MASARYKOVA UNIVERZITA

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Feuerbachova věta v geometrii trojúhelníku

Dizertační práce

Tamara Lorencová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. **Brno 2024**

Obsah

Úvod

Moje doktorské studium ve specializaci *Obecné otázky matematiky* mělo výzkumné zaměření pod názvem *Kružnice v elementární geometrii*. Postupem doby jsem společně se školitelem dospěla k názoru, že závěrečnou práci nebude možné pojmout jako encyklopedický přehled všech významných poznatků o kružnicích a jejich uplatnění v geometrické teorii i praxi. Důvodem byla skutečnost, že podrobné zpracování do mnoha odvětví rozvinuté problematiky kružnic by vedlo k dílu o neúnosném rozsahu. Bylo proto nutné pečlivě uvážit užší vymezení tématu závěrečné práce. Jeho volbu v následujících odstavcích představím, vysvětlím, v čem bude spočívat původnost zpracování a tím vlastně i naznačím možný přínos výsledného díla.

Celá předložená práce je monotematicky věnována jednomu výsledku o pěti významných kružnicích, které spojujeme s obecným trojúhelníkem v eukleidovské rovině. Konkrétně tyto kružnice uvedu a dotyčný výsledek popíši v kapitole 1. Nyní jen naznačím jeho obsah: jedna z oněch pěti kružnic se dotýká všech čtyř ostatních. Tento vskutku překvapivý (tj. prostou intuicí nijak nepodložený) poznatek jako první odhalil německý matematik Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834). Publikoval ho v roce 1822 i s početně velmi náročným důkazem jako součást svého výkladu geometrie trojúhelníka v nevelké knize [Feu]. Věhlas, který tento výsledek brzy získal, je v plném souladu s jeho hodnocením z uznávané monografie *Advanced Euclidean Geometry* od Rogera A. Johnsona [Joh, str. 200]: „This is perhaps the most famous of all theorems of the triangle, aside from those known in ancient times.“

Není divu, že Feuerbachův výsledek upoutával pozornost následných generací geometrů. Jejich zástupci za bezmála 200 let[1] přišli s desítkami vlastních důkazů, publikovaných většinou ne jako plnohodnotné matematické články, nýbrž jako stručná oznámení (bez jakýchkoli odkazů na příspěvky jiných autorů) v rubrikách zpráv časopisů jako *The Educational Times* nebo *The Mathematical Gazette*. Dotyční autoři byli patrně fascinováni kontrastem mezi jednoduchostí vlastní formulace výsledku a rozšířeným povědomím o obtížnosti původního Feuerbachova důkazu. Spatřovali v tom výzvu k hledání odlišných a hlavně jednodušších důkazů, které by lépe osvětlily podstatu zkoumaného výsledku. K tomu ovšem skepticky doplním opět citát z [Joh, str. 200]: „Of the numerous proofs which have been contributed to the history of the theorem, none is

[1] Příspěvky s elementárními důkazy Feuerbachovy věty, které jsem při přípravě závěrečné práce nashromáždila, posoudila a podle uvážení vhodně zpracovala, pocházejí z období let 1822 až 2010.

really simple.“ To jistě přispělo k tomu, že Feuerbachova věta nebývá ve středoškolských učebnicích ani zmiňována a že v české knižní příručce *Geometrie trojúhelníka* z roku 1988 je Feuerbachova věta uvedena bez důkazu ([Š-V, str. 78]).[2]

Uvedu nyní dva hlavní cíle, které jsem výběrem Feuerbachovy věty za námět dizertační práce sledovala.

1. *V jedné kapitole podat podrobný, a přitom přehledně sestavený, čtivý a komentáři doplněný výklad původního Feuerbachova důkazu.*
2. *Ostatní nashromážděné elementární důkazy posoudit a roztřídit podle použitých postupů. Poté podat obdobně koncipované výklady vybraných důkazů v dalších, metodicky zaměřených kapitolách.*

K uvedeným cílům doplním krátké komentáře. Bude z nich jasné, čím by výsledná práce mohla být přínosná.

Ad 1. Ze všech knižních, časopiseckých nebo internetových zdrojů, které jsem měla k dispozici a které zmiňují původní Feuerbachův důkaz, je jeho postup nejkonkrétněji naznačen v monografii [Joh, str. 204–205]. Ani tam však není nijak upřesněna technika, jakou Feuerbach potřebné metrické vztahy odvozuje.[3] Bylo proto nutné, abych Feuerbachovy kroky v německém originálu [Feu] pečlivě analyzovala, zejména tedy ověřila výsledky k dílčím cílům vedoucích, avšak nerozepsaných algebraických úprav.[4] Postup vedení důkazu v dotyčných paragrafech práce [Feu] je navíc komplikován odkazy na některé vzorce odvozené v předchozích paragrafech. Podrobněji se o tom všem zmíním v úvodní části kapitoly 2, která je výsledkem mého úsilí první cíl co nejlépe naplnit.

Ad 2. Ty elementární důkazy Feuerbachovy věty, které jsem nastudovala a které jsem byla schopna metodicky klasifikovat, jsem zařadila do textů kapitol 3 až 13, nazvaných podle užitých metod či prostředků dokazování.[5] Zpracovat tyto důkazy požadovaným způsobem bylo často náročné, zejména pokud jejich zdroje byly publikovány formou několikařádkového textu v časopiseckých rubrikách zpráv, doplněného obrázkem (zpravidla pro jednu z více možných konfigurací). Snažila jsem se ve svých výkladech podobné neúplnosti i další nedostatky těchto zdrojů odstranit. Velkou pozornost jsem věnovala i přípravě četných obrázků.

[2]Prakticky jediným snadno dostupným a česky psaným pojednáním o Feuerbachově větě i s jejím důkazem je můj článek [Lor] z roku 2014. Existuje také (ovšem neelementárně zaměřený) článek profesora Jana Sobotky *K dvěma důkazům věty Feuerbachovy*, Rozpravy České akademie věd a umění. Třída II, Mathematicko-přírod. 31(1922), č. 2, str. 1–12.

[3]Citujme Johnsona ze str. 204 raději bez překladu: „ . . . is based on the following steps, each of which he establishes by main strength.“

[4]V kapitole 2 konkrétně uvedu, u kterých kontrol mi pomohla počítačová algebra.

[5]Poslední výkladová kapitola 14 je věnována důkazům těch pomocných tvrzení, na která se odvolávají postupy z více předchozích kapitol.

Po stránce logické propojenosti výkladu jsou všechny kapitoly 2 až 13 navzájem nezávislé. Jakmile se tudíž čtenář seznámí s problematikou Feuerbachovy věty podle kapitoly 1, může její důkazy z dalších kapitol vybírat ke čtení v libovolném pořadí. Z tohoto důvodu v některých kapitolách opakujeme stejnou vstupní úvahu o tom, za jakých podmínek stačí dotyky jakých kružnic k důkazu Feuerbachovy věty ověřit.

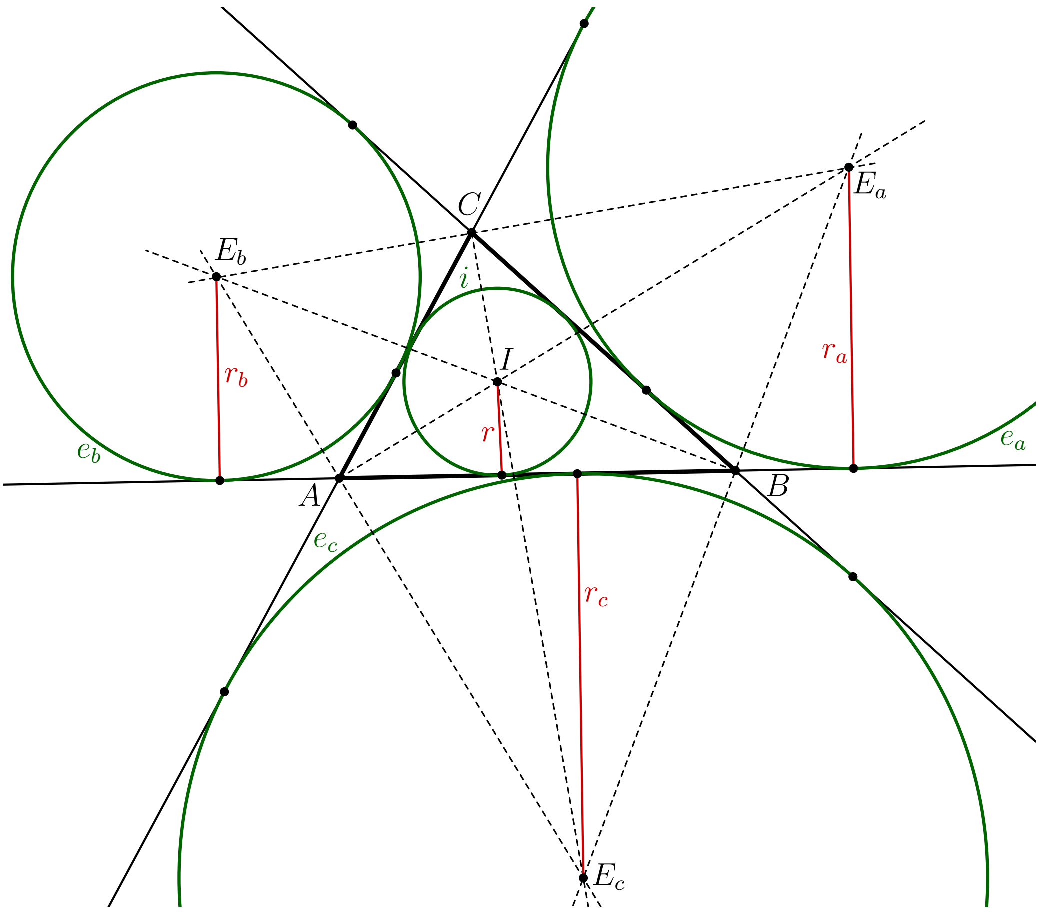
Závěrem chci zdůraznit, že jsem se snažila sepisovat postupy všech důkazů dostatečně podrobně tak, aby byly srozumitelné každému čtenáři dobře znalému středoškolské (přesněji gymnaziální) planimetrie. Text práce by tak mohl přinést užitek středoškolským učitelům matematiky a jejich talentovaným studentům.

Kapitola 1

O čem je Feuerbachova věta

Jak jsme slíbili v Úvodu, v první výkladové kapitole pojednáme o pěti kružnicích, které jsou významně spojeny s obecným rovinným trojúhelníkem, a o pozoruhodném výsledku pro tyto kružnice, jenž nese jméno jeho objevitele K. W. Feuerbacha[1].

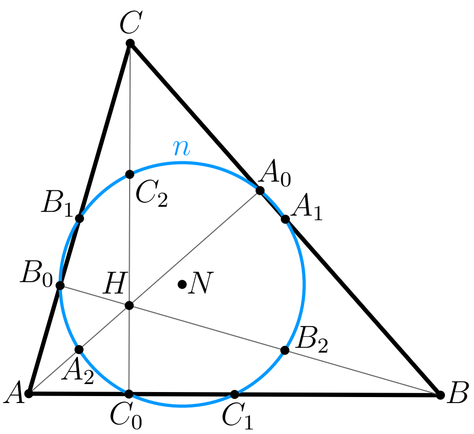
Čtyři z oněch pěti kružnici jsou všeobecně známé a připomeneme si je následujícím obrázkem.

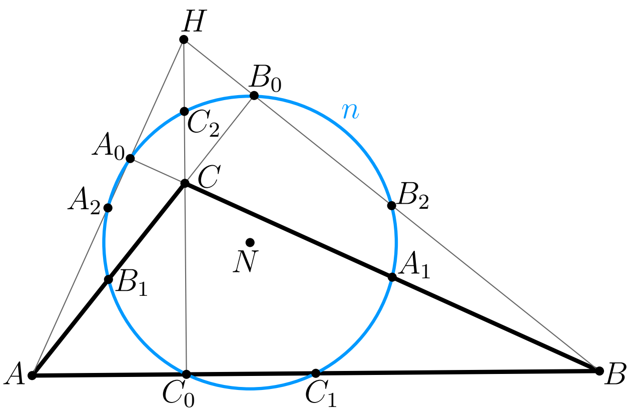


[1]Stručnou biografii tohoto německého matematika uvedeme v kapitole 15.

Jedna z vyobrazených kružnic je kružnice danému trojúhelníku *vepsaná*, další tři kružnice jsou *připsané* jeho stranám. Budeme je pro daný trojúhelník ABC značit $i = (I, r)$, $e_a = (E_a, r_a)$, $e_b = (E_b, r_b)$, $e_c = (E_c, r_c)$ jako na obrázku. Jsou to zřejmě jediné čtyři kružnice, které se dotýkají všech tří přímek AB, AC, BC. Na obrázku je rovněž naznačena konstrukce středů I, E_a, E_b, E_c těchto kružnic užitím os vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku ABC. Označení r, r_a, r_b, r_c jsme připsali jen k těm z poloměrů, které směřují od středů kružnic k bodům jejich dotyku s přímkou AB.

Na pátou kružnici z Feuerbachovy věty nahlíželi geometři první poloviny 19. století z různých pohledů. Objevovali (a bez vzájemné informovanosti i znovuobjevovali) její dílčí vlastnosti, často jako vedlejší produkty při řešení problémů, na kterých pracovali. V důsledku toho získávala i dotyčná kružnice různá pojmenování. Ze dvou českých dosud užívaných názvů *Feuerbachova kružnice* a *kružnice devíti bodů* dáme přednost tomu druhému. Tento (v anglické literatuře ustálený) název vyjadřuje fakt, že na dotyčné kružnici, kterou budeme dále značit jako kružnici n se středem N, leží devět významných bodů obecného trojúhelníku ABC. Jsou to středy A_1, B_1, C_1 jeho stran, paty A_0, B_0, C_0 jeho výšek a konečně body A_2, B_2, C_2, které jsou středy spojnic[2] vrcholů A, B, C s ortocentrem H trojúhelníku ABC a které se nazývají *Eulerovy body*. Ilustrace s vyobrazením všech těchto bodů jsme pořídili zvlášť pro případy ostroúhlého a tupoúhlého trojúhelníku ABC.





Tvrzení, že devět vyjmenovaných bodů leží na jedné kružnici n, uvedeme v následující podobě.

[2] Všude, kde je to zapotřebí, píšeme o spojnicích a ne o úsečkách, abychom do našeho výkladu zahrnuli i „úsečky“ zdegenerované do jednoho bodu.

Věta 1. *Na kružnici n, která prochází středy A_1, B_1, C_1 stran daného trojúhelníku ABC, leží rovněž jak paty A_0, B_0, C_0 jeho výšek, tak středy A_2, B_2, C_2 spojnic jeho ortocentra H s vrcholy A, B, C.*

Důkaz Věty 1 je v české literatuře s malými obměnami uveden v [Hor, str. 78–80], [B-Z, str. 81–82] a [Š-V, str. 46–47]. My ovšem nyní dáme přednost komentovanému výkladu jednotlivých vlastností kružnice n, jak je matematikové v průběhu let postupně objevovali, až po Feuerbachovu větu. Tento i dále pokračující vývoj je podrobně popsán na prvních 10 stranách článku *History of the nine-point circle* z roku 1892 od autora J. S. Mackaye. Z tohoto zdroje [Mac] jsme převzali historické údaje pro další odstavce této kapitoly.[3]

Slíbený výklad o kružnici n zahájíme konstatováním, že některé z devíti jejích bodů A_i, B_i, C_i mohou splývat.[4] Vždy jsou však zřejmě nekolineární středy A_1, B_1, C_1 stran výchozího trojúhelníku ABC. Nejen proto je výhodné kružnici n zavést ve shodě s Větou 1 jako *kružnici opsanou příčkovému trojúhelníku* $A_1B_1C_1$. To se v první polovině 19. století také projevilo tím, že různí autoři dávali kružnici devíti bodů názvy jako *the medioscribed circle*, *the circum-midcircle*, *the mid circle* nebo *il circolo medioscritto*.

Historicky první výsledek o kružnici devíti bodů patří matematickému velikánu L. Eulerovi. Ten již v roce 1765 objevil a algebraickým výpočtem dokázal vlastnost, díky které se tato kružnice dříve také nazývala *the six-point circle* a kterou v našem pojetí a našich označeních můžeme zapsat následovně.

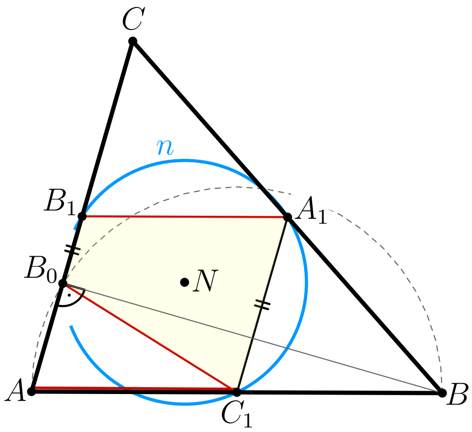
Vlastnost 1: *Na kružnici n, která prochází středy A_1, B_1, C_1 stran daného trojúhelníku ABC, leží rovněž paty A_0, B_0, C_0 jeho výšek.*

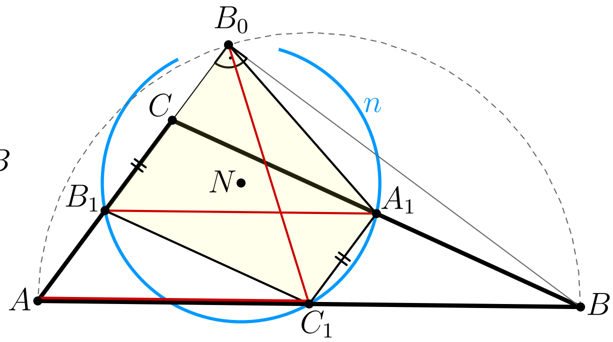
Ověření provedeme jednoduchým syntetickým postupem, který je dnes běžně prezentován a který objevil v roce 1842 francouzský matematik Olry Terquem. Jistě stačí ukázat, že na kružnici n leží například pata B_0, a to v případě, kdy $B_0 \neq B_1$.

Jelikož $AC_1A_1B_1$ je rovnoběžník a B_0 je bod Thaletovy kružnice nad průměrem AB, platí $|B_1A_1| = |AC_1| = |B_0C_1|$. Shodné úsečky B_1A_1 a B_0C_1 jsou ovšem buď rameny, nebo úhlopříčkami lichoběžníku se základnami A_1C_1 a B_0B_1 (viz další dvojici obrázků). V obou případech lze tomuto lichoběžníku jistě opsat kružnici, tudíž bod B_0 skutečně leží na kružnici n opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

[3] Zbylých 30 stran článku [Mac] je věnováno nástinu deseti důkazů Věty 1 (do roku 1878) a deseti důkazů Věty 2 (do roku 1883), kterou uvedeme v této kapitole později a kterou je právě Feuerbachova věta. Její historicky první (Feuerbachův) důkaz však Mackay pouze komentuje na třech řádcích ([Mac, str. 21]).

[4] Z tohoto důvodu je pro důkaz v knize [Š-V] rozlišeno a popsáno pět různých tvarů výchozího trojúhelníku ABC.





Druhou potřebnou vlastnost kružnice n poprvé explicitně oznámili francouzští matematici Charles Brianchon a Jean-Victor Poncelet jako jeden z dílčích výsledků jejich společného článku z roku 1821.[5] Poncelet proto užíval pro kružnici n příhodný název *le circle des neuf points*. Zatímco v současné angličtině tomu odpovídá obecně vžitý název *the nine-point circle*, ve francouzštině je pro kružnici n preferován název *le cercle d'Euler*. Vraťme se však k samotnému tvrzení Brianchona a Ponceleta, které zapíšeme následovně.

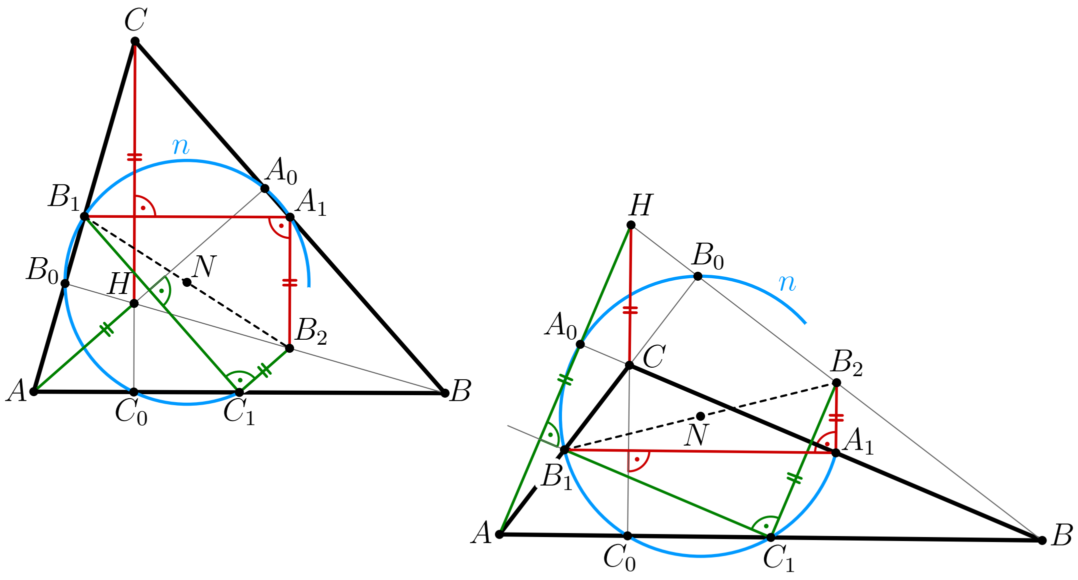
Vlastnost 2: *Na kružnici n, která prochází středy A_1, B_1, C_1 stran daného trojúhelníku ABC, leží rovněž středy A_2, B_2, C_2 spojnic jeho ortocentra H s vrcholy A, B, C.*

Také ověření druhé vlastnosti provedeme osvědčeným postupem podle O. Terquema. Jistě stačí ukázat, že na kružnici n leží například Eulerův bod B_2, a to v případech, kdy platí $B_2 \neq A_1$ (neboli $H \neq C$) a zároveň $B_2 \neq C_1$ (neboli $H \neq A$).

Úsečky B_2A_1 a B_2C_1 jsou střední příčky po řadě trojúhelníků BHC a BHA, tudíž platí $B_2A_1 \parallel HC$ a $B_2C_1 \parallel HA$, jak je vyznačeno na další dvojici obrázků. Navíc však zřejmě $HC \perp A_1B_1$ a $HA \perp B_1C_1$, takže platí $B_2A_1 \perp A_1B_1$ a $B_2C_1 \perp C_1B_1$. Proto oba body A_1, C_1 leží na Thaletově kružnici nad průměrem B_1B_2. Tou je tedy nutně kružnice n opsaná trojúhelníku $A_1B_1C_1$, na které tak bod B_0 skutečně leží. Navíc jsme ukázali, že úsečka B_1B_2 je průměr kružnice n.[6]

[5]Tuto informaci jsme převzali z knih [Joh, str. 196] a [Alt, str. 299]. Podle článku [Mac] je ale výsledek oznámený v roce 1821 bezprostředním důsledkem jednoho tvrzení krátkého příspěvku Benjamina Bevana v *Mathematical Repository*, vyšlého již v roce 1804.

[6]Platí to zřejmě i v případech, kdy $B_2 = A_1$ nebo $B_2 = C_1$, které jsme z naší úvahy vyloučili.



Ověřené dvě vlastnosti v souhrnu už dokazují výše uvedenou Větu 1. Doplňme ji ještě poznatky o poloze středu N kružnice n a velikosti jejího poloměru, které budeme v dalších kapitolách často využívat. Odvodíme je užitím vhodné stejnolehlosti v následujícím odstavci. Do našich úvah přitom poprvé zapojíme *kružnici opsanou* danému trojúhelníku ABC. Budeme ji značit jako kružnici o se středem O a poloměrem R, takže budeme psát $o = (O, R)$.

Stejnolehlost, kterou využijeme, bude mít střed v ortocentru H daného trojúhelníku ABC a koeficient rovný 1/2. V této stejnolehlosti $(H, \frac{1}{2})$ podle konstrukce Eulerových bodů platí $A \to A_2$, $B \to B_2$ a $C \to C_2$, tudíž obrazem trojúhelníku ABC s opsanou kružnicí o je trojúhelník $A_2B_2C_2$. Jemu opsanou kružnicí je podle Věty 1 ovšem kružnice n. Bod H je proto středem vnější stejnolehlosti kružnic o, n a díky jejímu koeficientu 1/2 je kružnice devíti bodů určena následovně:

$$\boxed{n = (N, \tfrac{1}{2}R), \quad \text{kde } N \text{ je střed spojnice } OH.}$$

K tomu ještě dodejme, že bod N je také středem úseček A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2 – tří dříve zjištěných průměrů kružnice n.[7]

Náš výklad o samotné kružnici devíti bodů uzavřeme uvedením důsledku Věty 1 pro kružnici opsanou výchozímu trojúhelníku. Kromě toho, že tento výsledek je zajímavý sám o sobě, uplatníme ho také při některých důkazech Feuerbachovy věty v následujících

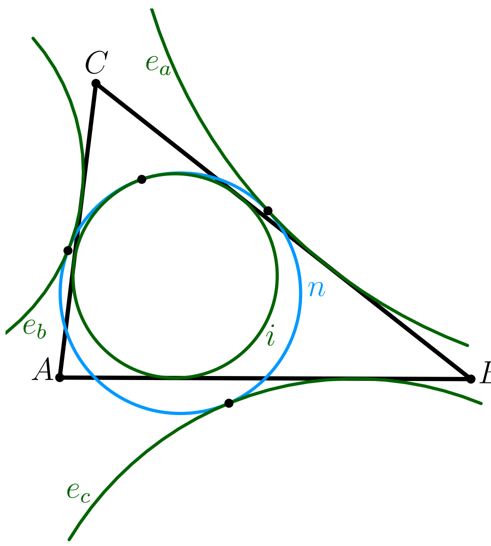
[7]Z analogické úvahy o dvojici trojúhelníků ABC a $A_1B_1C_1$ plyne, že středem vnitřní stejnolehlosti kružnic o, n je těžiště G trojúhelníku ABC. Doplňme ještě, že přímka, na které leží po řadě body H, N, G, O (přičemž $|HN| : |NG| : |GO| = 3 : 1 : 2$), se nazývá *Eulerova přímka* daného trojúhelníku ABC. (Tato přímka ovšem není definována pro rovnostranný trojúhelník ABC, ve kterém $H = N = G = O$.)

