný svaz* $\mathcal{V}$ *dvojnásobně fundovaný, není také kontext* $(V, V, \leq$ $)$ *dvojnásobně fundovaný.*

Důkaz. Buď **BV** dvojnásobně fundovaný, $g \in G$, $m \in M$ tak, že $g \not{I} m$, tedy $\gamma g \not\leq \mu m$. Pro $x := \mu m$ a $y := \mu m \vee \gamma g$ existuje pojem t, jež je maximální vzhledem k $t \geq x$, $t \not\geq y$. Na základě této vlastnosti maximality musí být t $\bigwedge$-ireducibilní, existuje tedy znak n tak, že $t = \mu n$. Tímto platí $g \nearrow n$ a $m' \subseteq n'$. Duálně obdržíme druhou podmínku.

Je-li ale $(V, V, \leq)$ dvojnásobně fundovaný, musí být také $\mathcal{V}$ dvojnásobně fundovaný: Buď $x < y$ v $\mathcal{V}$, pak jistě platí $y \not\leq x$, tzn. $y \not{I} x$ v $(V, V, \leq)$. Z definice dvojnásobné fundovanosti v kontextu $(V, V, \leq)$ plyne existence prvku $s \in V$ tak, že $s \nwarrow x$ a $y' \subseteq s'$, tedy s je minimální vzhledem k $s \not\leq x$, $s \leq y$. Druhou podmínku dokážeme opět s duálním argumentem.

Úplný svaz $\mathcal{V}$ je tedy dvojnásobně fundovaný právě tehdy, když <u>každý</u> kontext (G, M, I) tak, že $\mathcal{V} \cong$ **BV**, je dvojnásobně fundovaný. Je nutno uvážit, že pojmový svaz dvojnásobně fundovaného kontextu nemusí být dvojnásobně fundovaný, jak ukazuje příklad $(\mathbf{N}, \mathbf{N}, \leq)$.

3 Vícehodnotové kontexty

V hovorové řeči se slovo "‘znak"’ nepoužívá pouze pro vlastnosti, které může mít předmět nebo ne: znaky jako "‘barva"’, "‘váha"’, "‘pohlaví"’, "‘známka"’ mají *hodnoty*. Označujeme je jako *vícehodnotové znaky*, na rozdíl k doposud uvažovanýmn *jednohodnotovým znakům*.

Definice 3.1 Vícehodnotový kontext (G, M, W, I) *se skládá z množin* G, M *a* W *a ternární relace* I *mezi* G, M *a* W *(tzn.* $I \subseteq G \times M \times W$*), přičemž platí:*

$$z\ (g, m, w) \in I \ \text{ a } (g, m, v) \in I \ \text{ plyne } w = v.$$

Prvky z G *nazýváme* **předměty**, *prvky z* M **(vícehodnotové) znaky** *a prvky z* W **hodnoty**. $(g, m, w) \in I$ *čteme jako "‘znak* m *má u předmětu* g *hodnotu* w*"’.* (G, M, W, I) *se nazývá* n-hodnotový kontext, *jestliže má* W n *prvků. Mnohohodnotové znaky lze považovat za parciální zobrazení z* G *do* W*, je tedy nasnadě psát* $m(g) = w$ *místo* $(g, m, w) \in I$. **Definiční obor** *znaku* m *je definován jako*

$$dom(m) := \{g \in G \mid (g, m, w) \in I \ pro \ w \in W\}.$$

Znak m *se nazývá* **úplný**, *jestliže je* $dom(m) = G$, *vícehodnotový kontext se nazývá* **úplný**, *jestliže jsou všechny znaky úplné.*

Jako doposud uvažované **jednohodnotové** kontexty můžeme vícehodnotové kontexty reprezentovat tabulkami, ve kterých jsou řádky pojmenované podle předmětů a sloupce podle znaků. Záznam v řádku g a sloupci m je pak hodnota znaku $m(g)$. Nemá-li znak m žádnou hodnotu při předmětu g, nebude nic zapsáno.

Jak lze přiřadit vícehodnotovému kontextu pojmy? Provedeme to následovně: vícehodnotový kontext se promění v jednohodnotový podle pravidel, která dole vysvětlíme. Pojmy tohoto *odvozeného* jednohodnotového kontextu budou pak vykládány jako pojmy vícehodnotového kontextu. Tento interpretační postup, nazývaný *vytváření škály*, není v žádném případě jednoznačný, systém pojmů vícehodnotového kontextu závisí tedy na vytváření škály. To nás může nejdříve mást, ukazuje se však jako vynikající nástroj k cílenému vyhodnocování dat.

Pro vytváření stupnice se nejdříve interpretuje každý znak vícehodnotového kontextu, kterýžto nazýváme *škálou*.

Definice 3.2 Škála *pro znak* m *vícehodnotového kontextu je (jednohodnotový) kontext* $SS_m := (G_m, M_m, I_m)$ *s* $m(G) \subseteq G_m$. *Předměty škály nazýváme* hodnoty škály, *znaky pak* znaky škály.

Každý kontext lze použít jako škála, formálně není mezi škálou a kontextem žádný rozdíl. Chceme ale označení "‘škála"’ používat pouze pro takové kontexty, které mají jasnou pojmovou strukturu a nesou význam. Několik obzvlášť jednoduchých kontextů budeme znovu a znovu používat jako škály, ty nejdůležitější jsou shrnuty v dalším paragrafu.

Volba škály k znaku m není, jak už bylo řečeno, matematicky nutná, jedná se o interpretační rozhodnutí. To samé platí pro druhý krok *vytváření škály*, sloučení škála do jednohodnotového kontextu. V nejjednodušším případu pro to postačuje nezávislé shrnutí jednotlivých škál, popisujeme jej jako *jednoduché vytváření škály*. Obzvlášť v případě číselných škál se s tím ale nespokojíme, potřebujeme pak vytváření škály pomocí *operátoru kompozice.*

U jednoduchého vytváření škályjednoduché vytváření škály získáme z vícehodnotového kontextu (G, M, W, I) a škálových kontextů SS_m, $m \in M$, odvozený jednohodnotový kontext následovně: Množina předmětů G zůstane nezměněna, každý vícehodnotový znak m bude nahrazen škálovými znaky škály SS_m. Představíme-li si vícehodnotový kontext pomocí tabulky, můžeme si pak zpřehlednit jednoduché vytváření škály následovně: Každá znaková hodnota $m(g)$ se nahradí odpovídajícím řádkem k $m(g)$ škálového kontextu SS_m. Přesný popis se dozvíme v následující definici, pro niž použijem ještě jednu zkratku: Množina znaků odvozeného kontextu je disjunktní sjednocení znakových množin podílejících se škál. Abychom zajistili, že množiny jsou disjunktní, nahradíme znakové množiny škály SS_m množinami

$$\dot{M}_m := \{m\} \times M_m.$$

Definice 3.3 *Je-li* (G, M, W, I) *vícehodnotový kontext a jsou-li* SS_m, $m \in M$, *škálové kontexty, pak je* **odvozený kontext vzhledem k jednoduchému vytváření škály** *kontext* (G, N, J) *s*

$$N := \bigcup_{m \in M} \dot{M}_m,$$

a

$$gJ(m,n) :\Leftrightarrow m(g) = w \text{ a } wI_m n.$$

Často se vyskytující speciální případ jednoduchého vytváření škály je, že všechny vícehodnotové kontexty jsou interpretovány vzhledem ke stejné škále nebo systému škál. Mluvíme o **nominálně škálovaném kontextu**, jestliže všechny škály SS_m jsou nominální škály, atd.