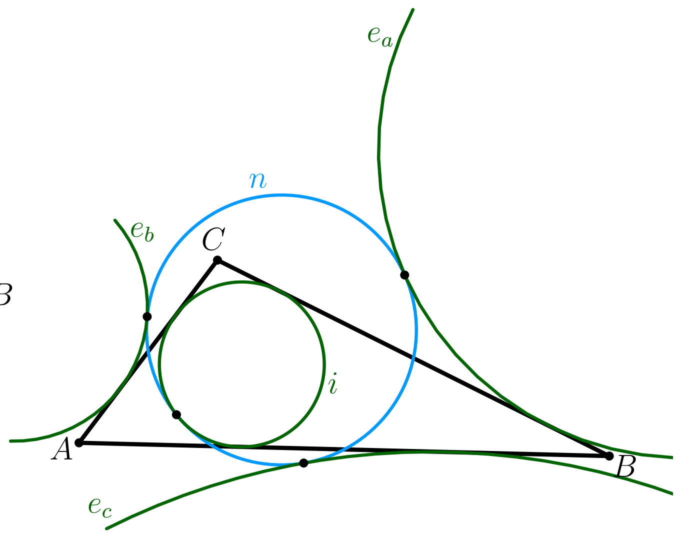
kapitolách. K jeho zdůvodnění využijeme při zavedeném označení stejnolehlost se středem v ortocentru H a koeficientem rovným 2, která podle našich předchozích úvah zobrazí kružnici n na kružnici o. Na ní proto leží například obrazy A_0', A_1' bodů A_0, A_1 kružnice n.[8] Protože A_0 je pata výšky z vrcholu A a A_1 je střed strany BC, je zřejmé, že bod A_0' je souměrně sdružený s bodem H podle přímky AB a že bod A_1' je souměrně sdružený s bodem H podle středu strany BC. Tato zjištění už podle Věty 1 vedou k výsledku, který pojednává o šesti význačných bodech kružnice opsané.

Důsledek: *Na kružnici opsané danému trojúhelníku leží obrazy jeho ortocentra ve třech souměrnostech podle středů stran tohoto trojúhelníku a také obrazy ortocentra ve třech souměrnostech podle přímek, na kterých tyto strany leží.*

Po podrobném (a pro výklad v dalších kapitolách potřebném) výkladu o kružnici devíti bodů přejdeme k vlastní *Feuerbachově větě*. Její znění doplníme opět dvěma ilustracemi pro případy ostroúhlého a tupoúhlého trojúhelníku ABC s dohodnutým značením pětice zastoupených kružnic.

Věta 2. *Kružnice devíti bodů daného trojúhelníku má vnitřní dotyk s kružnicí jemu vepsanou (není-li trojúhelník rovnostranný, kdy tyto dvě kružnice splývají) a rovněž má vnější dotyky s třemi kružnicemi připsanými stranám tohoto trojúhelníku.*





Jak jsme se zmínili již v Úvodu, tvrzení z Věty 2 objevil a důkazem opatřil (tehdy 22letý) K. W. Feuerbach ve své knize [Feu] z roku 1822. Formulaci, v jaké tento výsledek Feuerbach ve svém uceleném výkladu vlastností rovinného trojúhelníku prezentoval,

[8] Eulerův bod A_2 jsme do naší úvahy nezapojili, neboť jeho obraz A_2' splývá s vrcholem A.

okomentujeme v úvodní části kapitoly 2 věnované rozboru Feuerbachova důkazu; fotokopii této původní formulace pak uvedeme v kapitole 15.[9]

Jelikož výtisky knihy [Feu] byly až do jejího znovuvydání v roce 1908 jen stěží dostupné, k širšímu povědomí o tvrzení z Věty 2 nepochybně přispěl švýcarský geometr Jakob Steiner. Ve svém článku z roku 1828 totiž nejen dokázal základní vlastnosti kružnice devíti bodů, ale doplnil je závěrem o tvrzení z Věty 2 bez jeho důkazu.[10] K historii Feuerbachovy věty ještě dodejme, že podle [Mac] její v pořadí druhý (rovněž algebraicko-výpočtový) důkaz podal O. Terquem v roce 1842, zatímco první důkaz prostředky syntetické geometrie publikoval teprve v roce 1850 J. Mention ([Men]). Náročný Mentionův postup v naší práci prezentovat nebudeme. Jeho hlavní myšlenku proto nyní vyjádříme aspoň jednou větou: Pro novou kružnici určenou podmínkami, že má vnitřní dotyk s kružnicí i, vnější dotyk s kružnicí e_c a prochází přitom středem strany AB, Mention v případě $|AC| \neq |BC|$ odvodil několik vlastností, které dohromady už zaručují totožnost této kružnice s kružnicí n.

Feuerbachova věta nesporně přispěla k dalšímu rozvoji geometrických metod. Nové směry výzkumu přinesly různá její zobecnění, o kterých se lze dočíst například v monografii [Joh]. Tyto výsledky však překračují vymezený rámec naší práce.

Poznamenejme ještě, že značení těch význačných prvků obecného trojúhelníku ABC, která jsme v textu kapitoly 1 zavedli, budeme používat i v dalších kapitolách. Pro lepší orientaci čtenáře je uvedeme přehledně v Seznamu užitých značení, zařazeném ve formě přílohy na straně 117.

[9] K. W. Feuerbach za svého krátkého života nemohl seznat, že právě tímto (jediným) tvrzením se významně zapíše do historie matematiky 19. století.

[10] Jak Steiner později přiznává v jednom článku z roku 1833, v roce 1828 o existenci Feuerbachovy práce z roku 1822 ještě nevěděl.

Kapitola 2

Původní Feuerbachův důkaz

V této kapitole se budeme věnovat historicky prvnímu důkazu Feuerbachovy věty, který byl uveřejněn roku 1822 v knize [Feu][1]. V tomto svém pojednání Feuerbach vybudoval od základů poměrně rozsáhlou teorii rovinného trojúhelníku a s ním spojených významných bodů, přímek a kružnic. Tento Feuerbachův více než 60stránkový text je vnitřně provázán četnými odkazy na dříve uvedené výsledky. Bylo proto poměrně nesnadné odtud co nejvěrněji „vyextrahovat“ důkaz jediného výsledku určeného pro tuto kapitolu, aby přitom vytvořený text nepřesáhl rozumnou délku. Dosáhli jsme toho tak, že jsme do našeho výkladu nezařadili Feuerbachovy důkazy těch potřebných vzorců, které jsou běžně známy ze školních učebnic a které proto budeme využívat bez důkazů. Seznam těchto vzorců uvedeme ještě před vlastním výkladem Feuerbachova postupu. Nejprve však popíšeme jeho obecné rysy a nastíníme strukturu celého postupu, který pro přehlednost rozdělíme do čtyř etap.

Tvrzení o dotyku kružnice devíti bodů obecného trojúhelníku s kružnicí jemu vepsanou a s třemi kružnicemi připsanými jeho stranám získal Feuerbach díky početnímu odvození vzorců pro kvadráty vzdáleností mezi několika významnými body dotyčného trojúhelníku. I když je tento postup založen na jednoduché myšlence, že každá taková vzdálenost v trojúhelníku ABC je některou funkcí $f(a, b, c)$ délek jeho stran $a = |BC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$, pro některé potřebné vzdálenosti bylo nalezení složitých a přitom pro další postup použitelných předpisů $f(a, b, c)$ velmi náročným úkolem. Při jeho řešení jak uvidíme projevil Feuerbach obdivuhodnou zdatnost v provádění algebraických úprav, navíc spojenou s tvůrčí předvídavostí, jak by konečné předpisy měly vypadat, aby vedly k potřebným závěrům.[2]

K první větě předchozího odstavce je ovšem nutno dodat, že Feuerbach ještě nemohl znát a natož užívat termín *kružnice devíti bodů.* Proto v paragrafech 49–57 jeho

[1] Úplný název této knihy uvedeme a její význam pro Feuerbachovu profesní kariéru zmíníme v kapitole 15. Zařadíme do ní rovněž sken Feuerbachovy původní formulace tvrzení, které dnes nazýváme Feuerbachovou větou.

[2] Skenem jednoho příkladu takových úprav z originálu [Feu] doplníme 3. etapu našeho výkladu Feuerbachova důkazu.

knihy [Feu], ve kterých je odvozován dotyk vepsané a tří připsaných kružnic s pátou kružnicí (devíti bodů), je tato pátá kružnice obecného trojúhelníku ABC určena jen jako kružnice opsaná jeho tzv. *ortickému* trojúhelníku $A_0B_0C_0$, jehož vrcholy (paty výšek trojúhelníku ABC) jsou podle kapitoly 1 tři z devíti bodů, které později daly páté kružnici n její název.[3] Pro tuto kružnici Feuerbach již v paragrafu 26 výpočtově odvozuje, že její poloměr je roven $\frac{1}{2}R$; dalším výpočtem pak v paragrafu 53 dokazuje, že střed N této kružnice je středem spojnice OH. Oba tyto výsledky dále využijeme bez uvedení Feuerbachových výpočtových důkazů, neboť v kapitole 1 jsme je dokázali jednoduchým syntetickým postupem.

Popišme nyní hlavní myšlenky vlastního Feuerbachova důkazu konkrétněji, nežli jsme naznačili úvodní větou druhého odstavce. Cílem postupu je odvození *vzorců pro vzdálenosti středů* uvažovaných kružnic

$$|NI| = \tfrac{1}{2}R - r, \quad |NE_a| = \tfrac{1}{2}R + r_a, \quad |NE_b| = \tfrac{1}{2}R + r_b, \quad |NE_c| = \tfrac{1}{2}R + r_c,$$

které prokazují jejich vnitřní, resp. vnější dotyk. Jistě bude stačit, když v našem výkladu dokážeme jen rovnosti pro $|NI|$ a $|NE_c|$. Protože N je střed OH, úsečky NI a NE_c jsou těžnicemi trojúhelníků OHI, resp. OHE_c, takže jejich délky v závěru důkazu snadno určíme z kvadrátů délek stran těchto trojúhelníků. To bude náplní 4. etapy našeho výkladu, zatímco v prvních třech etapách se budeme věnovat po řadě výpočtům kvadrátů $|OI|^2$, $|OH|^2$ a $|HI|^2$ pro první trojúhelník OHI. K určení zbylých kvadrátů $|OE_c|^2$ a $|HE_c|^2$ pro druhý trojúhelník OHE_c využijeme elegantní Feuerbachův obrat, který jeho čistě algebraická metoda (založená na výpočtu kvadrátů vzdáleností podle Pythagorovy věty) umožňuje: vzorec pro $|OE_c|^2$ určíme obměnou vzorce pro $|OI|^2$ v závěru 1. etapy, podobně získáme $|HE_c|^2$ z $|HI|^2$ v závěru 3. etapy. Tyto Feuerbachem uskutečněné obměny jsou obecně založeny na záměně jedné z délek stran a, b, c příslušnou opačnou hodnotou $-a$, $-b$, $-c$, jak teď upřesníme.

Poté, co Feuerbach odvodí vztah tvaru

$$|OI|^2 = Q(a, b, c, S),$$

kde $Q(a, b, c, S)$ je racionální funkce délek stran a, b, c a obsahu S trojúhelníku ABC (daného Heronovým vzorcem), autor bez důkazu konstatuje, že v důsledku tohoto výsledku platí rovněž vztahy

$$|OE_a|^2 = Q(-a, b, c, S), \quad |OE_b|^2 = Q(a, -b, c, S), \quad |OE_c|^2 = Q(a, b, -c, S).$$

Správnost takového vztahu pro $|OE_c|^2$ vysvětlíme v závěru 1. etapy našeho dalšího výkladu. Už nyní však upozorněme, že popsané Feuerbachovy obměny jsou především umožněny dobře patrnými vlastnostmi některých vzorců z našeho přehledu v dalším odstavci, a to konkrétně:

[3] Připomeňme, že v této i dalších kapitolách využíváme značení prvků trojúhelníku ABC, která jsme zavedli v kapitole 1 a která jsou rovněž vysvětlena v závěrečné příloze Seznam užitých značení.

- Heronův vzorec pro obsah S je vůči změnám jednotlivých znamének a, b, c invariantní.
- Změnou jednoho ze znamének a, b, c přejde vzorec pro poloměr r po řadě ve vzorce pro poloměry r_a, r_b, r_c.

Obdobným způsobem Feuerbach získává po odvození výrazu typu $Q(a, b, c, S)$ pro $|HI|^2$ výrazy pro $|HE_a|^2$, $|HE_b|^2$ a $|HE_c|^2$.

Jak jsme slíbili, uvedeme nyní bez důkazů přehled několika dobře známých metrických vztahů pro obecný trojúhelník ABC, které Feuerbach při svém postupu využíval (z trojic analogických vzorců uvádíme vždy jen jeden):

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \quad \text{(Heronův vzorec)}\\
R &= \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4S}\\
r &= \frac{2S}{a+b+c}, \quad r_a = \frac{2S}{-a+b+c}\\
\cos\alpha &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \text{(kosinová věta)}\\
|AA_1| &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \quad \text{(vzorec pro těžnici)}
\end{aligned}$$

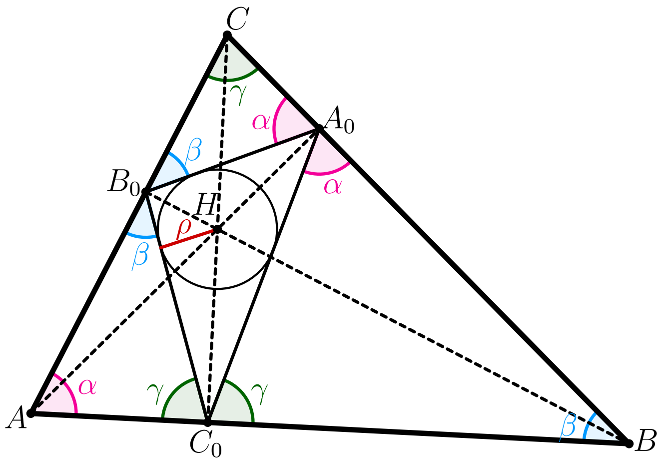
Důkazy uvedených vztahů pro obecný trojúhelník ABC nechybí takřka v žádné středoškolské učebnici planimetrie. Feuerbach však při svém postupu využil také jeden neobvyklý vzorec, a to pro poloměr kružnice vepsané ortickému trojúhelníku $A_0B_0C_0$, o kterém jsme se zmínili už dříve. Protože jsme tento vzorec nenašli v jiných dostupných zdrojích, uvedeme ho i s důkazem už nyní. Odvození tohoto vzorce bylo Feuerbachem zahrnuto do 3. etapy postupu, kterou tudíž v našem podání zkrátíme tím, že se odvoláme na následující Lemma, jehož část využijeme i ve 2. etapě. Věříme, že takové vyčlenění jednoho dílčího poznatku přispěje rovněž k větší přehlednosti celého dalšího výkladu. Z rozsahových důvodů jsme se nakonec rozhodli, že nejen v Lemmatu, ale i v následném důkazu Feuerbachovy věty se omezíme na případ ostroúhlého trojúhelníku ABC.

Lemma. *Ortocentrum H každého ostroúhlého trojúhelníku ABC je středem kružnice vepsané jeho ortickému trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Pro poloměr ρ této kružnice platí vzorec*

$$\rho = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{16abcS}.$$

Důkaz: Obvyklým způsobem označíme a_0, b_0, c_0 délky stran trojúhelníku $A_0B_0C_0$ a S_0 jeho obsah. Na obrázku trojúhelníku ABC s vykreslenými výškami AA_0, BB_0, CC_0 a jejich průsečíkem H jsou rovněž popsány jako α, β, γ vnitřní úhly u vrcholů A,

B, C. Vysvětlíme, proč dvojice úhlů velikostí α, β, γ se vyskytují i u vrcholů A_0, B_0, C_0, jak je na obrázku vyznačeno.



Jistě stačí zdůvodnit, proč například úhly B_0AC_0 a B_0A_0C jsou shodné, neboli proč součet úhlů B_0AB a BA_0B_0 je 180°. Poslední fakt je však známým důsledkem toho, že čtyřúhelník ABA_0B_0 je tětivový (neboť podle Thaletovy věty body A_0, B_0 leží na kružnici s průměrem AB). Tím jsou shodnosti na obrázku shodně popsaných úhlů dokázány. Plyne z nich, že polopřímky A_0A, B_0B, C_0C jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníku $A_0B_0C_0$, takže jejich průsečík H je skutečně středem kružnice vepsané tomuto trojúhelníku, jak jsme měli dokázat.

Všimněme si nyní, že trojúhelníky ABC a A_0B_0C jsou podobné. Proto v důsledku rovnosti $|B_0C| = |BC| \cos\gamma$ platí rovněž $|A_0B_0| = |AB| \cos\gamma$ neboli $c_0 = c \cdot \cos\gamma$. Analogicky $a_0 = a \cdot \cos\alpha$ a $b_0 = b \cdot \cos\beta$. Dosadíme-li do těchto rovností za $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jejich hodnoty z rovností daných kosinovou větou pro trojúhelník ABC, dostaneme vzorce

$$a_0 = \frac{a(-a^2+b^2+c^2)}{2bc}, \quad b_0 = \frac{b(a^2-b^2+c^2)}{2ac}, \quad c_0 = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}.$$

Odtud pro obvod $a_0 + b_0 + c_0$ trojúhelníku $A_0B_0C_0$ dostáváme

$$a_0 + b_0 + c_0 = \frac{a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc} =$$

$$= \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4+b^4+c^4)}{2abc}.$$

Čitatel posledního zlomku však má rozklad[4]

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

[4]Úpravy vedoucí k uvedenému rozkladu zde rozepisovat nebudeme. O správnosti rozkladu se lze přesvědčit též na počítači užitím programu symbolické algebry.

jehož hodnota je podle Heronova vzorce rovna $16S^2$. Získáváme tak konečné vyjádření hledaného obvodu ve tvaru

$$a_0 + b_0 + c_0 = \frac{8S^2}{abc}.$$

K vyjádření obsahu S_0 trojúhelníku $A_0B_0C_0$ využijeme toho, že kružnice jemu opsaná je kružnicí devíti bodů výchozího trojúhelníku ABC, jejíž poloměr je jak víme roven polovině poloměru R kružnice jemu opsané. Proto podle vzorce z úvodu kapitoly platí rovnosti

$$R = \frac{abc}{4S} \quad \text{a} \quad \frac{R}{2} = \frac{a_0b_0c_0}{4S_0}.$$

Vyloučíme-li z nich hodnotu R, dostaneme vztah

$$S_0 = \frac{2a_0b_0c_0}{abc} \cdot S,$$

odkud po dosazení za a_0, b_0, c_0 vychází po úpravě konečné vyjádření

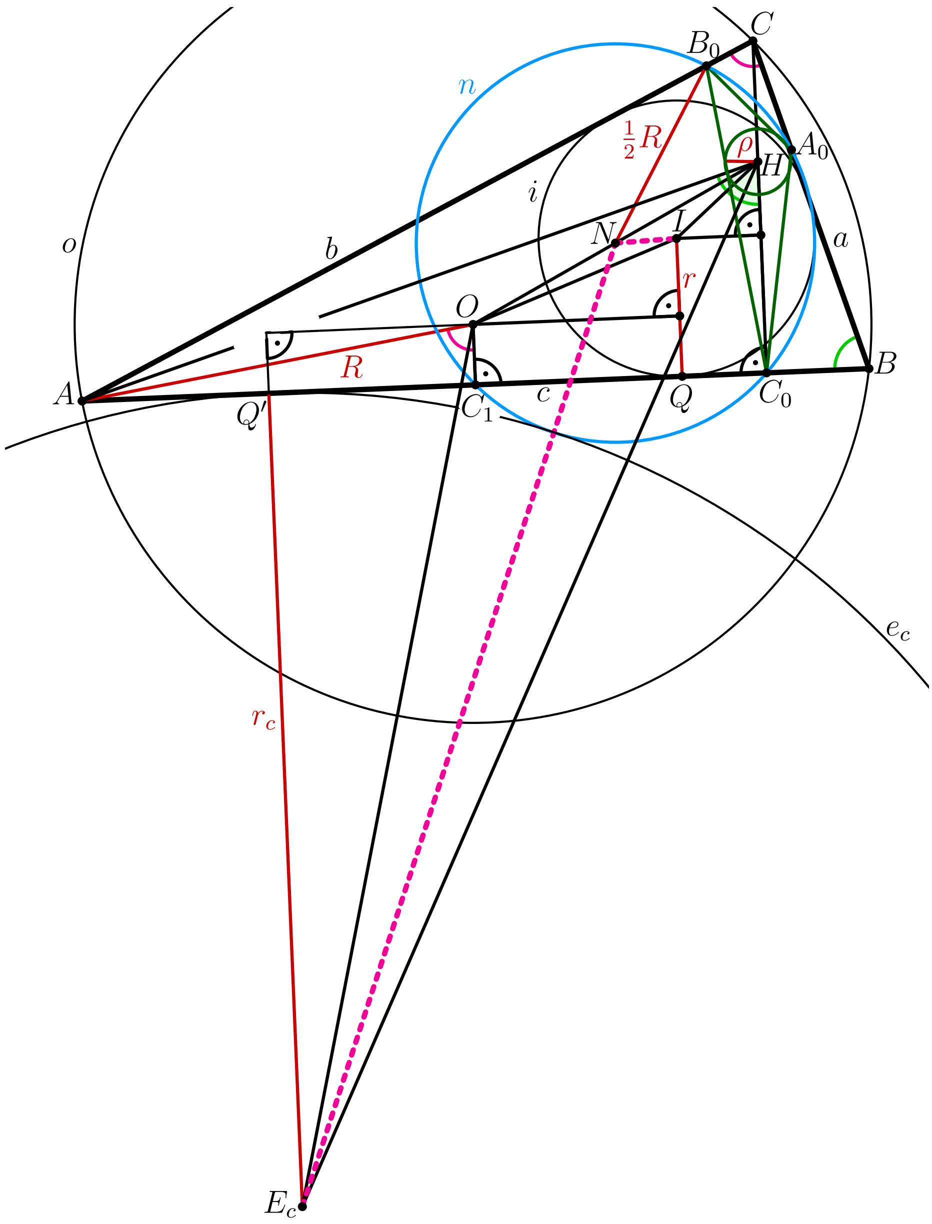
$$S_0 = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2} \cdot S.$$

Máme tak vše připraveno k závěrečnému výpočtu poloměru ρ:

$$\rho = \frac{2S_0}{a_0+b_0+c_0} = 2S_0 \cdot \frac{1}{a_0+b_0+c_0} =$$
$$= \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)S}{2a^2b^2c^2} \cdot \frac{abc}{8S^2} =$$
$$= \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{16abcS}.$$

To je vzorec, který jsme měli dokázat.

Nyní už jsme připraveni k výkladu **vlastního Feuerbachova postupu** po etapách, které jsme nastínili výše. Jak jsme uvedli už ve znění Lemmatu, omezíme se na případ, kdy zadaný trojúhelník ABC *je ostroúhlý*. Jistě stačí dokázat jen vzorce $|NI| = \frac{1}{2}R - r$ a $|NE_c| = \frac{1}{2}R + r_c$. Příslušné dva dotyky kružnic jsou triviální v případě $|AC| = |BC|$ z důvodu souměrnosti podle osy strany AB. Bez újmy na obecnosti proto dále posoudíme pouze případ $|AC| > |BC|$. Pomůže nám následující obrázek, na kterém kromě obvyklých prvků vyznačeny také body dotyku Q a Q' kružnic $i = (I, r)$, resp. $e_c = (E_c, r_c)$ se stranou AB. Díky předpokladu $|AC| > |BC|$ leží body Q', C_1, Q, C_0 právě v tomto pořadí na straně AB. Z důvodu velikosti je celý obrázek vykreslen až na další stránce, na které náš výklad jednotlivých etap důkazu zahájíme.



1. etapa: *Výpočet* $|OI|^2$ *a* $|OE_c|^2$

Hledanou hodnotu $|OI|^2$ určíme z Pythagorovy věty pro trojúhelník, jehož pravý úhel proti přeponě OI je vyznačen na obrázku:

$$|OI|^2 = (|AQ| - |AC_1|)^2 + (|IQ| - |OC_1|)^2.$$

Pro střed C_1 strany AB platí $|AC_1| = \frac{1}{2}c$ a z Lemmatu 14.2 získáváme vzorec $|AQ| = \frac{1}{2}(-a + b + c)$. Tedy pro první rozdíl ze vzorce pro $|OI|^2$ platí

$$|AQ| - |AC_1| = \tfrac{1}{2}(-a + b + c) - \tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}(-a + b). \tag{2.1}$$

Z druhého rozdílu $|IQ| - |OC_1|$ má první vzdálenost vyjádření

$$|IQ| = r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Druhou vzdálenost $|OC_1|$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku AOC_1. Jeho úhel AOC_1 je polovinou středového úhlu AOB odpovídajícího obvodovému úhlu γ, a proto máme $|\sphericalangle AOC_1| = \gamma$. Platí tedy

$$|OC_1| = |AO| \cos \gamma.$$

Po dosazení vztahu $|AO| = R = \frac{abc}{4S}$ a užitím kosinové věty ($\cos \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$) dostáváme

$$|OC_1| = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8S}.$$

Dohromady tak platí

$$|IQ| - |OC_1| = \frac{2S}{a+b+c} - \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8S}.$$

Z Heronova vzorce máme $16S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$. Proto lze získanou rovnost upravit do tvaru

$$|IQ| - |OC_1| = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) - c(a^2+b^2-c^2)}{8S}. \tag{2.2}$$

Dosadíme-li nalezené vztahy (2.1) a (2.2) do úvodního vzorce pro $|OI|^2$, obdržíme:

$$|OI|^2 = (|AQ| - |AC_1|)^2 + (|IQ| - |OC_1|)^2 =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}(-a+b)\right)^2 + \left(\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) - c(a^2+b^2-c^2)}{8S}\right)^2 =$$

$$= \frac{(-a+b)^2 \cdot 16S^2 + ((-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) - c(a^2+b^2-c^2))^2}{64S^2}.$$

Po dosazení dříve uvedeného vzorce pro $16S^2$ do čitatele posledního zlomku následnými algebraickými úpravami zjistíme, že tento čitatel je roven[5]

$$4a^2b^2c^2 - 4abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

takže vzorec pro $|OI|^2$ získává konečný algebraický tvar

$$|OI|^2 = \frac{a^2b^2c^2 - abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16S^2}.$$

Odtud využitím vzorců pro poloměry R a r z úvodního přehledu dostáváme potřebné vyjádření

[5] Nevíme, jakým postupem Feuerbach uvedené vyjádření získal, my jsme jeho správnost ověřili užitím počítačové (symbolické) algebry.

$$\boxed{|OI|^2 = R^2 - 2rR.}$$

Tento výsledek je v geometrii trojúhelníku nazýván *Eulerovou větou.* Dohodneme se, že v celém našem textu budeme odvozenou rovnost pracovně nazývat *Eulerovým vzorcem.*[6]

S ohledem na zřejmé nerovnosti $|OI|^2 \geq 0$ a $R > 0$ plyne z odvozeného Eulerova vzorce známá *Eulerova nerovnost* $R - 2r \geq 0$. Rovnost v ní nastává pouze pro rovnostranný trojúhelník, neboť jen v něm platí $O = I$.

Přejděme nyní k určení druhé potřebné hodnoty $|OE_c|^2$ na základě porovnání pravých stran dvou analogických rovností (druhou z nich lze opět vyčíst z obrázku)

$$|OI|^2 = (|AQ| - |AC_1|)^2 + (|IQ| - |OC_1|)^2,$$

$$|OE_c|^2 = (|AC_1| - |AQ'|)^2 + (|E_cQ'| + |OC_1|)^2.$$

Jak jsme dříve slíbili, objasníme nyní Feuerbachův obrat: z konečného algebraického vzorce pro $|OI|^2$ dostaneme po záměně $c \to -c$ analogický vzorec pro $|OE_c|^2$.

Předně podle Lemmatu 14.2 jsou body dotyku Q a Q' souměrně sdružené podle středu C_1, takže platí $|AC_1| - |AQ'| = |AQ| - |AC_1|$. Proto první sčítanci na pravých stranách obou rovností pro $|OE_c|^2$ a $|OI|^2$ mají podle (2.1) stejnou hodnotou $\frac{1}{4}(a-b)^2$, která je při záměně $c \to -c$ neměnná. Stejně tak je při ní neměnná i hodnota S daná Heronovým vzorcem, tudíž hodnota $|IQ| = r = 2S/(a + b + c)$ se změní na hodnotu $2S/(a + b - c) = r_c = |E_cQ'|$. Proto z předchozího výpočtu rozdílu $|IQ| - |OC_1|$ při záměně $c \to -c$ dostáváme

$$|IQ| - |OC_1| = \frac{2S}{a+b+c} - \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8S} \to$$

$$\to \frac{2S}{a+b-c} + \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8S} = |E_cQ'| + |OC_1|.$$

Tím už je správnost Feuerbachova obratu zřejmě dokázána. Jeho provedením tak obdržíme:

$$|OE_c|^2 = \frac{a^2b^2c^2 - ab(-c)(-a+b-c)(a-b-c)(a+b+c)}{16S^2} =$$

$$= \frac{a^2b^2c^2 + abc(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}{16S^2}.$$

Odtud užitím vzorců pro R a r_c z úvodního přehledu dostáváme

$$\boxed{|OE_c|^2 = R^2 + 2r_cR.}$$

[6]Euler tento výsledek publikoval v roce 1765. Stejný vzorec však zveřejnil William Chapple již v roce 1746. Eulerovu práci z roku 1765 Feuerbach v par. 49 své knihy cituje. K Eulerově vzorci se ještě vrátíme v Poznámce na konci textu této kapitoly.

2. etapa: *Výpočet* $|OH|^2$

Náš výklad této části Feuerbachova postupu bude krátký, neboť většinu autorových výpočtů jsme již uvedli v důkazu Lemmatu z úvodní části této kapitoly. Zbylé autorovy výpočty nahradíme užitím Eulerova vzorce, který jsme podle Feuerbachova postupu odvodili v 1. etapě, takže to nyní nebudeme opakovat.

Již dříve jsme zmínili Feuerbachovo odvození poznatku, že kružnicí opsanou ortickému trojúhelníku $A_0B_0C_0$ je kružnice $(N, \frac{1}{2}R)$, zatímco kružnicí jemu vepsanou je podle Lemmatu kružnice (H, ρ). Proto podle Eulerova vzorce aplikovaného na trojúhelník $A_0B_0C_0$ platí pro vzdálenost středů N a H obou kružnic vztah

$$|NH|^2 = \tfrac{1}{4}R^2 - \rho R.$$

Pro bod N jakožto střed spojnice OH však platí $|OH| = 2|NH|$, a tak už dostáváme potřebné vyjádření

$$\boxed{|OH|^2 = R^2 - 4\rho R.}$$

3. etapa: *Výpočet* $|HI|^2$ *a* $|HE_c|^2$

Nyní uvažme pravoúhlý trojúhelník, jehož pravý úhel proti přeponě HI je vyznačen na úvodním obrázku před 1. etapou. Podle Pythagorovy věty pro hodnotu $|HI|^2$ získáváme vyjádření:

$$|HI|^2 = (|AC_0| - |AQ|)^2 + (|HC_0| - |IQ|)^2.$$

Vzorec $|AQ| = \frac{1}{2}(-a + b + c)$ jsme použili již v 1.etapě, vzdálenost $|AC_0|$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0 s přihlédnutím ke kosinové větě:

$$|AC_0| = |AC| \cos\alpha = b \cdot \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}.$$

Pro rozdíl $|AC_0| - |AQ|$ tak platí

$$|AC_0| - |AQ| = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} - \frac{1}{2}(-a + b + c) = \frac{(-a + b)(a + b - c)}{2c}.$$

Po umocnění posledního zlomku a jeho převodu na dále potřebný jmenovatel $64c^2S^2$ při užití Heronova vzorce dostaneme

$$(|AC_0| - |AQ|)^2 = \frac{(-a + b)^2(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)^3}{64c^2S^2}. \tag{2.3}$$

K určení rozdílu $|HC_0| - |IQ|$ nejprve vyjádříme vzdálenost $|HC_0|$ z pravoúhlého trojúhelníku AC_0H, ve kterém $|\sphericalangle AHC_0| = \beta$:

$$|HC_0| = |AC_0| \operatorname{cotg} \beta = |AC_0| \frac{\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Po dosazení $|AC_0| = |AC|\cos\alpha$ a $R = b/(2\sin\beta)$ dostáváme

$$|HC_0| = \frac{|AC|\cos\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = 2R\cos\alpha\cos\beta,$$

kam ještě dosadíme $R = \frac{abc}{4S}$, $\cos\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$ a $\cos\beta = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$. Získáme tak

$$|HC_0| = 2\frac{abc}{4S}\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac} = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}{8cS}.$$

Také druhou vzdálenost $|IQ| = r = 2S/(a+b+c)$ zapíšeme zlomkem se jmenovatelem $8cS$, když k tomu opět využijeme Heronův vzorec:

$$|IQ| = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{c\cdot 16S^2}{8cS(a+b+c)} = \frac{c(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8cS}.$$

Dohromady tak obdržíme

$$(|HC_0|-|IQ|)^2 = \frac{((-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2) - c(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c))^2}{64c^2S^2} \tag{2.4}$$

Sečtením rovností (2.3) a (2.4) dostaneme hledaný algebraický vzorec pro $|HI|^2$, který lze upravit[7] na tvar

$$|HI|^2 =$$
$$= \frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2 - (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{32S^2}.$$

Odtud užitím vzorců pro S, R a r z našeho úvodního přehledu a vzorce pro ρ z Lemmatu už dostaneme potřebné vyjádření

$$\boxed{|HI|^2 = 2r^2 - 2\rho R.}$$

Druhý potřebný vzorec pro $|HE_c|^2$ nyní získáme Feuerbachovým obratem, který jsme již využili i s vysvětlujícím komentářem v 1. etapě výkladu. Protože takové vysvětlení je analogické i pro vztah mezi vzorci $|HI|^2$ a $|HE_c|^2$, nebudeme ho zde vypisovat a rovnou Feuerbachovu obměnu zapíšeme: Nahradíme-li v algebraickém vzorci pro $|HI|^2$ hodnotu c hodnotou $-c$, získáme

$$|HE_c|^2 =$$
$$= \frac{(-a+b-c)^2(a-b-c)^2(a+b+c)^2 - (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{32S^2} =$$
$$= \frac{(a-b+c)^2(-a+b+c)^2(a+b+c)^2 - (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{32S^2}.$$

[7] Kontrolu výsledné hodnoty součtů mnohočlenů z čitatelů zlomků v (2.3) a (2.4) jsme provedli na počítači.

Odtud užitím vzorců pro R, r_c, ρ dostaneme potřebné vyjádření

$$\boxed{|HE_c|^2 = 2r_c^2 - 2\rho R.}$$

Tento vztah je ve Feuerbachově knize vytištěn s opačným znaménkem +, což bylo způsobeno nejspíše chybou sazeče, poněvadž není moc pravděpodobné, že by Feuerbach tuhle chybu ve své předloze pro knihu přehlédl.

Jak jsme úvodem kapitoly slíbili, přikládáme k 3. etapě sken výpočtů hodnoty $|HI|^2$ z původního Feuerbachova originálu.

$$\overline{OS}^2 = (AF - AP)^2 + (OP - SF)^2.$$

Nun ist aber $AF = \frac{1}{2}(-a+b+c)$ und $AP = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$, folglich:

$$AF - AP = \frac{(a-b+c)(a+b-c) - c(a+b-c)}{2c};$$

ferner, weil (§. 35.) $OP = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}{8c\Delta}$, und (§. 2.) $SF = \frac{2\Delta}{a+b+c}$, so ist:

$$OP - SF = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2) - c(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8c\Delta}.$$

Substituirt man nun im Ausdrucke für $\overline{OS}^2$, so wird man denselben endlich in diese Form bringen können:

$$\overline{OS}^2 = \frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2 - (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{32\Delta^2},$$

woraus sich durch Einführung der Kreishalbmesser r, ρ, R ergiebt:

$$\overline{OS}^2 = 2r^2 - 2\rho R$$

4. etapa: *Dokončení*

Protože víme, že bod N je středem úsečky OH, je úsečka NI těžnicí trojúhelníku OHI, takže pro její délku dle vzorce z úvodního přehledu platí

$$|NI| = \tfrac{1}{2}\sqrt{2|OI|^2 + 2|HI|^2 - |OH|^2}.$$

Dosadíme-li nalezené vztahy pro kvadráty pod odmocninou, jež jsou v textu předchozích etap opatřené rámečky, obdržíme

$$|NI| = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(R^2 - 2rR) + 2(2r^2 - 2\rho R) - (R^2 - 4\rho R)} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4rR + 4r^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(R-2r)^2} = \tfrac{1}{2}|R - 2r| = \tfrac{1}{2}R - r,$$

kde v posledním kroku jsme využili Eulerovu nerovnost $R \geq 2r$, jejíž zdůvodnění jsme připojili k závěru 1. etapy. Dokázaný vztah $|NI| = \frac{1}{2}R - r$ vyjadřuje vnitřní dotyk kružnice vepsané (I, r) s kružnicí devíti bodů $(N, \frac{1}{2}R)$.

Analogicky lze uvážit trojúhelník OHE_c s těžnicí NE_c a vyjádřit její délku:

$$|NE_c| = \tfrac{1}{2}\sqrt{2|OE_c|^2 + 2|HE_c|^2 - |OH|^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + 2r_cR) + 2(2r_c^2 - 2\rho R) - (R^2 - 4\rho R)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(R + 2r_c)^2}.$$

Protože $R + 2r_c > 0$, dostáváme vztah $|NE_c| = \frac{1}{2}R + r_c$, jenž dokazuje vnější dotyk kružnic (E_c, r_c) a $(N, \frac{1}{2}R)$.

Poznámka. Protože jsme se obecnému popisu původního Feuerbachova postupu z knihy [Feu] věnovali podrobně na prvních třech stranách této kapitoly, jeho strukturu nyní zrekapitulujeme jednou větou: V prvních třech etapách jsme odvodili potřebné vzorce, které jsme zvýraznili rámečky; jejich užitím jsme pak ve čtvrté etapě snadno dokončili celý důkaz.

Ze zmíněných vzorců v rámečcích je bezesporu nejproslulejší Eulerův vzorec

$$|OI|^2 = R^2 - 2rR,$$

který má v geometrii rovinného trojúhelníku řadu aplikací i mimo problematiku Feuerbachovy věty. Jak jsme v 1. etapě našeho výkladu uvedli, Eulerovo odlišné (rovněž ryze algebraické) odvození tohoto vzorce z roku 1765 bylo Feuerbachovi známo. Domníváme se však, že ostatní vzorce v rámečcích, které jsme v našem výkladu uvedli, byly objeveny a poprvé dokázány až samotným Feuerbachem.

K Eulerově vzorci dodejme ještě následující. Feuerbach v par. 49 své knihy cituje rovněž jednu pozdější práci z roku 1797, v níž její autor Nicolaus Fuss[8] podává nový důkaz Eulerova vzorce. Fussův postup přitom Feuerbach hodnotí jako „rein geometrisch and sehr einfach“. Přestože se nám kopii Fussovy práce nepodařilo na internetu dohledat, jsme přesvědčeni, že Fuss postupoval tak, jak je tomu dnes při geometrickém důkazu Eulerova vzorce obvyklé (viz [Š-V, str. 131–133]). V našem textu proto dáme přednost méně známému kratšímu postupu z práce [Dob], který je založen na užití sinové věty. Dobbsův postup vyložíme v kapitole 14 již při důkazu užitečného Lemmatu 14.5, které uplatníme v kapitolách 3, 5, 7, 10. Samotný Eulerův vzorec pro $|OI|^2$ pak uvedeme v následném Lemmatu 14.6 spolu s jedním ze tří obdobných vzorců pro $|OE_a|^2$, $|OE_b|^2$ a $|OE_c|^2$. Vyjádření posledních tří hodnot se někdy (jako ve [Wik]) nazývá *Eulerovou větou pro připsané kružnice*, ačkoliv o patrně první odvození se zasloužil až Feuerbach postupem, který jsme popsali v 1. etapě našeho výkladu.

Poznámku k Eulerově vzorci ukončeme nastolením otázky, zda je možné geometrickou cestou dokázat rovněž „příbuzný“ a Feuerbachem objevený vzorec

$$|HI|^2 = 2r^2 - 2\rho R$$

[8] Švýcarský matematik a astronom (1755–1826), který je z dějin matematiky znám především tím, že v Petrohradě po dobu 10 let zapisoval diktáty matematických výkladů oslepého Leonharda Eulera.

z 3. etapy našeho výkladu. Odpověď na tuto otázku neznáme. Našli jsme totiž jedinou práci [Don] z roku 1968, která se tímto vzorcem zabývá. Její autor E. Donath však zmíněný vzorec dokazuje náročnými výpočty s goniometrickými funkcemi, ve kterých nespatřujeme velkou výhodu oproti původním Feuerbachovým algebraickým výpočtům. Rozhodli jsme se proto, že Donathův důkaz do naší práce nezařadíme.

Kapitola 3

Důkazy užitím pravoúhlých průmětů

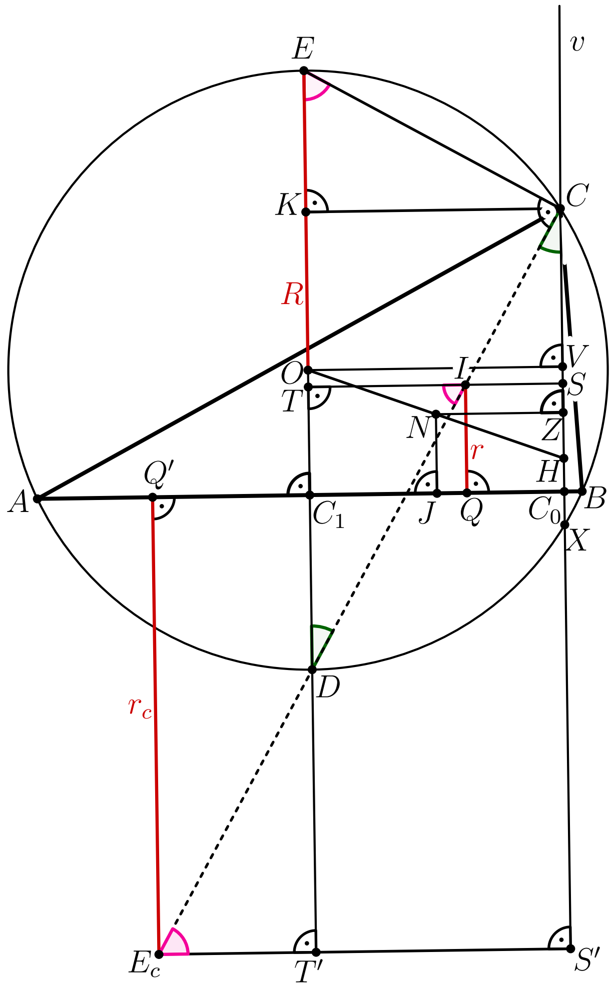
S dalšími důkazy Feuerbachovy věty postavenými na vztazích mezi vzdálenostmi středů uvažovaných kružnic a jejich poloměry přišli W. Harvey v roce 1887 ([Har]) a také K. J. Sanjana v roce 1924 ([San]). Podobně jako Feuerbach využili Pythagorovu větu pro pravoúhlé trojúhelníky, jejichž odvěsny mají délky rovné kolmým průmětům uvažovaných úseček. Byli v tom však důslednější, neboť se v závěrečných fázích svých důkazů vyhnuli Feuerbachovu užití vzorce pro délku těžnice obecného trojúhelníku. Důležitější je však fakt, že Feuerbachův ryze algebraický přístup, který zahrnuje poměrně složité výpočty s polynomy, oba autoři zaměnili geometričtějším pojetím, při kterém podstatně využili podobnostní vztahy mezi vhodnými dvojicemi trojúhelníků a také některá Lemmata z kapitoly 14. Přestože jsou postupy Sanjany a Harveye z hlediska celkové strategie velmi blízké, liší se v dílčích geometrických úvahách, které jsou k dosažení téhož cíle potřebné. Proto výklady obou postupů zařazujeme za sebou do jedné kapitoly, aby o to lépe vynikly jejich odlišnosti. Jejich porovnání provedeme v závěrečné Poznámce.

Sanjanův důkaz

Stejně jako při výkladu původního Feuerbachova důkazu budeme dokazovat dotyk kružnice devíti bodů daného trojúhelníku ABC, nejprve s kružnicí vepsanou a pak s kružnicí připsanou straně AB, a to bez újmy na obecnosti v případě, kdy platí $|AC| > |BC|$. Tak tomu je i na doprovodném obrázku, ve kterém jsme dohodnutým způsobem popsali ty významné body trojúhelníku ABC, které budeme při výkladu potřebovat. Jsou to střed C_1 strany AB, pata C_0 výšky z vrcholu C, ortocentrum H, střed O kružnice opsané (O, R), střed I kružnice vepsané (I, r), střed E_c kružnice (E_c, r_c) připsané straně AB a střed N kružnice devíti bodů $(N, \frac{1}{2}R)$, který je, jak víme z kapitoly 1, středem spojnice OH. Kromě zmíněných bodů na obrázku vidíme celou kružnici (O, R) a také její průměr $DE \perp AB$. Kružnice (I, r) a (E_c, r_c) mají vykresleny pouze své poloměry IQ a E_cQ' s body Q, Q' na straně AB. Na ní je rovněž vyznačen kolmý průmět J středu N. Body C, I, D, E_c leží díky předpokladu $|AC| > |BC|$ v uvedeném pořadí na ose úhlu ACB. Tím je určeno i pořadí jejich kolmých průmětů

C_0, Q, C_1, Q' na přímku AB.

Další potřebné kolmé průměty bodů O, I, N, E_c na přímku $v = CC_0$ jsou označeny po řadě V, S, Z, S'. Kolmé průměty bodů C, I, E_c na přímku DE jsou označeny po řadě K, T, T'. Posledním dosud nezmíněným bodem z obrázku je druhý průsečík X přímky v s kružnicí opsanou. Podle Lemmatu 14.1(i) jsou body H a X souměrně sdružené podle středu C_0.



Vlastní důkaz zahájíme konstatováním, že pořadí bodů

$$C, V, S, Z, H, C_0, X, S'$$

na přímce v může být odlišné od toho z našeho obrázku.[1] Proto nejprve přehledně uvedeme a zdůvodníme všechny potřebné, v obecném případě platné vlastnosti uvedené

[1] Je to patrné například z obrázku, kterým budeme ilustrovat Harveyův důkaz z druhé části této kapitoly.

skupiny kolineárních bodů. První část z nich zapíšeme užitím běžného symbolu pro střed dané dvojice bodů:

$$C_0 = \tfrac{1}{2}(H + X), \qquad Z = \tfrac{1}{2}(V + H), \qquad V = \tfrac{1}{2}(C + X).$$

První rovnost platí díky souměrnosti dvojice bodů H, X zmíněné výše. Druhá rovnost plyne z toho, že trojice (V, Z, H) je kolmým průmětem trojice (O, N, H), ve které je $N = \frac{1}{2}(O + H)$. Konečně třetí rovnost je důsledkem rovnosti $|OC| = |OX|$.

Druhá část obecných vlastností se bude týkat trojice bodů S, Z, S' na přímce v a také trojice O, K, E na průměru DE opsané kružnice. Tato zjištění budeme potřebovat i v následném Harveyově důkazu. Odvodíme je nyní podle obrázků z obou důkazů a na výsledné vztahy se pak v druhém důkazu jen odvoláme. K odvození rozlišíme dva případy.

- Leží-li bod N v polorovině ABI (jako na obrázku k tomuto důkazu), platí rovnosti

  $$|SZ| = |r - |NJ||, \quad |S'Z| = r_c + |NJ|, \quad |EK| + |OK| = |EO| = R.$$

  První dva vztahy jsou zřejmé. Třetí vztah plyne z toho, že úhel OCC_0 je tehdy (jak obrázek napovídá) ostrý nebo pravý.[2] Obdobně v druhém případě využijeme toho, že úhel OCC_0 je naopak tupý nebo pravý.

- Leží-li bod N naopak v polorovině ABE_c (jako na obrázku k Harveyově důkazu), platí pozměněné rovnosti

  $$|SZ| = r + |NJ|, \quad |S'Z| = |r_c - |NJ||, \quad |EK| - |OK| = |EO| = R.$$

  Výsledky obou případů můžeme shrnout do jedné trojice obecně platných vztahů (ve kterých je vždy třeba vzít současně buď horní, nebo dolní ze znaků $\pm$ a $\mp$):

  $$|SZ|^2 = (r \pm |NJ|)^2, \quad |S'Z|^2 = (r_c \mp |NJ|)^2, \quad R = |EK| \mp |OK|.$$

Přejdeme k jiným úvahám. Z konstrukce plyne, že $IT \parallel CK$ a $|\sphericalangle DCE| = 90°$. Úhly DIT a CEK (na obr. vyznačené růžově) jsou tedy shodné. Pravoúhlé trojúhelníky IDT a ECK jsou proto podobné, a tudíž pro délky jejich stran platí

$$\frac{|TI|}{|ID|} = \frac{|EK|}{|EC|}.$$

Podobně díky shodným (zeleně vyznačeným) úhlům v trojúhelnících ISC a ECD platí

$$\frac{|IS|}{|CI|} = \frac{|EC|}{|DE|}.$$

[2] Platí totiž, že úhel OCC_0 je vždy shodný s úhlem C_1NL z Harveyova důkazu. Zdůvodníme to tam v odstavci za vztahem (3.6).

Vynásobíme-li nalezené rovnosti, dostaneme

$$\frac{|TI|\cdot|IS|}{|ID|\cdot|CI|}=\frac{|EK|\cdot|EC|}{|EC|\cdot|DE|}=\frac{|EK|}{|DE|}.$$

Podle Lemmatu 14.5 platí $|CI|\cdot|ID|=2Rr$. Zřejmě také $|DE|=2R$, $|TI|=|C_1Q|$ a $|IS|=|QC_0|$. Dosazením všech těchto rovností do předchozího vztahu získáme rovnost

$$\frac{|C_1Q|\cdot|QC_0|}{2Rr}=\frac{|EK|}{2R},\quad\text{odkud}\quad |C_1Q|\cdot|QC_0|=r|EK|.\tag{3.1}$$

Nyní už zapíšeme slíbenou Pythagorovu větu k potřebnému určení délky úsečky NI (kterou jsme kvůli přehlednosti do obrázku nezakreslili), a to pomocí průmětů J, Z bodu N a průmětů Q, S bodu I:

$$|NI|^2=|JQ|^2+|SZ|^2=|JQ|^2+(r\pm|NJ|)^2.$$

Zabývejme se proto určením délek z pravé strany vypsané rovnosti. Odvodíme pro ně vzorce, které níže označíme (3.2) a (3.3).

Jelikož bod N je střed úsečky OH, z kolmého promítání na přímku AB plyne, že bod J je střed úsečky C_1C_0, a proto z mocnosti bodu Q ke kružnici $(J,\frac{1}{2}|C_1C_0|)$ plyne rovnost

$$|C_1Q|\cdot|QC_0|=\tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2-|JQ|^2.$$

Odtud dostáváme

$$|JQ|^2=\tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2-|C_1Q|\cdot|QC_0|\overset{(3.1)}{=}\tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2-r|EK|.$$

S ohledem na $|C_1C_0|=|OV|$ lze rovnost upravit na výsledný tvar

$$|JQ|^2=\tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2-r|EK|=\tfrac{1}{4}|OV|^2-r|EK|.\tag{3.2}$$

K určení hodnoty $|NJ|$ rovné $|ZC_0|$ využijeme výše uvedené rovnosti pro trojice bodů přímky v. Z $C_0=\frac{1}{2}(H+X)$ a $Z=\frac{1}{2}(V+H)$ plyne $C_0-Z=\frac{1}{2}(X-V)$, odkud $|ZC_0|=\frac{1}{2}|VX|$. Díky $V=\frac{1}{2}(C+X)$ ovšem platí $|VX|=|CV|$, takže dohromady vychází

$$|NJ|=|ZC_0|=\tfrac{1}{2}|VX|=\tfrac{1}{2}|CV|.\tag{3.3}$$

Vrátíme-li se nyní k hledané vzdálenosti bodů N a I, můžeme užitím vztahů (3.2) a (3.3) sestavit sérii rovností

$$|NI|^2=|JQ|^2+(r\pm|NJ|)^2\overset{(3.2)}{=}\tfrac{1}{4}|OV|^2-r|EK|+(r\pm|NJ|)^2\overset{(3.3)}{=}$$

$$\overset{(3.3)}{=}\tfrac{1}{4}|OV|^2-r|EK|+\left(r\pm\tfrac{1}{2}|CV|\right)^2=\tfrac{1}{4}|OV|^2-r|EK|+r^2\pm r|CV|+\tfrac{1}{4}|CV|^2=$$
$$=\tfrac{1}{4}(|OV|^2+|CV|^2)-r(|EK|\mp|CV|)+r^2.$$

Zjednodušme ještě obě závorky v nalezeném vztahu užitím dvou pozorování:
▷ V pravoúhlém trojúhelníku OVC platí $|OV|^2+|CV|^2=|OC|^2=R^2$.

▷ Díky $|CV| = |OK|$ je $|EK| \mp |CV| = |EK| \mp |OK| = R$, jak jsme odvodili výše. Celkově tedy získáváme pro hodnotu $|NI|^2$ vyjádření:

$$|NI|^2 = \tfrac{1}{4}(|OV|^2 + |CV|^2) - r(|EK| \mp |CV|) + r^2 = \tfrac{1}{4}R^2 - rR + r^2 = \left(\tfrac{1}{2}R - r\right)^2,$$

což můžeme díky Eulerově nerovnosti (Lemma 14.6) odmocnit na tvar $|NI| = \frac{1}{2}R - r$, jenž dokazuje vnitřní dotyk kružnic $(N, \frac{1}{2}R)$ a (I, r).

Jako většina jiných autorů, ani J. K. Sanjana ve svém příspěvku neuvádí důkaz tvrzení Feuerbachovy věty pro kružnice připsané. My jej však doplníme, jak jsme slíbili, pro kružnici (E_c, r_c) připsanou straně AB dříve uvažovaného trojúhelníku ABC. Využijeme k tomu náš obrázek k Sanjanovu postupu, na němž je také růžově vyznačen úhel $T'E_cD$ shodný s úhlem DIT. Proto jsou podobné jak trojúhelníky E_cDT' a ECK, tak trojúhelníky $E_cS'C$ a ECD. Odtud plynou rovnosti

$$\frac{|E_cT'|}{|DE_c|} = \frac{|EK|}{|CE|} \quad \text{a} \quad \frac{|S'E_c|}{|E_cC|} = \frac{|CE|}{|ED|}.$$

Jejich vynásobením dostáváme

$$\frac{|E_cT'| \cdot |S'E_c|}{|DE_c| \cdot |E_cC|} = \frac{|EK| \cdot |CE|}{|CE| \cdot |ED|} = \frac{|EK|}{|ED|}.$$

Podle Lemmatu 14.5 platí $|DE_c| \cdot |E_cC| = 2Rr_c$. Víme také, že $|ED| = 2R$. Dosazením do předchozího vztahu získáme rovnost

$$\frac{|E_cT'| \cdot |S'E_c|}{2Rr_c} = \frac{|EK|}{2R}, \quad \text{odtud} \quad |E_cT'| \cdot |S'E_c| = r_c|EK|. \tag{3.4}$$

Uplatněme nyní Pythagorovu větu k určení délky úsečky E_cN (která na obrázku zakreslena není), a to pomocí průmětů Q', S' bodu E_c a průmětů J, Z bodu N:

$$|E_cN|^2 = |Q'J|^2 + |S'Z|^2 = |Q'J|^2 + (r_c \mp |NJ|)^2.$$

Pro určení pravé strany odvodíme ke vztahu (3.3) pro $|NJ|$ ještě vzorec (3.5) pro $|Q'J|$.

Jelikož bod J je střed úsečky C_1C_0, z mocnosti bodu Q' ke kružnici $(J, \frac{1}{2}|C_1C_0|)$ plyne

$$|Q'C_1| \cdot |Q'C_0| = |Q'J|^2 - \tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2 \quad \text{neboli} \quad |Q'J|^2 = \tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2 + |Q'C_1| \cdot |Q'C_0|.$$

Odtud užitím zřejmých rovností $|Q'C_1| = |E_cT'|$, $|Q'C_0| = |S'E_c|$ a vztahu (3.4) obdržíme

$$|Q'J|^2 = \tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2 + |Q'C_1| \cdot |Q'C_0| = \tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2 + |E_cT'| \cdot |S'E_c| \overset{(3.4)}{=} \tfrac{1}{4}|C_1C_0|^2 + r_c|EK|.$$

Protože $|C_1C_0| = |OV|$, poslední rovnost přepíšeme jako slíbený vzorec

$$|Q'J|^2 = \tfrac{1}{4}|OV|^2 + r_c|EK|. \tag{3.5}$$

Po návratu k vyjádření hodnoty $|E_cN|^2$ sestavíme užitím vztahů (3.3) a (3.5) sérii rovností

$$|E_cN|^2 = |Q'J|^2 + (r_c \mp |NJ|)^2 \overset{(3.5)}{=} \tfrac{1}{4}|OV|^2 + r_c|EK| + (r_c \mp |NJ|)^2 \overset{(3.3)}{=}$$

$$\overset{(3.3)}{=} \tfrac{1}{4}|OV|^2 + r_c|EK| + \left(r_c \mp \tfrac{1}{2}|CV|\right)^2 = \tfrac{1}{4}|OV|^2 + r_c|EK| + r_c^2 \mp r_c|CV| + \tfrac{1}{4}|CV|^2 =$$
$$= \tfrac{1}{4}(|OV|^2 + |CV|^2) + r_c(|EK| \mp |CV|) + r_c^2.$$

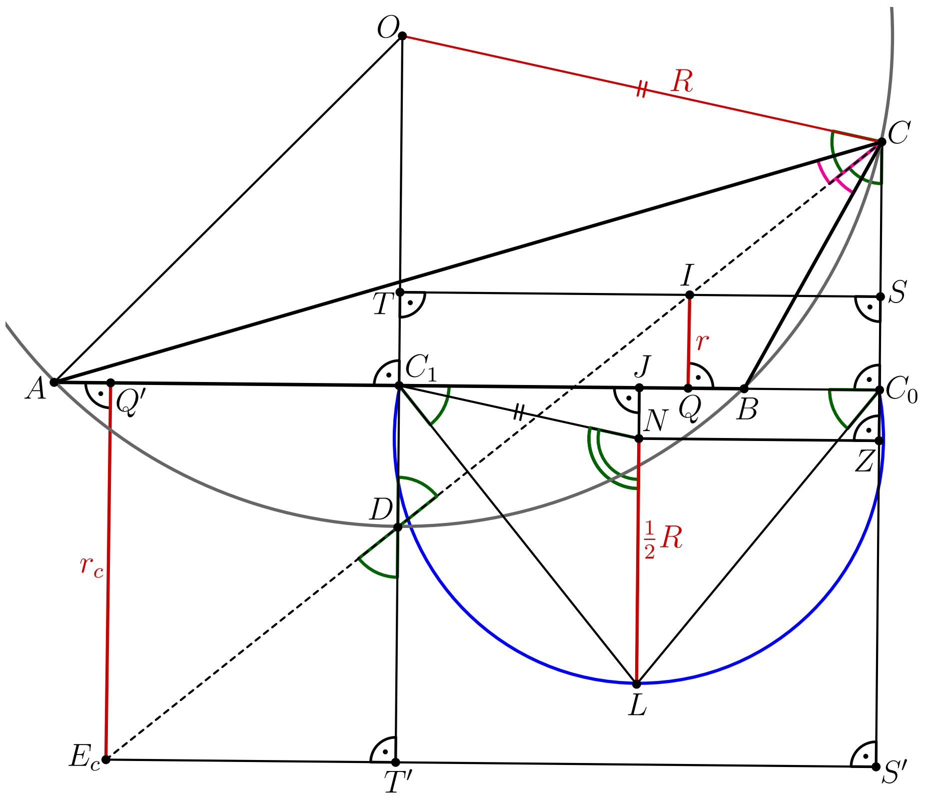
Obě závorky v nalezeném vztahu ještě zjednodušíme stejně jako v první části důkazu:

$$|E_cN|^2 = \tfrac{1}{4}(|OV|^2 + |CV|^2) + r_c(|EK| \mp |OK|) + r_c^2 = \tfrac{1}{4}R^2 + r_cR + r_c^2 = \left(\tfrac{1}{2}R + r_c\right)^2,$$

což po odmocnění dává konečný vztah $|E_cN| = \frac{1}{2}R + r_c$, jenž dokazuje vnější dotyk kružnic $(N, \frac{1}{2}R)$ a (E_c, r_c), jak jsme chtěli ukázat.

Harveyův důkaz

Stejně jako při výkladu Sanjanova postupu budeme předpokládat, že v daném trojúhelníku ABC platí $|AC| > |BC|$, a dokážeme dotyk jeho kružnice devíti bodů $(N, \frac{1}{2}R)$ s kružnicí vepsanou (I, r) a s kružnicí připsanou (E_c, r_c). Výklad doprovodíme obrázkem, ve kterém je většina prvků vykreslena a dohodnutým způsobem označena jako na obrázku k Sanjanovu důkazu. Jejich výčet nyní proto opakovat nebudeme, i když jsme záměrně zvolili jiný tvar výchozího trojúhelníku ABC. Nově vykreslíme jen část kružnice devíti bodů a ten její poloměr NL, který je souhlasně rovnoběžný s poloměrem IQ kružnice vepsané.



Nejdříve uvedeme potřebnou vlastnost kolmých průmětů S, Z a S'. Vzorce pro $|SZ|^2$ a $|S'Z|^2$ převezmeme ze Sanjanova důkazu, kde jsme je odvodili spolu se vztahem $R = |EK| \mp |OK|$. Ten nyní zaměníme analogickým vztahem pro délky úseček LJ a NJ:

$$|SZ|^2 = (r \pm |NJ|)^2, \quad |S'Z|^2 = (r_c \mp |NJ|)^2, \quad \tfrac{1}{2}R = |LJ| \mp |NJ|. \tag{3.6}$$

(Zopakujme, že ve všech třech rovnostech je vždy třeba vzít současně buď horní, nebo dolní ze znaků $\pm$ a $\mp$.)

Přejděme nyní k úhlům barevně vyznačeným na obrázku. Shodnost dvojic úhlů u vrcholu C je důsledkem Lemmatu 14.1(iii), podle kterého úhly ACB a OCC_0 mají společnou osu. Zeleně vyznačené úhly u vrcholu C jsou dále shodné s těmi u vrcholu D a navíc úhel C_1NL je jejich dvojnásobkem: Úhly OCC_0 a C_1NL jsou totiž shodné, neboť mají souhlasně rovnoběžná jak první ramena (Lemma 14.1(ii)), tak druhá ramena (ze způsobu určení poloměru NL). Posouzený úhel C_1NL je ovšem středový úhel v kružnici devíti bodů, který přísluší oblouku C_1L shodnému s obloukem C_0L. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu tak jsou rovněž zeleně vyznačené úhly u vrcholů C_1, C_0 shodné s těmi u vrcholů C a D.

Podle provedené analýzy vyznačených úhlů vidíme, že pravoúhlé trojúhelníky DIT, C_1LJ a CIS jsou navzájem podobné. Díky tomu platí rovnosti (pořadí krajních bodů úseček zvolíme vhodně pro další úvahy)

$$\frac{|IT|}{|DI|} = \frac{|LJ|}{|LC_1|} = \frac{|IS|}{|IC|}. \tag{3.7}$$

Zapišme, že součin prvního zlomku se třetím se rovná kvadrátu druhého zlomku:

$$\frac{|IT| \cdot |IS|}{|DI| \cdot |IC|} = \frac{|LJ|^2}{|LC_1|^2}. \tag{3.8}$$

Dosaďme sem zřejmé rovnosti $|IS| = |QC_0|$ a $|IT| = |C_1Q|$, rovnost $|DI| \cdot |IC| = 2Rr$ z Lemmatu 14.5 a konečně rovnost $|LC_1|^2 = R \cdot |LJ|$ z Eukleidovy věty o odvěsně LC_1 pravoúhlého trojúhelníku vepsaného do kružnice devíti bodů (jež má průměr délky R). Po těchto dosazeních dostaneme

$$\frac{|QC_0| \cdot |C_1Q|}{2Rr} = \frac{|LJ|^2}{R \cdot |LJ|}, \quad \text{odkud} \quad |C_1Q| \cdot |QC_0| = 2r|LJ|. \tag{3.9}$$

Na druhou stranu, podle mocnosti bodu Q ke kružnici nad průměrem C_0C_1, která má střed v bodě J, platí

$$|C_1Q| \cdot |QC_0| = |JC_1|^2 - |JQ|^2.$$

Porovnáním s (3.9) tak získáme

$$|JC_1|^2 - |JQ|^2 = 2r|LJ| \quad \text{neboli} \quad |JQ|^2 = |JC_1|^2 - 2r|LJ|.$$

Kromě poslední rovnosti a vztahů (3.6) budeme k dokončení celého důkazu už jen potřebovat Pythagorovu větu pro trojúhelník NC_1J, podle které platí

$$|JC_1|^2 + |NJ|^2 = |NC_1|^2 = \tfrac{1}{4}R^2. \tag{3.10}$$

Nyní už jsme připraveni k užití Pythagorovy věty pro výpočet vzdálenosti $|NI|$ pomocí průmětů J, Z bodu N a průmětů Q, S bodu I:

$$\begin{aligned} |NI|^2 &= |JQ|^2 + |SZ|^2 = (|JC_1|^2 - 2r|LJ|) + (r \pm |NJ|)^2 = \\ &= (|JC_1|^2 + |NJ|^2) - 2r(|LJ| \mp |NJ|) + r^2 = \\ &= \tfrac{1}{4}R^2 - rR + r^2 = \left(\tfrac{1}{2}R - r\right)^2, \quad \text{a proto} \quad |NI| = \tfrac{1}{2}R - r. \end{aligned}$$

(Opět jsme uplatnili Eulerovu nerovnost.) Tím je náš výklad Harveyova důkazu ukončen. Obohatili jsme ho o unifikovaný zápis vzorců (3.6) pro dva možné typy trojúhelníků ABC, ze kterých Harvey (stejně jako Sanjana) uvažoval pouze jeden (typ, u kterého bod N leží v polorovině ABC).

Název Harveyova příspěvku *Geometrical Proof of the Tangency of the Inscribed and Nine-Point Circles* dosvědčuje, že autor se v textu vůbec nezmiňuje o Feuerbachově větě pro kružnice připsané. Jak bylo již z našeho výkladu a obrázku k Harveyovu postupu patrné, pojali jsme ho tak, aby mohl být využit i pro náš vlastní důkaz dotyku kružnice $(N, \frac{1}{2}R)$ s kružnicí (E_c, r_c), ke kterému nyní přistoupíme.

Díky shodnosti zeleně vyznačených úhlů na našem posledním obrázku můžeme tentokrát uvážit trojici navzájem podobných trojúhelníků DE_cT', C_1LJ, CE_cS' a zapsat obměnu rovností (3.7), které budou mít tvar

$$\frac{|E_cT'|}{|DE_c|} = \frac{|LJ|}{|LC_1|} = \frac{|E_cS'|}{|E_cC|}.$$

Důsledek (3.8) pak získá tvar

$$\frac{|E_cT'| \cdot |E_cS'|}{|DE_c| \cdot |E_cC|} = \frac{|LJ|^2}{|LC_1|^2}.$$

Dosaďme sem $|E_cT'| = |Q'C_1|$, $|E_cS'| = |Q'C_0|$ a také rovnost $|DE_c| \cdot |E_cC| = 2Rr_c$ (z Lemmatu 14.5) spolu s rovností $|LC_1|^2 = R \cdot |LJ|$ (z původního postupu). Dostaneme

$$\frac{|Q'C_1| \cdot |Q'C_0|}{2Rr_c} = \frac{|LJ|^2}{R \cdot |LJ|}, \quad \text{odkud} \quad |Q'C_1| \cdot |Q'C_0| = 2r_c|LJ|. \tag{3.11}$$

Užitím mocnosti bodu Q' ke kružnici se středem J a průměrem C_0C_1 obdržíme

$$|Q'C_1| \cdot |Q'C_0| = |JQ'|^2 - |JC_1|^2.$$

Porovnáním s (3.11) tak přicházíme k rovnosti

$$|JQ'|^2 - |JC_1|^2 = 2r_c|LJ| \quad \text{neboli} \quad |JQ'|^2 = |JC_1|^2 + 2r_c|LJ|.$$

Nyní můžeme již přejít k Pythagorově větě pro výpočet vzdálenosti $|E_cN|$ pomocí průmětů J, Z bodu N a průmětů Q', S' bodu E_c. Kromě poslední rovnosti využijeme vztahy (3.6) a rovnost (3.10):

$$\begin{aligned}
|E_cN|^2 &= |JQ'|^2 + |S'Z|^2 = (|JC_1|^2 + 2r_c|LJ|) + (r_c \mp |NJ|)^2 = \\
&= (|JC_1|^2 + |NJ|^2) + 2r_c(|LJ| \mp |NJ|) + r_c^2 = \\
&= \tfrac{1}{4}R^2 + r_cR + r_c^2 = \left(\tfrac{1}{2}R + r_c\right)^2, \quad \text{a proto} \quad |E_cN| = \tfrac{1}{2}R + r_c.
\end{aligned}$$

Tím je celý náš důkaz pro kružnici připsanou hotov.

Poznámka. Jak jsme úvodem této kapitoly slíbili, její závěr věnujeme srovnání postupů K. J. Sanjany a W. Harveye z hlediska užitých geometrických poznatků. Pochopitelně se přitom omezíme na první části obou výkladů, věnované vepsané kružnici. Ty sice využívají odlišných pomocných trojúhelníků CKE (Sanjana) a C_1JL (Harvey), avšak sdílejí nejen týž cíl, ale i hlavní směřování: Užitím vztahu $|DI| \cdot |IC| = 2Rr$ z Lemmatu 14.5 odvodit vzorec pro součin $|C_1Q| \cdot |QC_0|$, a to ve tvaru $|C_1Q| \cdot |QC_0| = r|EK|$ (vzorec (3.1) u Sanjany), respektive $|C_1Q| \cdot |QC_0| = 2r|LJ|$ (vzorec (3.9) u Harveye).

Připomenutý klíčový vzorec (3.1), resp. (3.9) pak každému z obou autorů umožnil využít mocnost bodu Q ke kružnici nad průměrem C_1C_0, jejíž střed J je (pro uplatnění důkazové metody potřebným) kolmým průmětem středu N kružnice devíti bodů. Jak dosvědčuje konstrukce pomocných bodů E a K zastoupených ve vzorci (3.1), Sanjana při odvození svého vzorce (3.1) s kružnicí devíti bodů vůbec nepracuje. Proto je poté nucen ještě uvážit další pomocný bod X a využít jeho sdruženost s ortocentrem H v osové souměrnosti podle přímky AB, aby získal pro hodnotu $|NJ|$ dále potřebný vztah (3.3). Oproti tomu dokončení Harveyova důkazu ze vzorce (3.9) je už vcelku triviální.

Kapitola 4

Peacockův výpočet vzdáleností středů

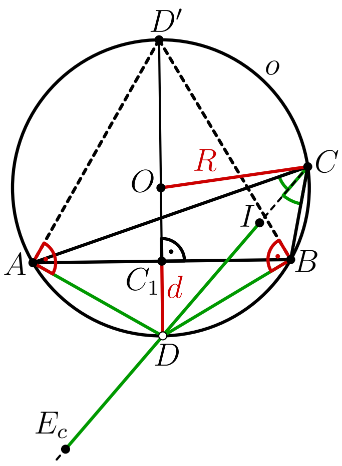
I tato (v pořadí již třetí) kapitola bude věnována důkazu Feuerbachovy věty cestou odvození vzorců

$$|NI| = \tfrac{1}{2}R - r, \quad |NE_a| = \tfrac{1}{2}R + r_a, \quad |NE_b| = \tfrac{1}{2}R + r_b, \quad |NE_c| = \tfrac{1}{2}R + r_c$$

pro vzdálenosti středu N kružnice n devíti bodů trojúhelníku ABC od jednotlivých středů I, E_a, E_b, E_c kružnice i jemu vepsané a kružnic e_a, e_b, e_c připsaných jeho stranám.[1] Elementární geometrický důkaz, který nyní vyložíme, publikoval roku 1927 J. Peacock v časopise *The Mathematical Gazette*. Jeho příspěvek [Pea] bezesporu patří k nejelegantnějším z těch důkazů Feuerbachova tvrzení, které využívají minimum výchozích teoretických poznatků. Zrekapitulujeme je všechny pro zajímavost až po výkladu důkazu v závěrečné Poznámce. Předcházet jí bude ještě Dodatek, který věnujeme otázce *univerzálnosti* právě vyložené Peacockovy metody.

Úvodem vlastního výkladu konstatujme, že nám jistě postačí odvodit jen vzorce pro vzdálenosti $|NI|$ a $|NE_c|$, a to pouze v netriviálním případě, kdy v trojúhelníku ABC platí $|AC| \neq |BC|$. Tehdy je střed C_1 strany AB různý od průsečíku D opsané kružnice $o = (O, R)$ s osou vnitřního úhlu BCA. Na této ose pak leží úsečka IE_c a bod D je navíc jejím středem, neboť podle známé části Lemmatu 14.4 jsou shodné dokonce čtyři úsečky DI, DE_c, DA a DB. Poslední dvě z nich jsou odvěsnami dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků DAD' a DBD', kde DD' je průměr kružnice o kolmý k její tětivě AB.

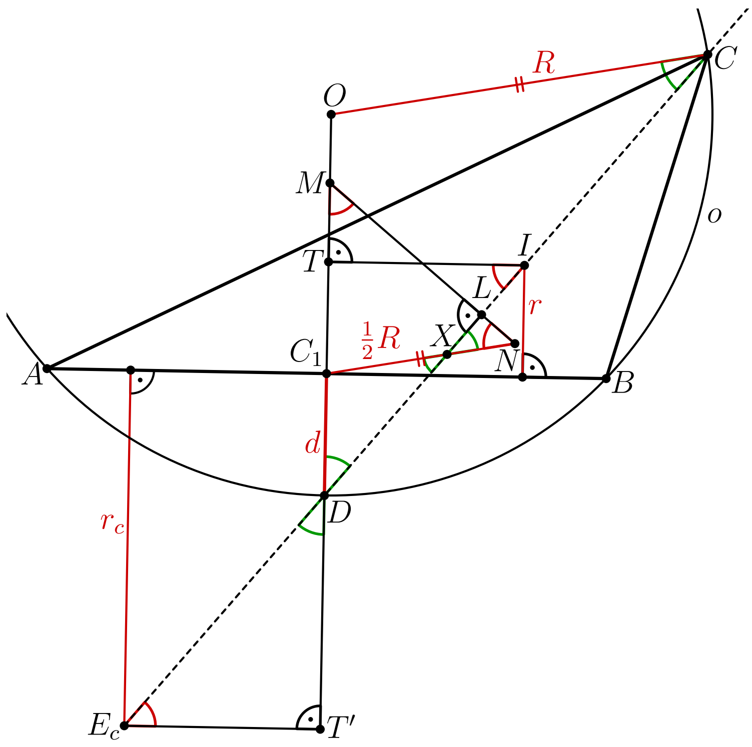
[1] Poslední důkaz tohoto druhu, který uvedeme až v kapitole 13, bude založen na užití vektorové algebry.



Při označení $d = |C_1D|$ pak podle Eukleidovy věty o odvěsně platí rovnosti $|DA|^2 = = |DB|^2 = 2Rd$, a proto rovněž platí

$$|DI|^2 = |DE_c|^2 = 2Rd. \tag{4.1}$$

Vztahy (4.1), které Peacock ve svém příspěvku uvedl jako zřejmé, jsme odvodili předem, abychom nenarušili hlavní směřování výkladu. Zahájíme ho popisem potřebné konstrukce, která je provedena na dalším obrázku.



Z prvního obrázku jsme zachovali úsečku C_1D označené délky d, kružnici o s poloměrem OC délky R a osu CD, na níž leží středy kružnic $i = (I, r)$ a $e_c = (E_c, r_c)$.

Nově jsme vyznačili jejich poloměry r, r_c ve směru kolmém k AB a kolmé průměty středů I, E_c na přímku OD jsme označili po řadě T, T'. Z kružnice n jsme vykreslili jen její poloměr NC_1, který má délku $\frac{1}{2}R$ a je podle Lemmatu 14.1(ii) nesouhlasně rovnoběžný s poloměrem OC kružnice o. Zbývá popsat trojici pomocných, avšak rozhodujících bodů (X, L, M): X je průsečík přímek CD a NC_1 (různoběžných díky $|AC| \neq |BC|$), zatímco L a M jsou průsečíky kolmice z bodu N k přímce CD po řadě s přímkami CD a OD.

Nyní zdůvodníme shodnosti touž barvou na obrázku vyznačených úhlů. Z $|OC| = |OD| = R$ a $OC \parallel C_1X$ plyne, že oba trojúhelníky OCD a C_1XD jsou rovnoramenné. Platí tak shodnost všech zeleně vyznačených úhlů (s vrcholy C, X, D). Díky tomu ze čtveřice pravoúhlých trojúhelníků MDL, NXL, IDT, a E_cDT' plyne, že rovněž všechny červeně vyznačené úhly (u vrcholů M, N, I a E_c) jsou shodné.

Dokázané shodnosti úhlů předně vedou k rovnostem

$$|C_1X| = |C_1D| = d \quad \text{a} \quad |C_1M| = |C_1N| = \tfrac{1}{2}R, \tag{4.2}$$

z nichž pro situaci z našeho obrázku máme

$$\begin{aligned} |DM| &= |C_1M| + |C_1D| &&= \tfrac{1}{2}R + d, \\ |XN| &= |C_1N| - |C_1X| &&= \tfrac{1}{2}R - d, \\ |MT| &= |C_1M| - |C_1T| &&= \tfrac{1}{2}R - r, \\ |MT'| &= |C_1M| + |C_1T'| &&= \tfrac{1}{2}R + r_c. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Druhým důsledkem jsou podobnosti pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MDL \sim \triangle NXL \sim \triangle IDT \sim \triangle E_cDT. \tag{4.4}$$

Výpočty potřebných hodnot $|NI|$ a $|NE_c|$ provedeme dále už odděleně. S ohledem na poslední dvě rovnosti z (4.3) budeme hotovi, když odvodíme rovnosti $|NI| = |MT|$ a $|NE_c| = |MT'|$.

- Z podobností $\triangle MDL \sim \triangle NXL \sim \triangle IDT$ plyne

$$|ML| : |DM| = |NL| : |XN| = |IT| : |DI|,$$

odkud podle jednoho staršího početního pravidla[2] dostáváme rovnost

$$\frac{|ML|^2 - |NL|^2}{|DM|^2 - |XN|^2} = \frac{|IT|^2}{|DI|^2}.$$

Podle (4.1) a (4.3) se však jmenovatelé posledních dvou zlomků rovnají:

$$|DM|^2 - |XN|^2 = \left(\tfrac{1}{2}R + d\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}R - d\right)^2 = 2Rd = |DI|^2.$$

[2]Platí-li $x : y = u : v$, pak platí i $x : y = (x - u) : (y - v)$, pokud ovšem $y \neq v$. Použití tohoto pravidla je v dané situaci korektní, neboť vzápětí přímo v textu ukážeme, že skutečně platí $|DM|^2 - |XN|^2 \neq 0$.

Proto platí i rovnost čitatelů obou sestavených zlomků, kterou rovnou ještě upravíme trojím užitím Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} |ML|^2 - |NL|^2 &= |IT|^2, \\ (|ML|^2 + |LI|^2) - (|NL|^2 + |LI|^2) &= |IT|^2, \\ |MI|^2 - |NI|^2 &= |IT|^2, \\ |NI|^2 &= |MI|^2 - |IT|^2, \\ |NI|^2 &= |MT|^2. \end{aligned}$$

Odtud už máme $|NI| = |MT|$, jak jsme potřebovali dokázat.

• Peacockovo pouhé konstatování, že rovnost $|NE_c| = |MT'|$ se dokáže podobně jako rovnost $|NI| = |MT|$, nyní vysvětlíme. Skutečně, stačí k tomu v celém textu důkazu $|NI| = |MT|$ jen formálně změnit značení bodů I a T po řadě na E_c a T', neboť:
▷ hodnota $|DI|^2$ je podle (4.1) rovna $2Rd$ stejně jako hodnota $|DE_c|^2$,
▷ trojúhelník IDT přejde v jemu podobný trojúhelník E_cDT',
▷ při uplatněních Pythagorovy věty přejdou pravoúhlé trojúhelníky MLI, NLI a MTI po řadě v pravoúhlé trojúhelníky MLE_c, NLE_c a $MT'E_c$.

Tím je náš výklad Peacockova důkazu ukončen.

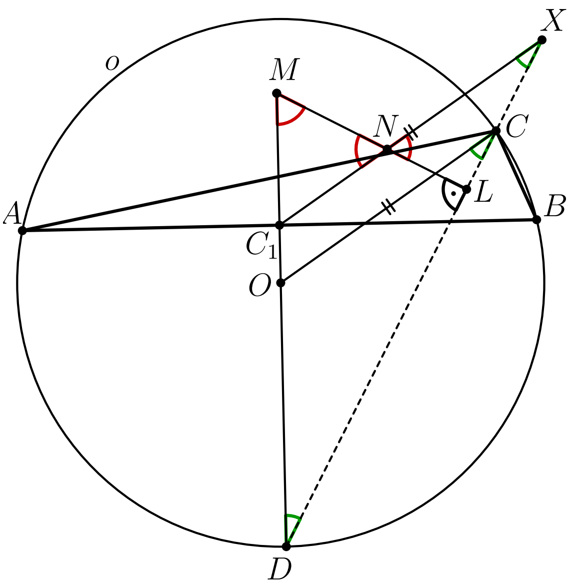
Dodatek. V podaném důkazu jsme – stejně jako Peacock – využili jediný obrázek trojúhelníku ABC pro případ, kdy platí $|AC| > |BC|$. Případem $|AC| < |BC|$ se s ohledem na symetrii sice zabývat nemusíme, avšak i v případě $|AC| > |BC|$ existují odlišné konfigurace zastoupených bodů, které je třeba k úplnosti důkazu Feuerbachovy věty posoudit. Jsou vykresleny na poslední stránce této kapitoly.[3] Zdůrazněme předem, že při rozlišování konfigurací jsme nebrali v potaz polohu středů I a E_c na polopřímce CD. Vystačíme totiž s obecným poznatkem, že střed I leží v polorovině ABC a střed E_c na polopřímce opačné k polopřímce DC. Proto pravoúhlé trojúhelníky IDT a E_cDT, které potřebujeme do podobností (4.4) a které v nových obrázcích chybí, mají u společného vrcholu D shodné ostré (vrcholové) úhly, přitom první z nich (totiž úhel IDT neboli CDO) je na každém z obrázků vyznačen zeleně, což k zastoupení obou pravoúhlých trojúhelníků v (4.4) jistě stačí.

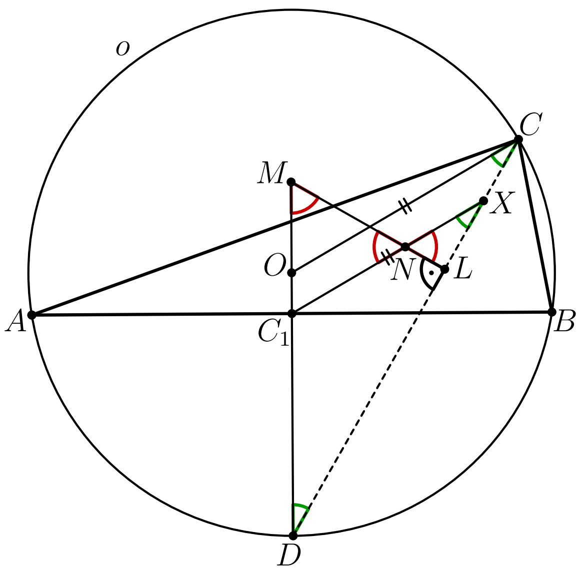
Podobně snadno jako při původním důkazu lze v každé ze čtyř nových konfigurací odvodit shodnosti všech úhlů vyznačených touž barvou. Plyne z nich, že rovnosti (4.2) i podobnosti (4.4) mají obecnou platnost. Tu budou mít podle nových obrázků i rovnosti (4.3), když jedinou z nich, totiž rovnost $|XN| = \frac{1}{2}R - d$, změníme

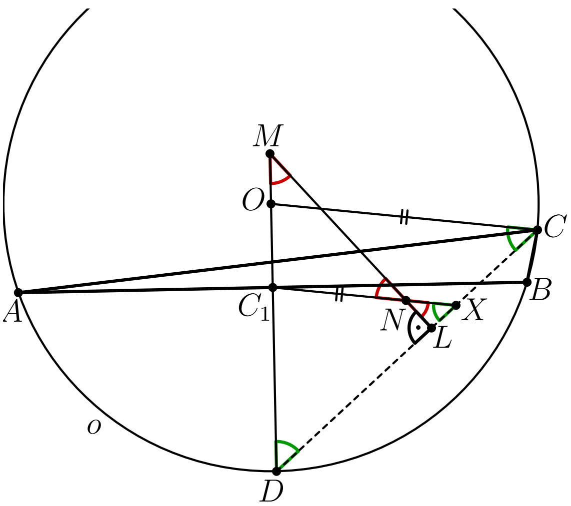
[3] Alespoň stručně naznačíme, jak snadný je důkaz v situaci, která proto ani na nových obrázcích není, kdy totiž bod N leží na přímce CD (a kdy tak body L, X, N splývají): Úsečka NC_1 je tehdy střední příčka rovnoramenného trojúhelníku OCD, proto bod M splývá se středem O a navíc $d = |C_1D| = \frac{1}{2}R$, takže máme $|DI| = |DE_c| = R$ podle (4.1); potřebné rovnosti $|NI| = |OT|$ a $|NE_c| = |OT'|$ tudíž okamžitě plynou ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků ODN, IDT a E_cDT'.

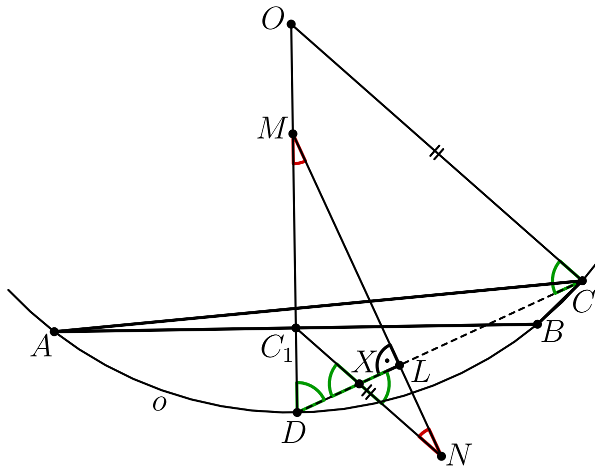
na $|XN| = |\frac{1}{2}R - d|$.[4] Tato změna však neovlivní hodnotu $|XN|^2$ potřebnou k dalšímu výpočtu. Tím je naše potvrzení univerzálnosti Peacockovy metody hotovo.

Poznámka. J. Peacock ve svém důkazu využil pouze poměry délek stran čtyř navzájem podobných pravoúhlých trojúhelníků, Pythagorovu větu, známou shodnost čtyř úseček DI, DE_c, DA a DB, Eukleidovu větu o odvěsně a konečně vztah mezi poloměrem OC kružnice opsané a poloměrem NC_1 kružnice devíti bodů; tento vztah je však dán známou stejnolehlostí oněch kružnic, která má koeficient $-\frac{1}{2}$. Nezbývá nic jiného, nežli ocitovat poslední větu z Peacockova příspěvku: „It is scarcely possible that such an elementary proof is new, but I am not aware of any proof on these lines.“









[4]Podobná změna rovnosti $|MT| = \frac{1}{2}R - r$ na tvar $|MT| = |\frac{1}{2}R - r|$ není nutná díky Eulerově nerovnosti $\frac{1}{2}R \geq r$ z Lemmatu 14.6.

Kapitola 5

Důkaz konstrukcemi vzdáleností středů

Tuto kapitolu věnujeme elegantní konstrukci, kterou zveřejnil W. S. McCay roku 1889 ve svém příspěvku [MCa] v rubrice časopisu *The Educational Times.*[1] Za jistých předpokladů na výchozí trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou (I, r) a kružnicí devíti bodů $(N, \frac{1}{2}R)$ sestrojil McCay pomocnou kružnici s dvěma významnými tětivami. První z nich má podle své konstrukce délku $R - 2r$. O druhé tětivě pak McCay dokázal, že je s tou první shodná a že má oproti úsečce NI dvojnásobnou délku. Tím bez obvyklé nutnosti náročných výpočtů získal vyjádření $|NI| = \frac{1}{2}(R - 2r) = \frac{1}{2}R - r$, které prokazuje, že kružnice (I, r) a $(N, \frac{1}{2}R)$ mají skutečně vnitřní dotyk.

Pro lepší přehlednost oddělíme důkaz obou zmíněných tvrzení od výkladu samotné konstrukce, ke kterému za okamžik přistoupíme. Předtím však v jednom odstavci uvedeme, o jaké úpravy a rozšíření původní McCayovo sdělení obohatíme. Nepůjde jen o výklad podrobností, na které McCay ve svém stručném textu nenašel místo.

[1] Celé McCayovo sdělení jsme zařadili jako ilustraci uzavírající tuto kapitolu.

McCayovu konstrukci pomocné kružnice popíšeme tak, aby sloužila k důkazu vnitřního dotyku výše zmíněných kružnic (I, r) a $(N, \frac{1}{2}R)$ pro každý trojúhelník ABC s vlastností $|AC| \neq |BC|$.[2] Jak uvidíme z ilustrací této konstrukce pro různé typy trojúhelníků ABC, McCayovy úvahy o dvou sestrojených tětivách jsou korektní pouze za určitých předpokladů na velikost úhlu ACB (viz Poznámku 3 pod čarou). Na nutnost provedení analogických důkazů pro další případy v textu alespoň upozorníme. V další části kapitoly pak sami ukážeme, že vhodnou obdobu McCayovy konstrukce lze využít i k důkazu Feuerbachovy věty pro kružnice připsané (o kterých není v [MCa] žádná zmínka).

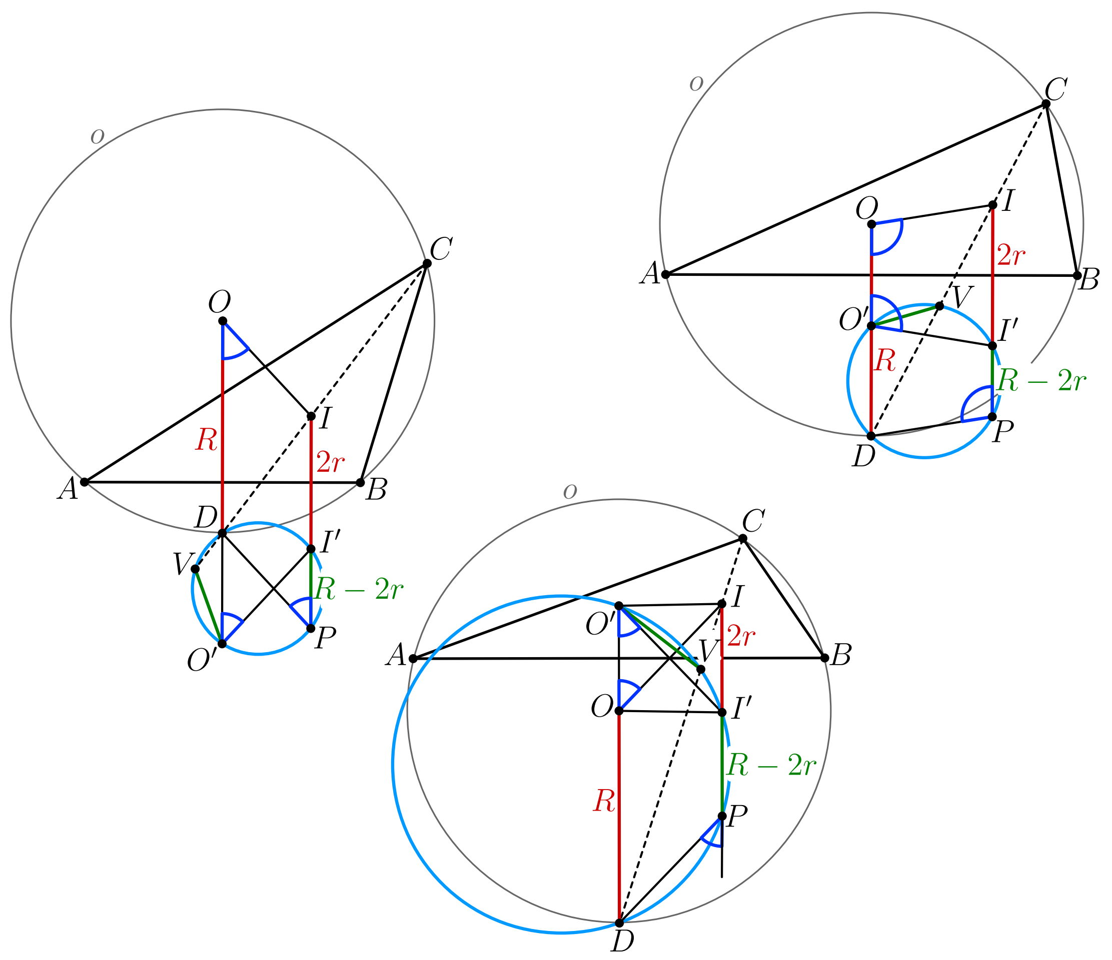
Pomocná kružnice a její dvě tětivy

Jistě můžeme předpokládat, že v uvažovaném trojúhelníku ABC platí $|AC| > |BC|$. Ke konstrukci (ilustrovanou dále obrázkem v trojím provedení) využijeme střed O kružnice opsané $o = (O, R)$, její průsečík D s osou úhlu ACB, střed I kružnice vepsané (I, r) a jeho obraz I' v osové souměrnosti podle přímky AB.

Orientované úsečky OD, II' jsou zřejmě souhlasně rovnoběžné a druhá z nich díky předpokladu $|AC| > |BC|$ leží uvnitř stejné poloroviny s hraniční přímkou OD jako vrcholy B a C. Navíc podle Eulerovy nerovnosti (viz Lemma 14.6) platí $|II'| = 2r < R$, takže úsečku II' můžeme prodloužit za bod I' do úsečky IP délky R, jakou má delší úsečka OD. Dostaneme tak rovnoběžník $ODPI$, pro jehož bod I' na straně IP platí $|I'P| = R - 2r$. *Pomocnou kružnicí* (navrženou McCayem) budeme rozumět kružnici opsanou trojúhelníku DPI' (na obrázcích ji budeme vykreslovat modře). Její druhý průsečík s přímkou CD (různý od bodu D) budeme značit V. V následujícím odstavci dokážeme, že na této kružnici leží rovněž obraz O' středu O v osové souměrnosti podle přímky AB. Tím už bude určena dvojice tětiv $I'P$ a $O'V$, o kterých jsme psali úvodem (a které na obrázcích vykreslujeme zeleně).

Poznatek, že čtyři body D, P, I' a O' leží na jedné kružnici, dokážeme snadnou úvahou o úhlech spojených s rovnoběžníkem $ODPI$ a rovnoramenným lichoběžníkem o základnách OO' a II' (který v případě $O' = O$ degeneruje v rovnoramenný trojúhelník $OI'I$). K tomu je však zapotřebí rozlišit tři možná pořadí kolineárních bodů O, D a O'. Pro každé z nich jsme na příslušném obrázku na další straně vyznačili modrými obloučky trojici úhlů. Dokazovaný poznatek vždy prokazují vyznačené úhly s vrcholy P a O' – každý z nich je totiž shodný s třetím vyznačeným úhlem.

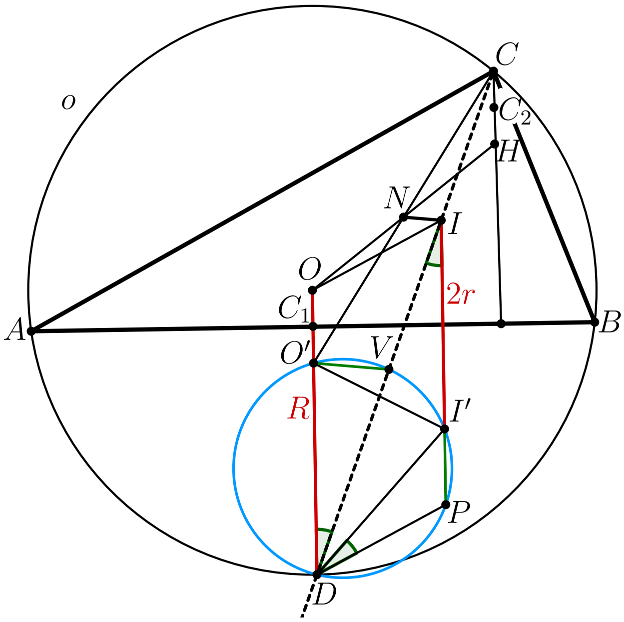
[2] V případě $|AC| = |BC|$ je tvrzení o dotyku těchto dvou kružnic triviální.



Potřebné vlastnosti druhé tětivy

Jak jsme popsali v úvodu k této kapitole, stojíme nyní před úkolem dokázat, že sestrojená tětiva $O'V$ splňuje rovnosti $|O'V| = |I'P|$ a $|O'V| = 2\cdot|NI|$. K provedení obou důkazů si vybereme ten ze tří výše rozlišených případů, kdy bod O' leží na úsečce OD, důkazy pro zbylé dva případy jsou analogické.[3] Příslušný obrázek doplníme o střed N kružnice devíti bodů, střed C_1 strany AB, o výšku z vrcholu C z vyznačeným ortocentrem H a středem C_2 úsečky HC.

[3]Vybraný případ (jediný, který McCay uvažoval) nastane, pokud velikost úhlu ACB leží mezi hodnotami 60° a 90°. Existují však trojúhelníky, u kterých žádný ze tří vnitřních úhlů tuto podmínku nesplňuje. Příkladem je trojúhelník s vnitřními úhly velikosti 120°, 40° a 20°.



K důkazu rovnosti $|O'V| = |I'P|$ využijeme trojici úhlů, které jsou na obrázku vyznačeny zeleně a o kterých ukážeme, že jsou shodné. Pro dva z nich, totiž střídavé úhly PID a ODI, to plyne z rovnoběžníku $ODPI$. Jeho konstrukce ve spojení s Eulerovým vzorcem pro vzdálenost středů O, I (viz Lemma 14.6) vede k rovnostem

$$|DP|^2 = |OI|^2 = R(R-2r) = |IP| \cdot |I'P|,$$

odkud plyne $|IP|/|DP| = |DP|/|I'P|$. To znamená, že trojúhelníky IDP a $DI'P$ se společným úhlem u vrcholu P jsou podobné podle věty *sus*. Proto také úhly PID a PDI' jsou shodné. Dohromady je shodnost tří vyznačených úhlů dokázána, tudíž kýžená shodnost tětiv $O'V$ a $I'P$ pomocné kružnice plyne ze shodnosti obvodových úhlů $O'DV$ a $I'DP$.

Rovnost $|O'V| = 2 \cdot |NI|$ získáme zjištěním, že úsečka NI je střední příčkou trojúhelníku $CO'V$. Stačí tak ověřit, že N je střed úsečky CO' a I střed úsečky CV.

▷ Tvrzení o středu úsečky CO' dokážeme užitím Lemmatu 14.1(ii) o tom, že bod N je společným středem úseček OH a C_1C_2. Tudíž OC_1HC_2 je rovnoběžník, takže $|OC_1| = |HC_2| = \frac{1}{2}|HC|$, odkud porovnáním s $|OC_1| = \frac{1}{2}|OO'|$ dostáváme $|HC| = |OO'|$. Proto také $OO'HC$ je rovnoběžník, tudíž střed N jeho úhlopříčky OH je rovněž středem druhé úhlopříčky CO', jak jsme měli ukázat.

▷ K důkazu tvrzení o středu úsečky CV využijeme mocnosti bodu I k pomocné kružnici zavedené v předchozí části textu. Ta nás spolu s rovnostmi $|II'| = 2r$, $|IP| = R$ a Lemmatem 14.5 přivádí k rovnostem

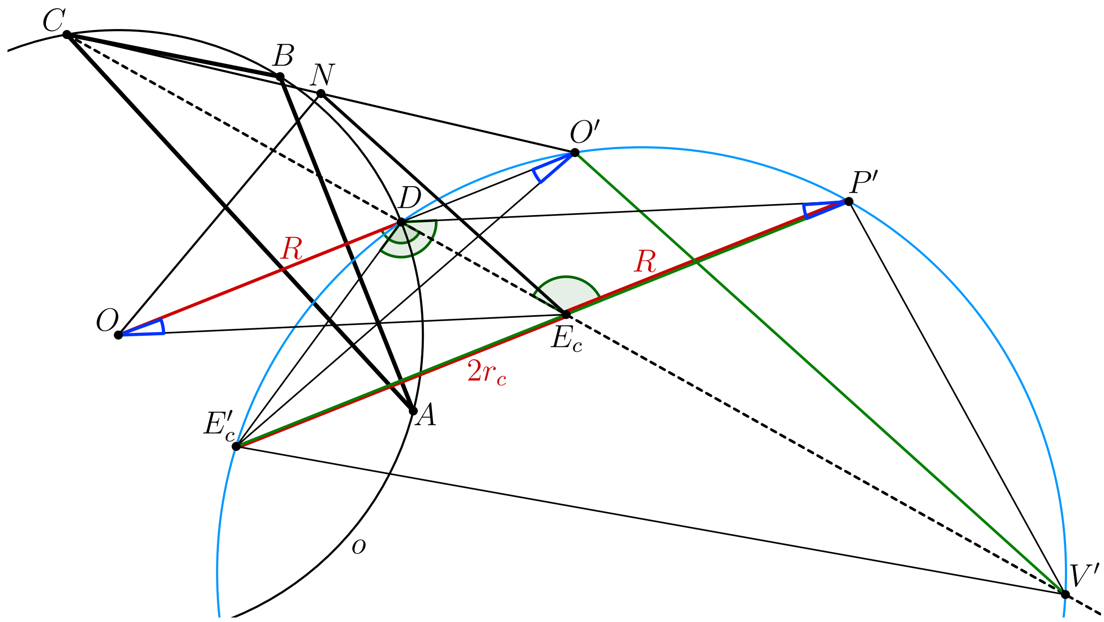
$$|IV| \cdot |ID| = |II'| \cdot |IP| = 2Rr = |IC| \cdot |ID|.$$

Z rovnosti krajních součinů plyne $|IV| = |IC|$, tudíž bod I je skutečně středem úsečky CV.
Tím je celý výklad McCayova důkazu hotov.

Postup pro kružnici připsanou

Jak jsme slíbili úvodem, přejdeme nyní k důkazu vnějšího dotyku kružnice devíti bodů $(N, \frac{1}{2}R)$ s kružnicí (E_c, r_c) připsanou straně AB daného trojúhelníku ABC. Budeme jako dříve předpokládat, že platí $|AC| > |BC|$, a navrhneme nejdříve konstrukci pomocné kružnice, která bude analogií McCayovy konstrukce pro kružnici vepsanou. Tentokrát ji však ilustrujeme pouze pro jeden ze tří možných případů, ke kterému pak podáme i patřičný důkaz.

Ke konstrukci využijeme střed O kružnice opsané $o = (O, R)$, její průsečík D s osou úhlu ACB, střed E_c kružnice (E_c, r_c) připsané straně AB a jeho obraz E'_c v osové souměrnosti podle přímky AB.



Orientované úsečky OD, $E_cE'_c$ jsou zřejmě nesouhlasně rovnoběžné a druhá z nich díky předpokladu $|AC| > |BC|$ leží v opačné polorovině s hraniční přímkou OD než vrcholy B a C. Úsečku E'_cE_c můžeme prodloužit za bod E_c do úsečky E_cP' délky R. Dostaneme tak rovnoběžník $ODP'E_c$. Pro bod E'_c na prodloužení strany $P'E_c$ platí $|E'_cP'| = R + 2r_c$. *Pomocnou kružnicí* budeme rozumět kružnici opsanou trojúhelníku $DP'E'_c$ (na obrázku vykreslenou modře). Její druhý průsečík s přímkou CD (různý od bodu D) budeme značit V'. V následujícím odstavci ještě ukážeme, že na této kružnici leží rovněž obraz O' středu O v osové souměrnosti podle přímky AB. Tím už bude určena dvojice tětiv $E_c'P'$ a $O'V'$, na obrázku vykreslených zeleně.

Poznatek, že čtyři body D, P', E_c' a O' leží na jedné kružnici, dokážeme snadnou úvahou o úhlech spojených s rovnoběžníkem $ODP'E_c$ a rovnoramenným lichoběžníkem o základnách OO' a $E_c'E_c$. Jak už jsme dříve předeslali, tentokráte z trojice možných pořadí kolineárních bodů O, D a O' jsme pořídili obrázek jen pro případ, kdy bod O' leží na prodloužení úsečky OD za bod D. Ze shodnosti tří úhlů vyznačených modrými obloučky plyne, že bod O' skutečně leží na pomocné kružnici.

Jelikož vnější dotyk uvažovaných kružnic $(N, \frac{1}{2}R)$ a (E_c, r_c) je ekvivalentní s rovností $|NE_c| = \frac{1}{2}R + r_c$, s ohledem na $|E_c'P'| = R + 2r_c$ stačí nyní dokázat, že sestrojená tětiva $O'V'$ splňuje rovnosti $|O'V'| = |E_c'P'|$ a $|O'V'| = 2 \cdot |NE_c|$.

• Důkaz rovnosti $|O'V'| = |E_c'P'|$ provedeme pomocí trojice úhlů, které jsou na obrázku vyznačeny zeleně a o kterých ukážeme, že jsou shodné. Úhly $P'E_cD$ a ODE_c jsou střídavé úhly v rovnoběžníku $ODP'E_c$, jsou tedy shodné. Konstrukce tohoto rovnoběžníku ve spojení se vzorcem pro vzdálenost středů O, E_c (viz Lemma 14.6) vede k rovnostem

$$|DP'|^2 = |OE_c|^2 = R(R + 2r_c) = |E_cP'| \cdot |E_c'P'|.$$

Platí tedy $|E_cP'|/|DP'| = |DP'|/|E_c'P'|$, což ukazuje, že trojúhelníky E_cDP' a $DE_c'P'$ se společným úhlem u vrcholu P' jsou podle věty *sus* podobné. Tudíž rovněž zeleně vyznačené úhly $P'E_cD$ a $P'DE_c'$ jsou shodné. Dohromady dostáváme:

$$|\sphericalangle O'DV'| = |\sphericalangle O'DE_c| = 180° - |\sphericalangle ODE_c| = 180° - |\sphericalangle P'DE_c'| = |\sphericalangle E_c'V'P'|,$$

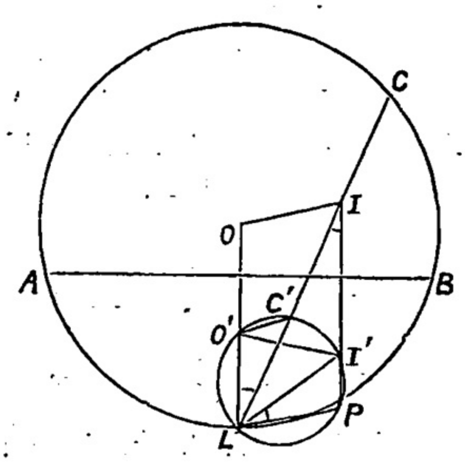
tedy tětivy $O'V'$ a $E_c'P'$ pomocné kružnice jsou skutečně shodné.

• Rovnost $|O'V'| = 2 \cdot |NE_c|$ plyne z trojúhelníku $CV'O'$, protože úsečka NE_c je jeho střední příčkou. Jak již z této kapitoly víme, bod N je střed úsečky CO' a to, že bod E_c je střed úsečky CV', nyní odvodíme z mocnosti bodu E_c k pomocné kružnici a z Lemmatu 14.5:

$$|E_cV'| \cdot |E_cD| = |E_cE_c'| \cdot |E_cP'| = 2r_cR = |E_cC| \cdot |E_cD|, \quad \text{odkud} \quad |E_cV'| = |E_cC|.$$

Tím je celý výklad našeho důkazu hotov. Na další stránce připojujeme slíbený sken původního McCayova příspěvku [MCa].

Proof of Feurbach's Theorem. *By* W. S. McCay, M.A.



Let O, I be the circumcentre and incentre of ABC; L the lowest point of the circumcircle; O′, I′ the reflexions of O, I below AB.

Describe a circle through LO′I′ cutting II′ in P and CIL in C′. Then O′C′ is equal and parallel to 2NI when N is the nine-point centre and its magnitude is R−2*r*.

The figure OP is a parallelogram by symmetry, and IP = R, PI′ = R−2*r*, LP = OI = D. From the relation D² = R(R−2*r*) we see that the triangles ILP, LI′P are similar; hence PLI′ = PIL = O′LC′, therefore O′C′ = PI′ = R−2*r*. Also IC′.IL = IP . II′ (by the small circle) = 2R*r* = IC . IL, therefore IC′ = IC. I is then the middle point of CC′ and N the middle point of CO′ (for, if H be the orthocentre, COO′H is a parallelogram, and N is middle point of OH). We see that NI = ½O′C′ = ½R−*r*, and therefore the circles touch.

Kapitola 6

Důkazy konstrukcemi bodů dotyku 1

Metodu, které se budeme věnovat v této a následující kapitole, lze charakterizovat následovně. Pro obecný trojúhelník mají čtyři body dotyku, o jejichž existenci pojednává Feuerbachova věta, takovou polohu, že je lze lokalizovat vhodnými nepřímými konstrukcemi.[1] V této kapitole popíšeme nejznámější a přitom na první pohled dosti překvapivou konstrukci a její správnost doložíme dvěma různými důkazy. Dalším dvěma konstrukcím se pak budeme věnovat v následující kapitole 7.

Podle nám dostupných zdrojů se domníváme, že zmíněná první konstrukce byla poprvé zveřejněna J. Youngem, a to v zadání úlohy, která pod číslem 9728 vyšla roku 1888 v rubrice časopisu *The Educational Times*.[2] Pro zajímavost vysázíme její prezentaci v původní podobě.

> **9728.** (J. Young, M. A.) – Prove that the nine-point circle and the in-circle touch each other and that the point of contact is in the production of the line joining the mid-point of the base with the point of contact of the tangent to the in-circle drawn from the point where the internal bisector of the vertical angle cuts the base.

Dodejme, že autor Young uzavírá stručný nástin svého řešení této úlohy (o kružnici vepsané) konstatováním, že obdobná konstrukce funguje také pro kružnici připsanou. Podrobnější verze tohoto důkazu lze najít jak ve starších knihách [M'Cl, str. 225–226] z roku 1891 a [Lac, str. 74] z roku 1893, tak v novější proslulé knize *Modern Geometry* autora Rogera A. Johnsona z roku 1929.[3] Odlišný důkaz správnosti Youngovy

[1] Přívlastkem „nepřímými“ vyjadřujeme ten fakt, že jsme v literatuře nenašli žádný důkaz Feuerbachovy věty, ve kterém by pro dvě uvažované kružnice se středy na přímce p byl za kandidáta na bod jejich dotyku vybrán průsečík jedné z obou kružnic právě s přímkou p. Ve všech třech nám známých konstrukcích je tato „středová“ přímka p nahrazena jinou.

[2] Přetisk zadání úlohy spolu s řešením jejího navrhovatele J. Younga jsme nalezli ve sborníku *Mathematical Questions nad Solutions, from the E. T.*, roč. 51, Londýn, 1889, str. 58–59.

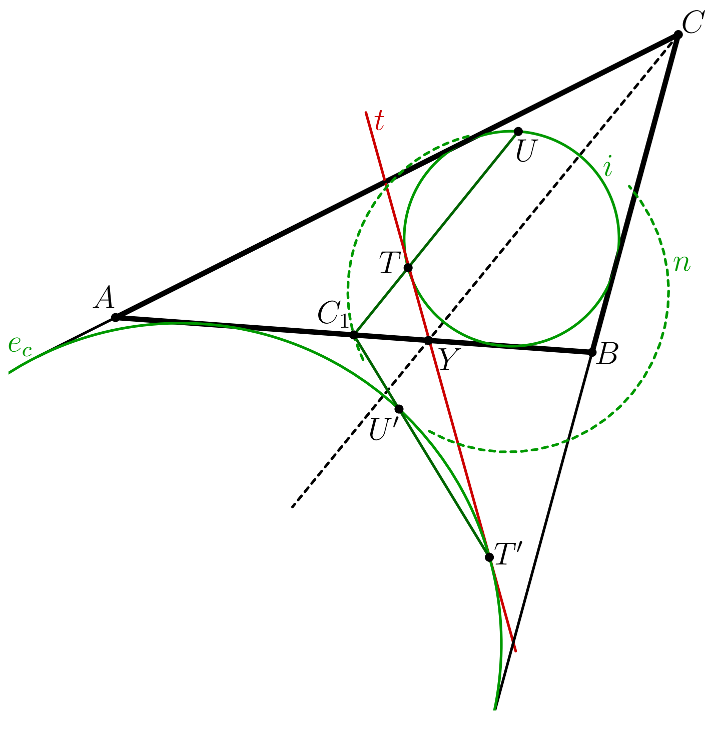
[3] V seznamu užité literatury ji uvádíme jako knihu [Joh] v nezměněném vydání z roku 1960 s novým výstižnějším názvem *Advanced Euclidean Geometry*. Zmíněný důkaz je v této dodnes užívané a často citované knize uveden na str. 201–202.

konstrukce je podán v uznávané učebnici *College Geometry*, prvně vydané roku 1952 (viz [Alt, str. 105–107][4]). Protože jsme žádnou informaci o původu tohoto alternativního postupu nenašli, nazveme ho níže Altshillerovým důkazem.

Další výklad v této kapitole zahájíme ilustrovaným popisem samotné Youngovy konstrukce, doplněným Poznámkou 1 o tom, jak na tuto konstrukci můžeme v dnešní době pohlížet. Následovat bude rozhodující část textu této kapitoly – nejprve Youngův a poté Alshillerův důkaz kýženého tvrzení, že výsledné body konstrukce jsou skutečně body dotyku kružnic z Feuerbachovy věty. Oba důkazy pak v závěrečné Poznámce 2 stručně porovnáme.

Youngova konstrukce

V této části textu popíšeme pouze (dle zadání Youngovy úlohy) konstrukci jistého bodu U na kružnici i vepsané danému trojúhelníku ABC, společně s analogickou konstrukcí jistého bodu U' na kružnici e_c připsané straně AB. Obě konstrukce přitom zakreslíme do jednoho obrázku i s kružnicí n devíti bodů, kterou však k sestrojení bodů U, U' vůbec nevyužijeme. Protože tyto body budou kandidáty na body dotyku kružnic i, e_c s kružnicí n, stačí se jejich konstrukcí zabývat v netriviálním případě, kdy $|AC| \neq |BC|$.



Provedená konstrukce vychází z toho, že přímka AB je v případě $|AC| \neq |BC|$ jednou ze dvou společných vnitřních tečen kružnice i a e_c, přitom obě z nich procházejí

[4]Autorem tohoto díla je americký matematik polského původu Nathan Altshiller-Court (1881–1968). V našem textu se odkazujeme na druhé revidované a rozšířené vydání, které v roce 1980 připravil syn Arnold Court.

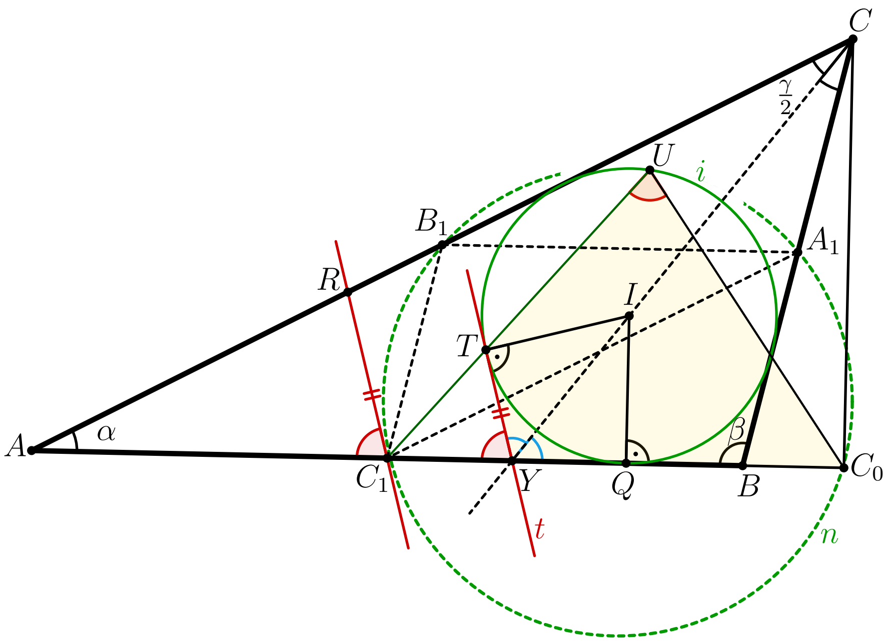
průsečíkem Y strany AB s osou vnitřního úhlu ACB. Veďme tedy bodem Y druhou z těchto tečen. Označme ji t a T, T' body jejího dotyku s kružnicemi i, resp. e_c. Celou konstrukci dokončíme tak, že sestrojíme střed C_1 strany AB a poté určíme bod U jako druhý průsečík polopřímky C_1T s kružnicí i ($U \neq T$); obdobně za bod U' prohlásíme druhý průsečík polopřímky C_1T' s kružnicí e_c ($U' \neq T'$).

Poznámka 1. Smysl a správnost Youngových konstrukcí plynou bezprostředně z důkazu Feuerbachovy věty užitím kruhové inverze, který patrně nebyl Youngovi znám a kterému se budeme věnovat v kapitole 12. Dokážeme tam, že pokud v trojúhelníku ABC platí $|AC| \neq |BC|$, pak bod C_1 je středem takové kruhové inverze, ve které jsou samodružné obě kružnice i a e_c a ve které se jejich (vedle přímka AB druhá) vnitřní společná tečna t zobrazí na kružnici n. Tato kružnice se proto obou zmíněných samodružných kružnic skutečně dotýká, jak se tvrdí ve Feuerbachově větě. Nyní je jasné, že body obou těchto dotyků (o kterých se v kapitole 12 vůbec zmiňovat nebudeme) musí být obrazy bodů T a T' v užité kruhové inverzi. Aniž o ní máme ponětí, můžeme pomocí polopřímek C_1T, C_1T' tyto body dotyku U, U' snadno sestrojit, jak se zřejmě jinou cestou dovtípil J. Young.

Jak jsme slíbili úvodem kapitoly, doplněným o odkazy na literaturu, podáme nyní dva důkazy správnosti Youngovy konstrukce: Dvěma odlišnými postupy ověříme, že oba body U a U' z Youngovy konstrukce leží na kružnici n (jak obrázek ke konstrukci napovídá) a že to jsou body jejího dotyku po řadě s kružnicemi i a e_c. Feuerbachova věta tak bude dokázána dalšími dvěma způsoby. S ohledem na symetrii budeme v obou důkazech předpokládat, že výchozí podmínka $|AC| \neq |BC|$, kterou jsme při popisu Youngovy konstrukce předpokládali, je splněna jako $|AC| > |BC|$. S výkladem prvního důkazu bude výhodné započít na nové stránce.

Youngův důkaz

V **první části** podáme důkaz očekávaných vlastností bodu U na kružnici i. Jeho konstrukci užitím tečny $t = YT$ a polopřímky C_1T doplníme na novém obrázku níže nejprve o výšku CC_0 s patou C_0 na kružnici n a poloměr IQ kružnice i s bodem Q na straně AB. Kromě toho standardně označíme úhly α, β a $\frac{1}{2}\gamma$ u vrcholů A, B, resp. C. Zdůrazněme, že z předpokladu $|AC| > |BC|$ plyne $\beta > \alpha$ a že (A, C_1, Y, Q, C_0) je pořadí bodů na polopřímce AB.



Z trojúhelníku ACY máme $|\sphericalangle CYQ| = \alpha + \frac{1}{2}\gamma$, takže díky souměrnosti dvojice úseček YT a YQ platí $|\sphericalangle TYQ| = 2|\sphericalangle CYQ| = 2\alpha + \gamma$, odkud

$$|\sphericalangle TYA| = 180° - |\sphericalangle TYQ| = (\alpha + \beta + \gamma) - (2\alpha + \gamma) = \beta - \alpha.$$

Z mocnosti bodu C_1 ke kružnici i a Lemmatu 14.3 plyne

$$|C_1T| \cdot |C_1U| = |C_1Q|^2 = |C_1Y| \cdot |C_1C_0|.$$

Rovnost krajních součinů s ohledem na pořadí (C_1, T, U) a (C_1, Y, C_0) kolineárních trojic bodů znamená, že na obrázku podbarvený čtyřúhelník $UTYC_0$ je tětivový. To spolu s výše určeným úhlem TYA znamená, že

$$|\sphericalangle C_0UC_1| = |\sphericalangle C_0UT| = 180° - |\sphericalangle TYC_0| = |\sphericalangle TYA| = \beta - \alpha.$$

Konečně uvážíme, že kružnice n prochází nejen body C_1 a C_0, ale také středy A_1, B_1 po řadě stran BC, CA. Průsečík její tečny v bodě C_1 s přímkou AC je na obrázku označen R. Z vlastností příčkového trojúhelníku $A_1B_1C_1$ plynou rovnosti $|\sphericalangle B_1C_1A| =$

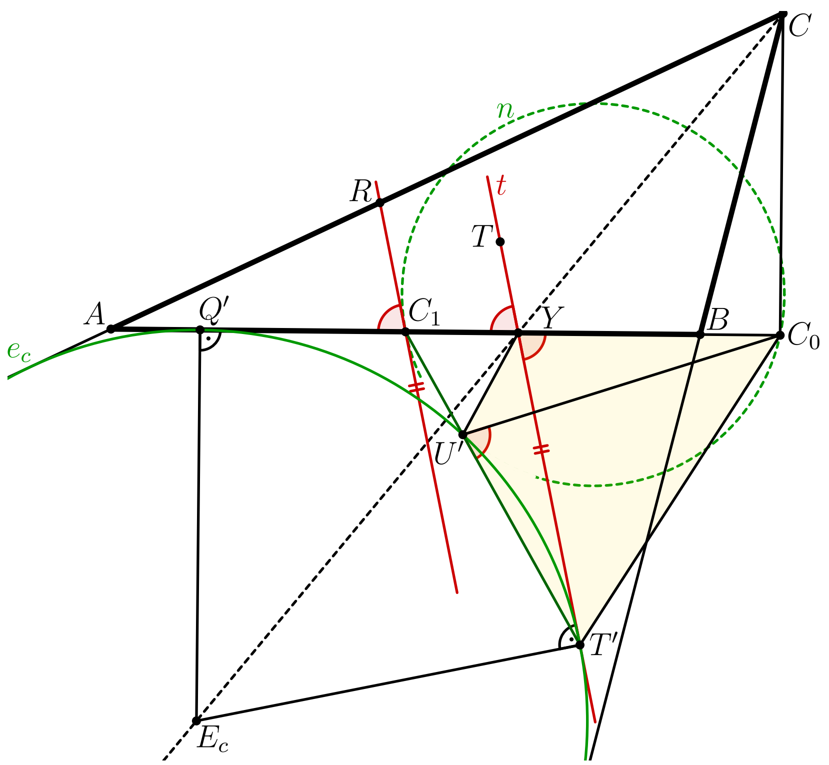
$= \beta$ a $|\sphericalangle C_1A_1B_1| = \alpha$. Druhá z nich podle věty o úsekovém úhlu znamená, že také $|\sphericalangle B_1C_1R| = \alpha$. Nerovnost $\beta > \alpha$ zapsaná $|\sphericalangle B_1C_1A| > |\sphericalangle B_1C_1R|$ proto vede k závěru, že bod R leží mezi body A, B_1 a platí

$$|\sphericalangle RC_1A| = |\sphericalangle B_1C_1A| - |\sphericalangle B_1C_1R| = \beta - \alpha.$$

Zjistili jsme, že všechny tři úhly RC_1A, C_0UC_1 a TYA mají stejnou velikost (rovnu $\beta - \alpha$). To předně znamená, že tečny YT a C_1R jsou rovnoběžné. Navíc ze shodnosti úhlů RC_1A a C_0UC_1 podle věty o úsekovém úhlu plyne, že bod U na kružnici i je rovněž bodem kružnice n.

Nakonec uvážíme stejnolehlost se středem U a koeficientem větším než 1, při které se bod T zobrazí do bodu C_1. Obrazem kružnice i pak bude kružnice, která prochází body U, C_1 a která má v bodě C_1 za tečnu přímku rovnoběžnou s přímkou YT, tj. přímku C_1R. Kružnice, která tyto podmínky splňuje, je ovšem jediná – její střed totiž musí ležet jak na ose úsečky C_1U, tak na kolmici k přímce C_1R vedené bodem C_1. Podle předchozího odstavce je touto kružnicí kružnice n, která má proto s kružnicí i vnitřní dotyk právě v bodě U. První část důkazu je hotova.

V **druhé části** podáme důkaz očekávaných vlastností bodu U' na kružnici e_c. Konstrukci bodu U' užitím tečny $t = YT'$ (na níž vyznačíme i bod T jejího dotyku s kružnicí i) a polopřímky C_1T' doplníme na novém obrázku o výšku CC_0, poloměr E_cQ' kružnice e_c s bodem Q' na straně AB, kružnici n procházející body C_1, C_0 a její tečnu RC_1 v bodě C_1, pro kterou podle první části důkazu platí $RC_1 \parallel t$.



Lemma 14.3 spolu s mocností bodu C_1 vzhledem ke kružnici e_c vedou k rovnostem

$$|C_1U'| \cdot |C_1T'| = |C_1Q'|^2 = |C_1Y| \cdot |C_1C_0|,$$

z nichž s ohledem na pořadí (C_1, U', T') a (C_1, Y, C_0) kolineárních trojic bodů plyne, že na obrázku podbarvený čtyřúhelník $YU'T'C_0$ je tětivový. Spolu s relací $RC_1 \parallel t$ tak pro úsekový úhel RC_1A kružnice n dostáváme

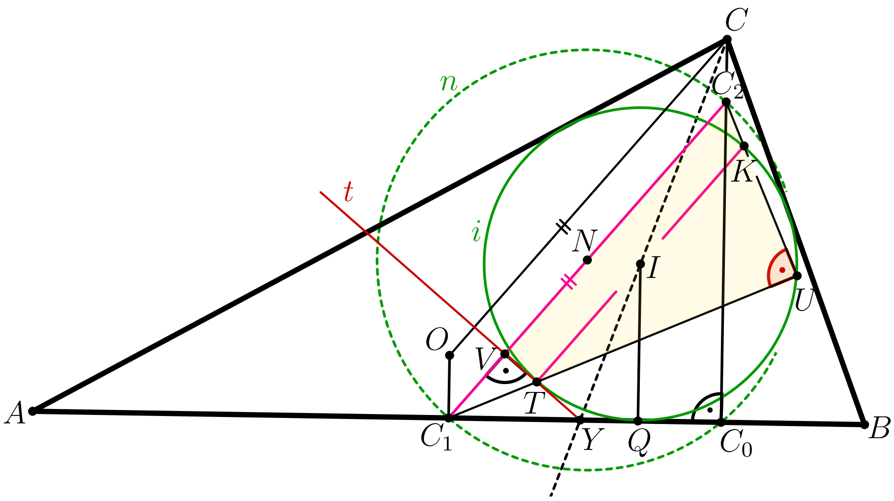
$$|\sphericalangle RC_1A| = |\sphericalangle TYC_1| = |\sphericalangle C_0YT'| = |\sphericalangle C_0U'T'| = 180^\circ - |\sphericalangle C_0U'C_1|,$$

a proto bod U' leží na obou kružnicích e_c a n. K dokončení důkazu tak stačí uvážit stejnolehlost se středem U' a záporným koeficientem, při které se bod T' zobrazí na C_1, a tudíž tečna t kružnice e_c se zobrazí na tečnu RC_1 kružnice n. (Úvahy obdobné těm z první části důkazu opakovat nebudeme.) Docházíme tak k potřebnému závěru o vnějším dotyku kružnic n, e_c právě v bodě U'. Tím je druhá část, a tedy i celý Youngův důkaz ukončen.

Altshillerův důkaz

Jako v Youngově důkazu odvodíme za předpokladu $|AC| > |BC|$ správnost jeho konstrukce bodů U a U', ve kterých se kružnice n dotýká po řadě kružnic i a e_c.

V **první části** důkazu se budeme věnovat bodu U na kružnici i. K jeho Youngově konstrukci užitím tečny $t = YT$ a polopřímky C_1T do nového obrázku přikreslíme poloměr OC kružnice opsané, poloměr IQ kružnice i s bodem Q na straně AB, výšku CC_0 s patou C_0 a Eulerovým bodem C_2 na kružnici n se středem N, průsečík V přímek YT, C_1C_2 a první průsečík K polopřímky C_2U s kružnicí i (druhý průsečík je bod U).



Nejprve zdůvodníme oba vztahy $C_1C_2 \parallel OC$ a $|\sphericalangle TVC_1| = 90^\circ$ vyznačené na obrázku.[5] První z nich je důsledkem Lemmatu 14.1(ii), podle kterého C_1C_2 je průměrem

[5] Na obrázku je ještě barevně vyznačeno, že také $|\sphericalangle C_2UT| = 90^\circ$. K tomuto klíčovému závěru bude náš další postup směřovat.

kružnice n a pro její poloměr NC_1 platí $NC_1 \parallel OC_1$. Podle Lemmatu 14.1(iii) je osa úhlu OCC_0 totožná s osou úhlu ACB, která zřejmě půlí i úhel QYT. Podle této osy je souměrná jak dvojice přímek YQ a YT, tak dvojice přímek C_0C a OC. Díky $YQ \perp C_0C$ proto platí rovněž $YT \perp OC$, což spolu s již ověřeným vztahem $C_1C_2 \parallel OC$ vede k $YT \perp C_1C_2$. Tím je i druhý vztah $|\sphericalangle TVC_1| = 90°$ dokázán.

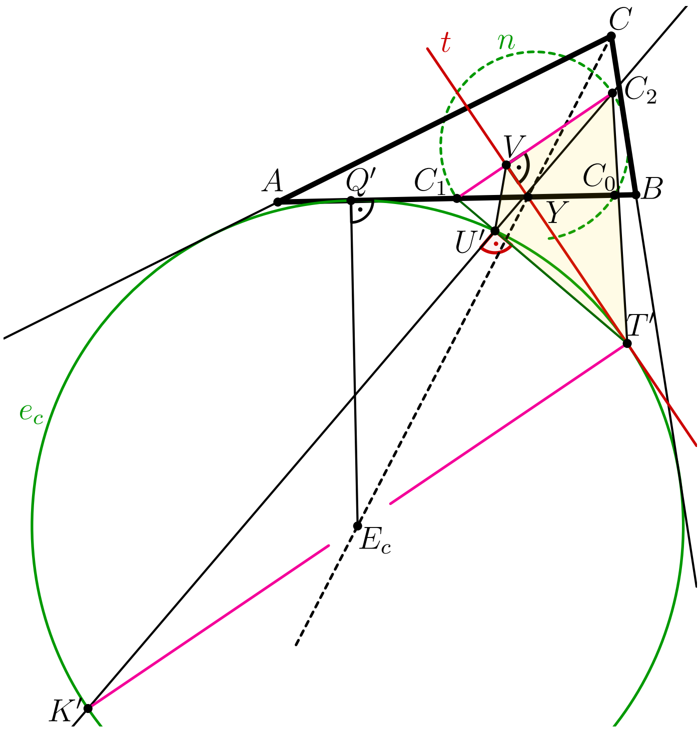
Nyní už můžeme využít podobnost pravoúhlých trojúhelníků $C_1C_0C_2$ a C_1VY, díky které platí

$$\frac{|C_1C_2|}{|C_1C_0|} = \frac{|C_1Y|}{|C_1V|}, \quad \text{odkud} \quad |C_1V| \cdot |C_1C_2| = |C_1Y| \cdot |C_1C_0|. \tag{6.1}$$

Pravá strana rovnosti (6.1) je podle Lemmatu 14.3 rovna hodnotě $|C_1Q|^2$. Z mocnosti bodu C_1 ke kružnici i plyne, že stejnou hodnotu $|C_1Q|^2$ má i součin $|C_1T| \cdot |C_1U|$. Proto v důsledku (6.1) platí rovnost $|C_1V| \cdot |C_1C_2| = |C_1T| \cdot |C_1U|$, která s ohledem na pořadí (C_1, V, C_2) a (C_1, T, U) kolineárních trojic bodů znamená, že na obrázku podbarvený čtyřúhelník C_2VTU je tětivový. V něm jak víme je úhel C_2VT je pravý, proto je pravý i protější úhel C_2UT neboli úhel C_2UC_1 (vyznačený barevně). Díky němu tak bod U leží na kružnici nad průměrem C_1C_2, tj. na kružnici n. Je tedy společným bodem obou kružnic i a n. Zbývá vysvětlit, proč je to bod jejich vnitřního dotyku.

Jelikož bod T leží na úsečce C_1U a bod K na úsečce C_2U, máme $|\sphericalangle TUK| = 90°$, což ukazuje, že bod U leží na kružnici nad průměrem TK. Body T, U, K však leží na kružnici i, tudíž úsečka TK je jejím průměrem, kolmým k její tečně t s bodem dotyku T. Nyní z $C_1C_2 \perp t$ a $TK \perp t$ plyne, že průměr C_1C_2 kružnice n je rovnoběžný s průměrem TK kružnice i, takže obě kružnice jsou stejnolehlé podle středu U a mají v něm vnitřní dotyk. Tím je první část Altshillerova důkazu ukončena. Celou její druhou část i s obrázkem uvedeme na další straně.

V **druhé části** důkazu se budeme věnovat bodu U' na kružnici e_c připsané straně AB. K jeho Youngově konstrukci užitím bodů Y, T' a C_1 do nového obrázku přikreslíme poloměr E_cQ' kružnice e_c s bodem Q' na straně AB, kružnici n s body C_0, C_2 a druhý průsečík K' přímky C_2U' s kružnicí e_c. Využijeme rovněž průsečík V přímek YT' a C_1C_2, které jsou podle první části důkazu navzájem kolmé.



Bod V jak víme splňuje rovnost $|C_1V| \cdot |C_1C_2| = |C_1Y| \cdot |C_1C_0|$, označenou výše jako (6.1). Její pravá strana je podle Lemmatu 14.3 rovna hodnotě $|C_1Q'|^2$. Z mocnosti bodu C_1 ke kružnici e_c plyne, že stejnou hodnotu $|C_1Q'|^2$ má i součin $|C_1T'| \cdot |C_1U'|$. Dohromady dostáváme rovnost $|C_1V| \cdot |C_1C_2| = |C_1T'| \cdot |C_1U'|$, která s ohledem na pořadí (C_1, V, C_2) a (C_1, U', T') kolineárních trojic bodů znamená, že na obrázku podbarvený čtyřúhelník $C_2VU'T'$ je tětivový. V něm je jak víme úhel C_2VT' pravý, takže je pravý i úhel $C_2U'T'$, a proto bod U' je průsečíkem dvou navzájem kolmých úseček C_1T' a C_2K' (jak je na obrázku barevně vyznačeno). Tento poznatek má dva důsledky:

▷ Díky pravému úhlu $C_2U'C_1$ bod U' leží na kružnici nad průměrem C_1C_2, kterou je jak víme kružnice n. Bod U' je tedy společným bodem obou kružnic e_c a n.

▷ Díky pravému úhlu $T'U'K'$ leží bod U' na kružnici nad průměrem $T'K'$. Ovšem body T', U', K' leží na kružnici e_c, tudíž úsečka $T'K'$ je jejím průměrem, kolmým k její tečně t s bodem dotyku T'.

Nyní z $C_1C_2 \perp t$ a $T'K' \perp t$ plyne, že průměr C_1C_2 kružnice n je rovnoběžný s průměrem $T'K'$ kružnice e_c. Zároveň však bod T' leží na polopřímce opačné k $U'C_1$ a bod K' na polopřímce opačné k $U'C_2$, takže obě kružnice jsou stejnolehlé podle středu U' a mají v něm vnější dotyk. Tím je druhá část, a tedy i celý Altshillerův důkaz dokončen.

Poznámka 2. Srovnejme nyní dva podané důkazy správnosti Youngovy konstrukce. Je zajímavé, že oba postupy využívají *stejný* metrický vztah z Lemmatu 14.3 k nalezení dvou *různých* tětivových čtyřúhelníků (jak s vrcholem U, tak s vrcholem U'). Ty pak slouží v obou postupech k ověření, že zkoumané dvojice kružnic mají společný bod. Ten je pak navíc bodem jejich dotyku, neboť jde o střed jejich stejnolehlosti, a to na základě úvahy buď o stejnolehlých *tečnách* (Youngův důkaz) nebo o stejnolehlých *průměrech* (Altshillerův důkaz). Dodejme ještě, že další dvě konstrukce bodů dotyku z kapitoly 7 budou založeny na úvaze o stejnolehlých *poloměrech* zkoumaných kružnic. Kromě toho v kapitole 10 uvedeme důkaz Feuerbachovy věty užitím jiných dvojic rovnoběžných průměrů, při kterém nebudeme vycházet z lokalizace středů jejich stejnolehlosti.

Kapitola 7

Důkazy konstrukcemi bodů dotyku 2

Jak jsme slíbili v úvodním odstavci předchozí kapitoly, vyložíme nyní další dvě konstrukce, které nás přivedou ke dvěma novým důkazům Feuerbachovy věty. Obě konstrukce jsou založeny na stejné myšlence, která je jednodušší nežli u Youngovy konstrukce z kapitoly 6: *Dvě kružnice mohou mít dotyk pouze v bodě, který je jedním ze středů jejich stejnolehlosti. Tyto středy lze konstrukčně určit známým postupem, totiž užitím navzájem rovnoběžných poloměrů daných kružnic.*

První z obou důkazů, které v této kapitole uvedeme, lze najít v učebnici *Die Elemente der Mathematik* z roku 1883 ([Bal, str. 92–93]). Jak tam její autor Richard Baltzer poznamenává, dozvěděl se o tomto důkazu z dopisu, který mu zaslal v roce 1872 pan Binder z německé obce Schöntal (region Hohenlohe).[1] Druhou část této kapitoly věnujeme důkazu, který roku 1939 publikoval W. J. Dobbs v příspěvku [Dob] pro časopis *The Mathematical Gazette*. I když jsou (podle úvodního odstavce této kapitoly) Binderova a Dobbsova konstrukce velmi blízké, jednu významnou odlišnost zdůrazníme již nyní: Jak je patrné z ilustrací k oběma konstrukcím[2], Binder lokalizuje body dotyku na kružnici vepsané, resp. kružnici připsané, zatímco Dobbs je oba určuje na kružnici devíti bodů.

Ve výkladech obou konstrukcí a jejich důkazů se jistě stačí věnovat dotykovým bodům kružnice n devíti bodů s kružnicí i vepsanou a s kružnicí e_c připsanou straně AB, a to jen pro takové trojúhelníky ABC, ve kterých platí $|AC| \neq |BC|$. Při obou důkazech pak ze dvou navzájem symetrických situací posoudíme jen tu, kdy platí $|AC| > |BC|$.

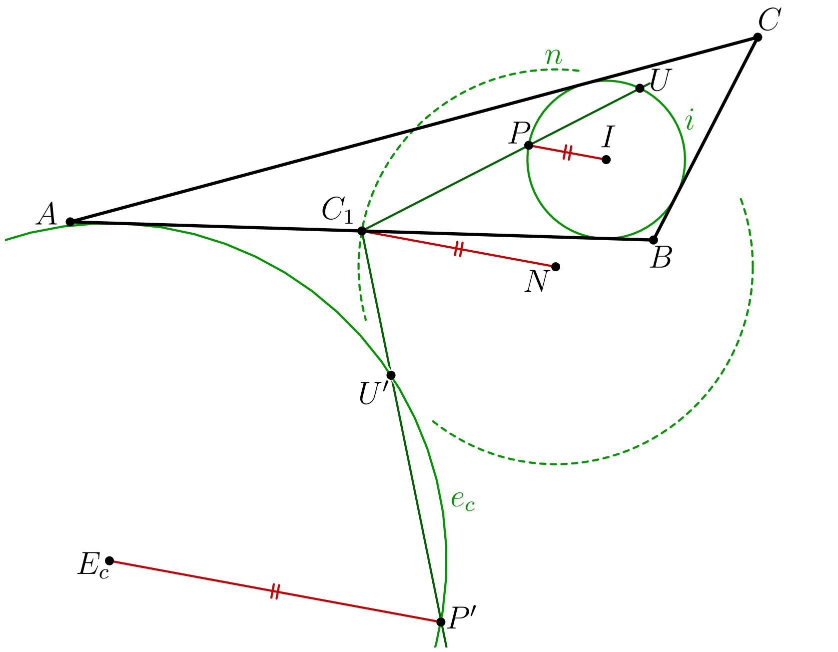
Binderova konstrukce

Nejprve sestrojíme poloměr NC_1 kružnice n určený středem C_1 strany AB. K němu pak sestrojíte souhlasně rovnoběžný poloměr IP kružnice i a nesouhlasně rovnoběžný poloměr E_cP' kružnice e_c. Nakonec určíme body U, U' kružnic i, resp. e_c jako jejich

[1] Informaci o tomto dopisu s Binderovým důkazem jsme původně získali z historického článku [Mac, str. 27].

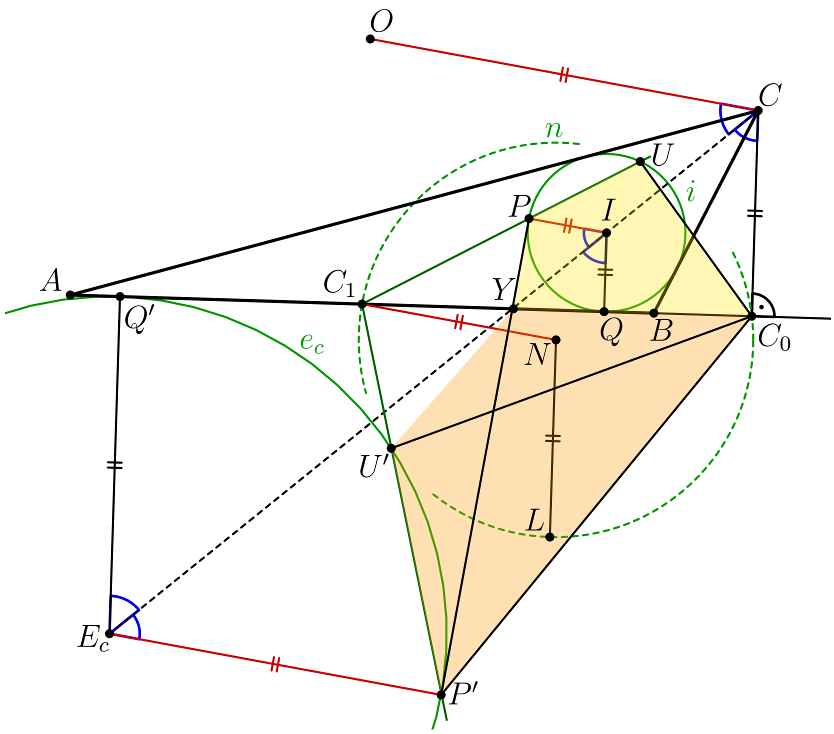
[2] Doporučujeme čtenáři porovnat oba obrázky už nyní.

průsečíky po řadě s polopřímkami C_1P, C_1P' (různé od bodů P, P').



Binderův důkaz

Nejprve popíšeme obrázek, kterým budeme celý výklad doprovázet.



Vyšli jsme z naší ilustrace k Binderově konstrukci bodů U a U', doplnili ji o další potřebné úsečky a vyznačili jejich rovnoběžnost. K novým úsečkám patří výška CC_0 s patou C_0 na kružnici n a poloměr OC kružnice opsané, který je nesouhlasně rovnoběžný s poloměrem NC_1 (Lemma 14.1(ii)). Dále to jsou s výškou CC_0 rovnoběžné poloměry IQ a E_cQ' kružnic i a e_c, kde Q a Q' značí body jejich dotyku se stranou AB, a také ten poloměr NL kružnice n, který je souhlasně rovnoběžný s poloměrem IQ. Vykreslíme i osu vnitřního úhlu ACB, jejíž úsek mezi body I a E_c protne stranu AB v bodě, který je označen Y. Zdůrazněme ještě, že díky předpokladu $|AC| > |BC|$ leží body Q', C_1, Y, Q, C_0 v tomto pořadí na přímce AB; shodnost úhlů vyznačených na obrázku modrými obloučky zdůvodníme v dalším výkladu.

Díky trojicím rovnoběžných poloměrů kružnic n, i, e_c platí

$$|\sphericalangle C_1NL| = |\sphericalangle PIQ| = |\sphericalangle P'E_cQ'|.$$

Kromě toho úhly PIQ a $P'E_cQ'$ mají ramena rovnoběžná s úhlem OCC_0, jehož osa ovšem splývá s osou CY úhlu ACB (Lemmma 14.1(iii)). Proto tato osa půlí rovněž oba úhly PIQ a $P'E_cQ'$, jak je na obrázku vyznačeno modrými obloučky. Odtud plyne, čtyřúhelníky $PYQI$ a $P'YQ'E_c$ jsou deltoidy souměrné podle přímky CY, tudíž pravé jsou nejen úhly IQY a $E_cQ'Y$, ale i IPY a $E_cP'Y$.[3] Pro zbylé vnitřní úhly obou deltoidů tak platí

$$|\sphericalangle PIQ| = 180^\circ - |\sphericalangle PYQ| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle P'YQ'| = 180^\circ - |\sphericalangle P'E_cQ'|.$$

Zbylý výklad rozdělíme na dvě části věnované každé z kružnic i a e_c.

- Z mocnosti bodu C_1 ke kružnici *vepsané* a Lemmatu 14.3 dostáváme

$$|C_1P| \cdot |C_1U| = |C_1Q|^2 = |C_1Y| \cdot |C_1C_0|.$$

Z rovnosti krajních součinů plyne, že na obrázku podbarvený čtyřúhelník PYC_0U je tětivový, odkud

$$|\sphericalangle C_1UC_0| = |\sphericalangle PUC_0| = 180^\circ - |\sphericalangle PYC_0| = 180^\circ - |\sphericalangle PYQ| = |\sphericalangle PIQ| = |\sphericalangle C_1NL|.$$

Uvažme nyní oblouk C_1LC_0 kružnice n. Jemu přísluší středový úhel, který má zřejmě velikost $2 \cdot |\sphericalangle C_1NL|$, takže jemu příslušné obvodové úhly mají velikost $|\sphericalangle C_1NL|$. Je to, jak už víme, i velikost úhlu C_1UC_0, jehož vrchol U přitom leží v polorovině opačné k C_1C_0L. Znamená to, že bod U, původně určený na kružnici i, leží rovněž na kružnici n. Protože navíc poloměry NC_1, IP jsou podle konstrukce souhlasně rovnoběžné, je společný bod U kružnic i, n (jakožto střed jejich vnější stejnolehlosti) bodem vnitřního dotyku těchto dvou kružnic.

[3]Zjistili jsme tak, že body P, P' z Binderovy konstrukce splývají s body T, T' z Youngovy konstrukce v kapitole 6. Přímka PP' je tak společnou vnitřní tečnou kružnic i, e_c procházející bodem Y (stejně jako přímka AB).

- Z mocnosti bodu C_1 ke kružnici *připsané* a z Lemmatu 14.3 dostáváme

$$|C_1U'| \cdot |C_1P'| = |C_1Q'|^2 = |C_1Y| \cdot |C_1C_0|.$$

Z rovnosti krajních součinů plyne, že na obrázku podbarvený čtyřúhelník $P'U'YC_0$ je tětivový, z čehož plyne

$$|\sphericalangle C_1U'C_0| = 180^\circ - |\sphericalangle P'U'C_0| = 180^\circ - |\sphericalangle P'YC_0| = |\sphericalangle P'YQ'| =$$

$$= 180^\circ - |\sphericalangle P'E_cQ'| = 180^\circ - |\sphericalangle C_1NL|.$$

Využijme nyní výhodně i bod U a všimněme si, že platí

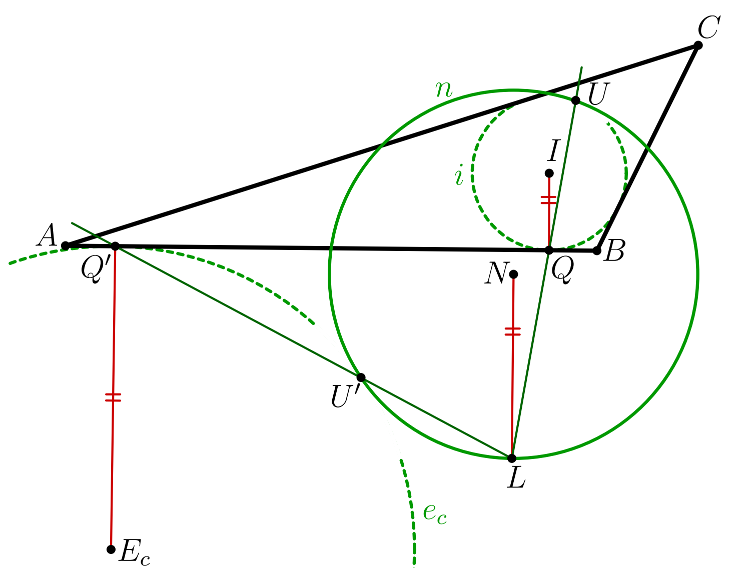
$$|\sphericalangle C_1UC_0| + |\sphericalangle C_1U'C_0| = |\sphericalangle C_1NL| + (180^\circ - |\sphericalangle C_1NL|) = 180^\circ.$$

Odtud plyne, že čtyřúhelník $C_1U'C_0U$ je tětivový. Kružnice n je, jak už víme, opsána trojúhelníku C_1C_0U, tudíž na ní leží i bod U', který je tak společným bodem kružnic e_c a n. V něm mají tyto kružnice vnější dotyk díky opačné orientaci poloměrů NC_1 a E_cP' stejnolehlých podle středu U'.

Tím je celý výklad Binderova důkazu ukončen.

Dobbsova konstrukce

Nejprve k uvažovaným třem kružnicím i, e_c, n se středy I, E_c, N sestrojíme jejich poloměry IQ, E_cQ', NL kolmé k přímce AB určené tak, že Q a Q' jsou body dotyku prvních dvou kružnic se stranou AB a třetí poloměr NL je souhlasně rovnoběžný s poloměrem IQ. Nyní už určíme body U a U' na kružnici devíti bodů (různé od bodu L) následovně: bod U je její průsečík s polopřímkou LQ a bod U' je její průsečík s polopřímkou LQ'.

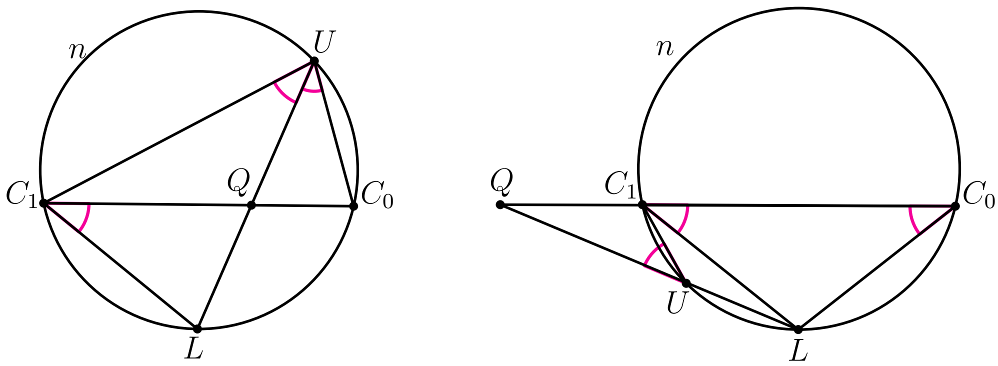


Dobbsův důkaz

Pro přehlednost celého postupu nejprve dokážeme jednoduché pomocné tvrzení, které je samo o sobě zajímavé. Označení bodů a kružnice volíme v Lemmatu takové, jaké budeme dále potřebovat.

Lemma. *Na kružnici n je dán oblouk C_1C_0 se středem L. Pro každý bod U kružnice n, který je různý od bodů C_1, C_0 a L, označíme Q průsečík přímek C_1C_0 a LU. Pak hodnota součinu $|LU| \cdot |LQ|$ je nezávisle na výběru bodu U rovna $|LC_1|^2$.*

DŮKAZ: Rozlišíme, na kterém z obou oblouků s krajními body C_1, C_0 bod U leží.



Ze shodnosti oblouků LC_1 a LC_0 plyne, že na každém z obrázků jsou vyznačeny tři shodné úhly. Vidíme, že v obou případech jsou trojúhelníky LC_1Q a LUC_1 podobné podle věty *uu*: mají totiž společný úhel u vrcholu L a shodné úhly u vrcholů C_1, U. Odtud plyne $|LQ|/|LC_1| = |LC_1|/|LU|$ neboli $|LU| \cdot |LQ| = |LC_1|^2$ a důkaz je hotov.[4]

Před vlastním důkazem správnosti Dobbsovy konstrukce odvodíme ještě jednu dvojici vztahů, kterou níže označíme (7.1). Využijeme k tomu další obrázek pro týž trojúhelník ABC z naší ilustrace k Dobbsově konstrukci, který splňuje dohodnutou podmínku $|AC| > |BC|$. Na obrázku jsou kromě původních poloměrů IQ a E_cQ' vykresleny tyto nové prvky: střed C_1 strany AB, výška CC_0, oblouk opsané kružnice $o = (O, R)$ a její poloměry s koncovými body A, D, C. Vyznačena je rovněž osa úhlu ACB, na které leží po řadě body C, I, D a E_c. Stejnou osu má díky Lemmatu 14.1(iii) rovněž úhel OCC_0, tudíž pět zeleně na obrázku vyznačených úhlů má tutéž velikost, která je označena θ.

Jelikož úsečky C_1Q, QC_0 jsou kolmými průměty po řadě úseček DI, IC na přímku AB, platí rovnosti

$$|C_1Q| = |DI| \sin\theta \quad \text{a} \quad |QC_0| = |IC| \sin\theta.$$

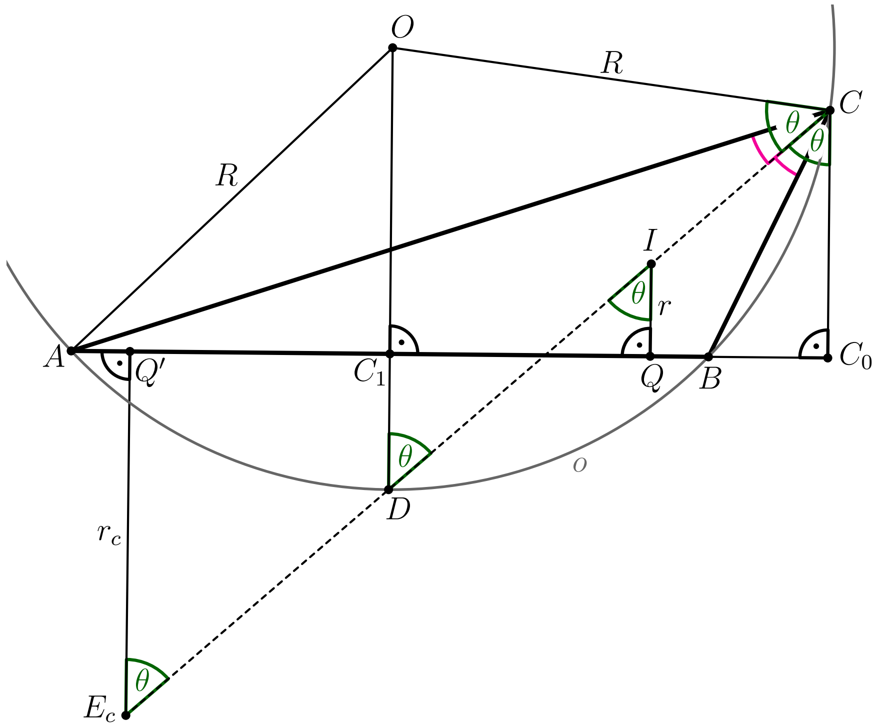
[4] Pro situaci z levého obrázku, kdy polopřímka UL je osou vnitřního úhlu trojúhelníku C_1C_0U, je dokázané tvrzení součástí Lemmatu 14.4.

Obdobně platí

$$|C_1Q'| = |DE_c| \sin\theta \quad \text{a} \quad |Q'C_0| = |E_cC| \sin\theta.$$

Vynásobíme-li mezi sebou dvě rovnosti z téhož řádku, pak s ohledem na vzorce $|DI| \cdot |IC| = 2Rr$ a $|DE_c| \cdot |E_cC| = 2Rr_c$ (Lemma 14.5) dojdeme ke vztahům

$$|C_1Q| \cdot |QC_0| = 2Rr \sin^2\theta \quad \text{a} \quad |C_1Q'| \cdot |Q'C_0| = 2Rr_c \sin^2\theta. \tag{7.1}$$



Na dalším obrázku už je samotná Dobbsova konstrukce. Přikresleny jsou i některé prvky z předchozího obrázku a nově je vyznačena velikost 2θ původního úhlu OCC_0. Stejnou velikost má i úhel C_1NL, neboť oba úhly OCC_0 a C_1NL mají souhlasně rovnoběžná jak první ramena (Lemma 14.1(ii)), tak druhá ramena (podle konstrukce bodu L). Základna LC_1 rovnoramenného trojúhelníku LC_1N má proto délku $R\sin\theta$. Díky tomu Lemma z úvodu našeho výkladu Dobbsova důkazu vede k rovnostem

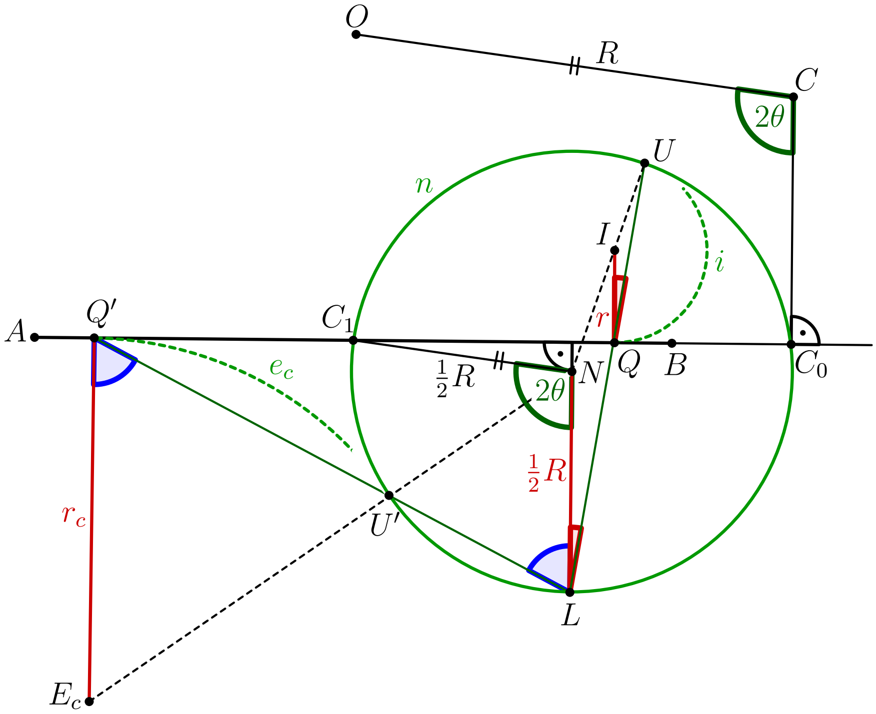
$$|LU| \cdot |LQ| = |LU'| \cdot |LQ'| = |LC_1|^2 = R^2 \sin^2\theta.$$

Nyní využijeme dvojí vyjádření mocností bodů Q, Q' ke kružnici n. Dosadíme-li do rovností $|LQ| \cdot |QU| = |C_1Q| \cdot |QC_0|$ a $|LQ'| \cdot |Q'U| = |C_1Q'| \cdot |Q'C_0|$ dříve odvozené hodnoty z (7.1), dostaneme

$$|LQ| \cdot |QU| = 2Rr \sin^2\theta \quad \text{a} \quad |LQ'| \cdot |Q'U| = 2Rr_c \sin^2\theta.$$

Dáme–li tyto rovnosti do poměru s rovnostmi ze závěru předchozího odstavce, obdržíme

$$\frac{|QU|}{|LU|} = \frac{2Rr \sin^2\theta}{R^2 \sin^2\theta} = \frac{r}{\frac{1}{2}R} \quad \text{a} \quad \frac{|Q'U'|}{|LU'|} = \frac{2Rr_c \sin^2\theta}{R^2 \sin^2\theta} = \frac{r_c}{\frac{1}{2}R}.$$



Platí tedy $|QU|/|LU| = |IQ|/|NL|$ a $|Q'U'|/|LU'| = |E_cQ'|/|NL|$. To už spolu s červeně a modře na obrázku vyznačenými úhly znamená, že jak trojúhelníky IQU a NLU, tak i trojúhelníky $E_cQ'U'$ a NLU' jsou podobné (podle věty *sus*). Proto jsou trojice bodů (N, I, U) a (N, U', E_c) v uvedených pořadích kolineární. Navíc z rovnosti $|NL| = |NU|$ plyne $|IQ| = |IU|$ (neboli $U \in i$), takže kružnice n, i jsou podle společného bodu U stejnolehlé. Obdobně z $|NL| = |NU'|$ plyne $|E_cQ'| = |E_cU'|$ (neboli $U' \in e_c$), takže kružnice n, e_c jsou podle společného bodu U' stejnolehlé. Tím je náš výklad Dobbsova důkazu (rozšířeného o úvahy pro připsanou kružnici) ukončen.

Kapitola 8

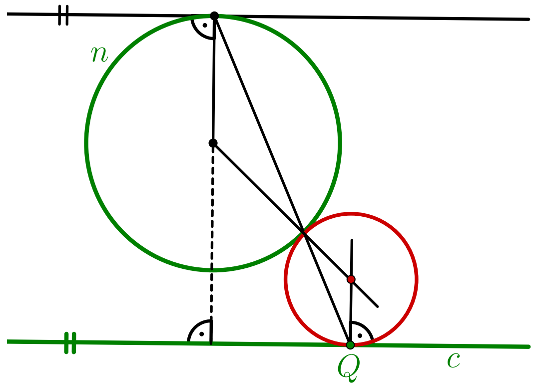
Důkaz užitím Pappových úloh

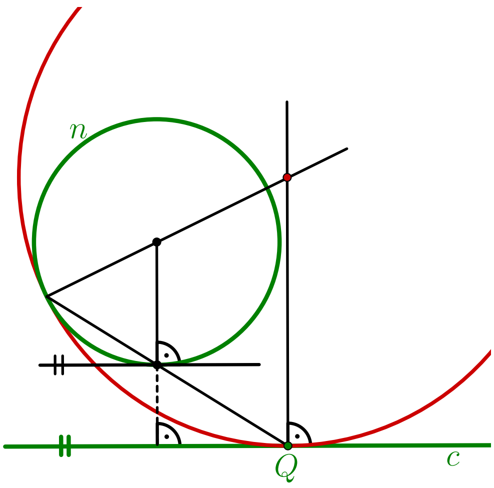
E. H. Neville[1] ve svém článku [Nev] z roku 1928 dokázal Feuerbachovu větu způsobem, při kterém pro obecný trojúhelník ABC vedle kružnic, jež ve Feuerbachově větě vystupují a z nichž budeme dále pracovat s vepsanou kružnicí i, kružnicí e_c připsanou straně AB a kružnicí n devíti bodů, zavedl ještě dvě další pomocné kružnice. První (resp. druhá) z nich se dotýká přímky AB ve stejném bodě jako kružnice i (resp. jako kružnice e_c) a má rovněž vnitřní (resp. vnější) dotyk s kružnicí n. Tímto obratem Neville vcelku přirozeně a jednoduše převedl důkaz Feuerbachovy věty na úlohu dokázat, že ony dvě pomocné kružnice splývají s kružnicemi i a e_c. To se mu povedlo, jak v této kapitole detailně popíšeme, na základě hlubšího rozboru těch úloh, kterým pomocné kružnice (podle způsobu svého určení) vyhovují. Jedná se o jeden druh úloh, které běžně nazýváme Pappovy. Zadání tohoto druhu a snadnou konstrukci vyhovujících kružnic nejprve stručně připomeneme.

PAPPOVA ÚLOHA: *Je dána přímka c, její bod Q a kružnice n, která neprochází bodem Q, ani se nedotýká přímky c. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímky c v bodě Q a má rovněž (vnitřní nebo vnější) dotyk s kružnicí n.*

Tato úloha, kterou budeme dále značit (c, Q, n), má vždy dvě řešení. Plyne to z úvah o stejnolehlosti dvou dotýkajících se kružnic a jejich rovnoběžných tečnách. Ty vedou ke známé konstrukci obou vyhovujících kružnic, ilustrované následující dvojicí obrázků. Není přitom podstatné, že jsme pro přehlednost zvolili situaci, kdy zadaná přímka c zadanou kružnici n neprotíná.

[1]Eric Harold Neville (1889–1961), anglický matematik, profesor Univerzity v Readingu, autor významných textů a článků, který se aktivně zapojoval do řešení aktuálních otázek matematického vzdělávání.





V hlavním výsledku Nevilleova článku [Nev], který nyní uvedeme a dokážeme, jsou popsány další vlastnosti řešení Pappovy úlohy (c, Q, n) pro situaci, kdy přímka c protíná kružnici n ve dvou bodech. Rozlišeny budou dva případy a) a b) podle toho, zda Q je bodem vnitřní či vnější oblasti kružnice n.[2]

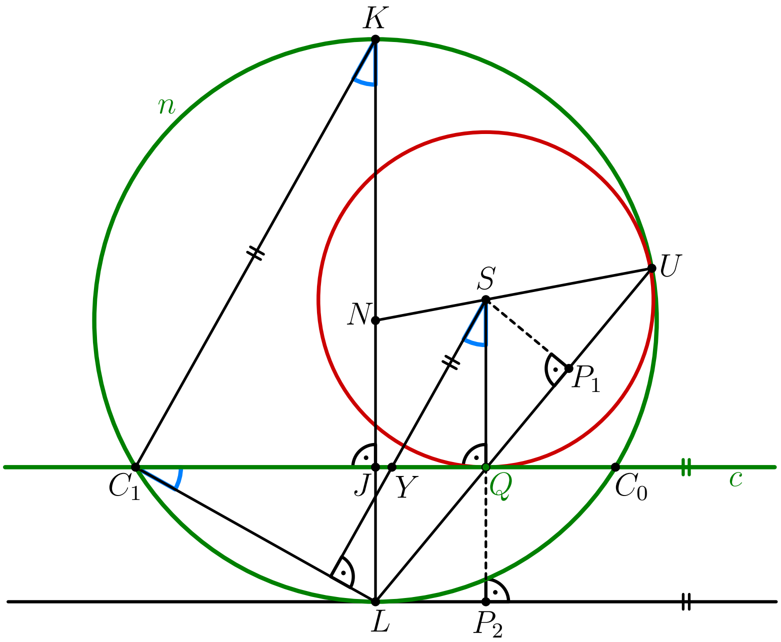
Věta. *Daná kružnice n a daná přímka c se protínají ve dvou bodech C_1 a C_0. Nechť KL je průměr kružnice n kolmý k přímce c.*

a) Pro libovolný vnitřní bod Q úsečky C_1C_0 uvažme kružnici, která se v bodě Q dotýká přímky c a která má vnitřní dotyk s obloukem C_1KC_0 kružnice n. Pak střed S této kružnice leží na rovnoběžce s přímkou C_1K vedené takovým bodem Y úsečky C_1C_0, jehož poloha je určena rovností $|C_1Y| \cdot |C_1C_0| = |C_1Q|^2$.

b) Pro libovolný vnitřní bod Q' polopřímky opačné k polopřímce C_1C_0 uvažme kružnici, která se v bodě Q' dotýká přímky c a která má vnější dotyk s obloukem C_1LC_0 kružnice n. Pak střed S' této kružnice leží na rovnoběžce s přímkou C_1K vedené takovým bodem Y' polopřímky C_1C_0, jehož poloha je určena rovností $|C_1Y'| \cdot |C_1C_0| = |C_1Q'|^2$.

Důkaz: Věnujme se nejprve případu a) podle prvního obrázku níže. V něm N značí střed kružnice n a J průsečík tětivy C_1C_0 s průměrem KL. Provedena je rovněž známá (výše připomenutá) konstrukce středu S jediné vyhovující kružnice: Bod U jejího vnitřního dotyku s obloukem C_1KC_0 leží na spojnici bodů dotyku Q, L rovnoběžných tečen obou kružnic.

[2] Ilustrace k oběma případům jsou zařazeny do následného textu důkazu Věty.



Ke středu S jsou ještě sestrojeny jeho kolmé průměty P_1, P_2 po řadě na přímku LU a na tečnu ke kružnici n v bodě L. Konečně bod Y je na obrázku zaveden jako průsečík úsečky C_1C_0 s kolmicí k přímce C_1L vedenou kolem S.[3] Naším cílem je dokázat rovnost $|C_1Y| \cdot |C_1C_0| = |C_1Q|^2$.

Jelikož body P_1, P_2 leží na Thaletově kružnici nad průměrem SL, z mocnosti bodu Q k této kružnici plyne

$$|SQ| \cdot |QP_2| = |P_1Q| \cdot |QL|.$$

Dosadíme-li sem $|QP_2| = |JL|$, $|P_1Q| = \frac{1}{2}|UQ|$ a poté užijeme mocnost bodu Q ke kružnici n, dostaneme

$$|SQ| \cdot |JL| = \tfrac{1}{2}|UQ| \cdot |QL| = \tfrac{1}{2}|C_1Q| \cdot |QC_0|. \tag{8.1}$$

Všimněme si, že $C_1K \perp C_1L \perp SY$ podle Thaletovy věty a podle konstrukce bodu Y, tudíž $SY \parallel C_1K$, jak je na obrázku vyznačeno. Spolu s $KL \parallel SQ \perp c$ to dokazuje shodnost tří vyznačených ostrých úhlů v pravoúhlých trojúhelnících C_1KL, JC_1L a QSY. Z podobnosti posledních dvou z nich s přihlédnutím k rovnosti $|C_1J| = \frac{1}{2}|C_1C_0|$ obdržíme

$$\frac{|JL|}{|C_1J|} = \frac{|QY|}{|SQ|} \quad \text{neboli} \quad |SQ| \cdot |JL| = |C_1J| \cdot |QY| = \tfrac{1}{2}|C_1C_0| \cdot |QY|.$$

Porovnáním s (8.1) tak docházíme k rovnosti součinů

$$|C_1Q| \cdot |QC_0| = |C_1C_0| \cdot |QY|. \tag{8.2}$$

[3] Ve formulaci Věty je určení bodu Y pochopitelně odlišné, aby naopak posloužilo k určení středu S.

Vystupují v ní čtyři body C_1, Y, Q, C_0 ležící v tomto pořadí na přímce c. Proto platí vztahy

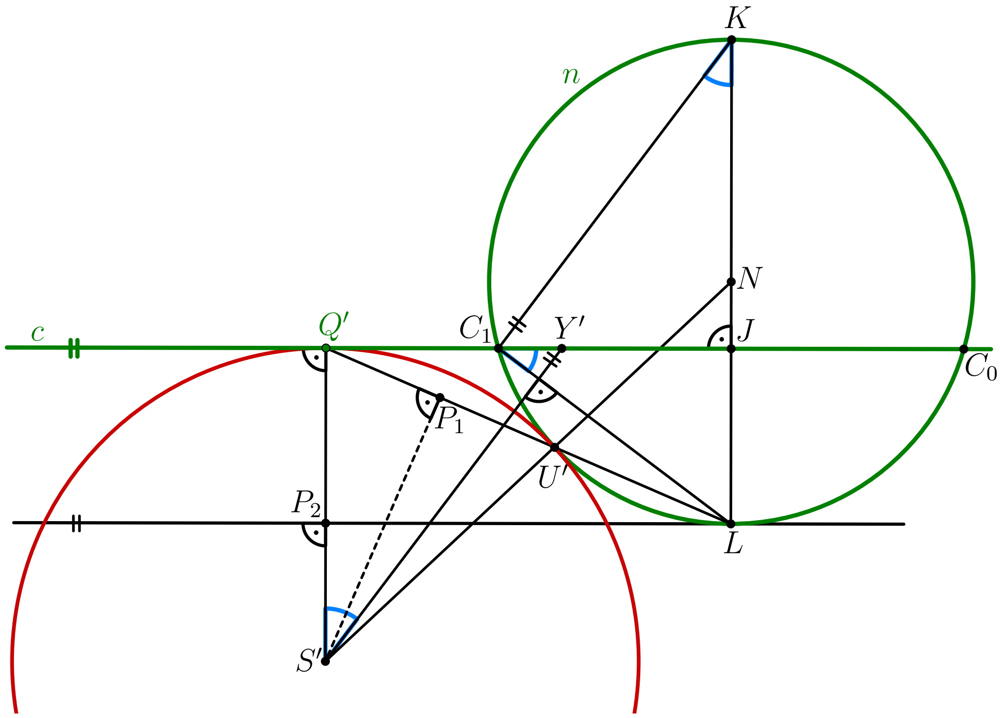
$$|QC_0| = |C_1C_0| - |C_1Q| \quad \text{a} \quad |QY| = |C_1Q| - |C_1Y|,$$

které do rovnosti (8.2) dosadíme a pak ji dále upravíme:

$$\begin{aligned}
|C_1Q| \cdot (|C_1C_0| - |C_1Q|) &= |C_1C_0| \cdot (|C_1Q| - |C_1Y|), \\
|C_1Q| \cdot |C_1C_0| - |C_1Q|^2 &= |C_1C_0| \cdot |C_1Q| - |C_1C_0| \cdot |C_1Y|, \\
|C_1Q|^2 &= |C_1C_0| \cdot |C_1Y|.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz Věty pro případ a) hotov.

Analogický důkaz pro případ b) zapíšeme stručněji. Využijeme při něm stejné označení a obdobné konstrukce jako v případě a). Jsou zachyceny na následujícím obrázku.



Úvahy z důkazu pro případ a) zůstávají v platnosti beze změn od počátku až po podobnost trojúhelníků C_1KL, JC_1L a $Q'S'Y'$. Přivedou nás k rovnoběžnosti $S'Y' \parallel C_1K$ (opět vyznačené na obrázku) a k rovnosti obdobné (8.2), která je tvaru

$$|C_1Q'| \cdot |Q'C_0| = |C_1C_0| \cdot |Q'Y'|. \tag{8.3}$$

Tentokrát sem dosadíme vztahy

$$|Q'C_0| = |C_1C_0| + |C_1Q'| \quad \text{a} \quad |Q'Y'| = |C_1Q'| + |C_1Y'|.$$

Další úpravou dostaneme:

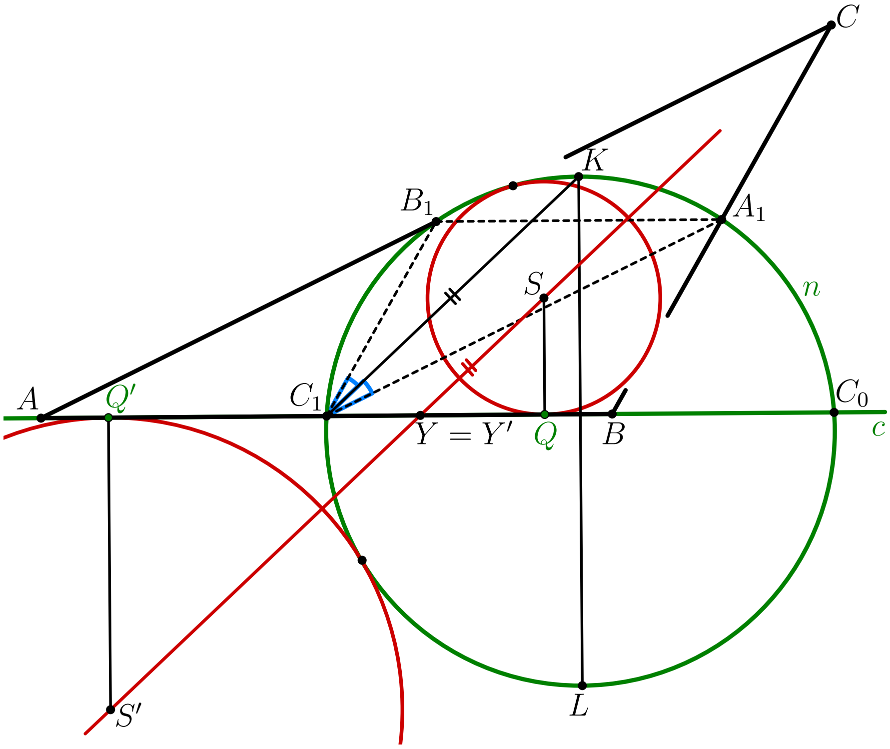
$$
\begin{aligned}
|C_1Q'| \cdot (|C_1C_0| + |C_1Q'|) &= |C_1C_0| \cdot (|C_1Q'| + |C_1Y'|),\\
|C_1Q'| \cdot |C_1C_0| + |C_1Q'|^2 &= |C_1C_0| \cdot |C_1Q'| + |C_1C_0| \cdot |C_1Y'|,\\
|C_1Q'|^2 &= |C_1C_0| \cdot |C_1Y'|.
\end{aligned}
$$

Tím je důkaz Věty i pro případ b) hotov.

Důkaz Feuerbachovy věty

Ukážeme, jak Feuerbachovo tvrzení plyne z dokázané Věty. Jistě se stačí zabývat trojúhelníkem ABC, ve kterém platí $|AC| > |BC|$, a při dohodnutém označení dokázat vnitřní dotyk kružnic i, n a vnější dotyk kružnic e_c, n. Využijeme k tomu body dotyku Q a Q' kružnic i, resp. e_c s přímkou c strany AB. Díky předpokladu $|AC| > |BC|$ leží body Q', C_1, Q, C_0 v tomto pořadí na přímce c, přitom bod C_1 je jak známo (viz Lemma 14.2) středem úsečky $Q'Q$.

Našim cílem je dokázat, že kružnice i a e_c jsou totožné s kružnicemi, které jsou řešeními Pappových úloh (c, Q, n), resp. (c, Q', n) upřesněnými v dokázané Větě. Tato řešení jsou červeně vykreslena jako kružnice se středy S, S' na následujícím obrázku.



Připomeňme, že podle znění Věty je KL průměr kružnice n kolmý k přímce c a že body Y a Y' ležící na polopřímce C_1C_0 jsou určeny rovnostmi

$$|C_1Y| \cdot |C_1C_0| = |C_1Q|^2 \quad \text{a} \quad |C_1Y'| \cdot |C_1C_0| = |C_1Q'|^2.$$

Z nich díky $|C_1Q| = |C_1Q'|$ tak skutečně máme $Y = Y'$, jak je na obrázku vyznačeno. Stejné písmeno Y užíváme v jiných kapitolách práce k označení toho bodu na straně AB, který je jejím průsečíkem s osou vnitřního úhlu ACB daného trojúhelníku ABC. Podle Lemmatu 14.3 pro tento průsečík Y však platí

$$|C_1Y| \cdot |C_1C_0| = |C_1Q|^2 = |C_1Q'|^2,$$

takže porovnáním s předchozí dvojicí rovností zjišťujeme, že rovněž v naší situaci „zdvojený“ bod $Y = Y'$ leží na ose úhlu ACB.

Samotné tvrzení Věty, které teprve nyní uplatníme, je na obrázku zdůrazněno červeně vykreslenou přímkou: *V případě $Y = Y'$ leží středy S a S' s bodem Y na jedné přímce, která je rovnoběžná s přímkou C_1K.* Zároveň však středy S a S' leží, stejně jako středy I a E_c kružnic i a e_c, na kolmicích k přímce c vedených body Q a Q'. Proto našeho cíle, totiž rovností $I = S$ a $E_c = S'$, bude dosaženo, pokud ověříme, že přímka C_1K je rovnoběžná s osou úhlu ACB (která tak bude skutečně červeně vykreslenou, k vrcholu C nedotaženou polopřímkou). K potřebnému ověření využijeme střední příčku A_1B_1 trojúhelníku ABC: Jelikož K je středem oblouku C_1C_0 kružnice n, a tedy rovněž středem jejího oblouku B_1A_1, je polopřímka C_1K osou úhlu $A_1C_1B_1$, takže je skutečně rovnoběžná s osou úhlu ACB, který je totiž s úhlem $A_1C_1B_1$ stejnolehlý podle těžiště trojúhelníku ABC. Tím je celý výklad Nevilleova důkazu Feuerbachovy věty ukončen.

Kapitola 9

Důkaz pomocí rozšíření Ptolemaiovy věty

Důkaz, kterým se budeme v této kapitole zabývat, uvedl v roce 1944 v časopise *The Mathematical Gazette* matematik W. J. Hodgetts jako stručný příspěvek [Hod] se značně problematickou poznámkou, že je to patrně nejkratší možný důkaz Feuerbachovy věty. Podrobnější výklad této metody je však podán již ve starší a námi i jinde zmiňované knize *Modern Geometry* autora Rogera A. Johnsona z roku 1929. V seznamu užité literatury ji uvádíme jako knihu [Joh] v nezměněném vydání z roku 1960, kde je dotyčný důkaz vyložen na stranách 89–90 a 200–201. Jak tam Johnson uvádí, s myšlenkou různých rozšiřování Ptolemaiovy věty přišel John Casey.[1] Lze se o tom přesvědčit v jeho knize [Cas, str. 103 a dále], nazvané *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclids* z roku 1886, která je autorským přepracováním a doplněním dřívějšího vydání s kratším názvem *The First Six Books of the Elements of Euclids* z roku 1882.

Výklad důkazu z knihy [Joh] bude v našem podání elementárnější. Vyhneme se zcela odkazům na teorii svazků kružnic a teprve v úplném závěru důkazu hlavního Lemmatu využijeme pouze základní poznatek o přímce zvané *chordála* dvou nesoustředných kružnic.

Je logické, že náš výklad započneme připomenutím klasické *Ptolemaiovy věty* o tětivovém čtyřúhelníku.[2] Uvedeme ji však v pro nás potřebné méně běžné „oboustranné“ variantě, tj. ve formě ekvivalence, která je důsledkem obecnějšího tvrzení o *Ptolemaiově nerovnosti.* Tuto ekvivalenci i s jejím syntetickým důkazem lze nalézt v českém článku [Lei].

[1] O tomto irském matematikovi se zmiňujeme rovněž v závěrečné Poznámce kapitoly 11.

[2] Klaudios Ptolemaios (90–165) byl významný matematik a fyzik působící v Alexandrii. Zmíněná věta byla poprvé dokázána v jeho díle *Megalé syntaxis tés astronomás* (Velká skladba astronomie), známějším později pod názvem *Almagest.*

Ptolemaiova věta: *Daný čtyřúhelník (ať už konvexní či nekonvexní) je tětivový, právě když součin délek jeho úhlopříček je roven součtu obou součinů délek jeho protějších stran.*

Jisté rozšíření takto pojaté Ptolemaiovy věty bude tím důkazovým prostředkem, který uplatníme v této kapitole. Před formulací a důkazem tohoto hlavního Lemmatu bude vhodné zmínit následující. Má-li zkoumaný čtyřúhelník za vrcholy body X, Y, Z, U v předem neznámém pořadí na své hranici, můžeme rovnost z Ptolemaiovy věty zapsat unifikovaným způsobem jako

$$|XY| \cdot |ZU| \pm |XZ| \cdot |YU| \pm |YZ| \cdot |XU| = 0 \tag{9.1}$$

s vhodnou kombinací znaků + a –. Skutečně, případ dvou znaků + je zřejmě vyloučen, v ostatních třech případech rovnost (9.1) vyjadřuje, že jeden ze zastoupených součinů je roven součtu zbývajících dvou součinů. Souvislost rovnosti (9.1) s obdobnou rovností (9.2) z následujícího Lemmatu upřesníme hned za jeho formulací, tedy dříve než přistoupíme k jeho vlastnímu důkazu.

Lemma. *Na kružnici k jsou dány tři různé body X, Y, Z a na kružnici l tři body K, L, M takové, že přímky XK, YL, ZM jsou tečny kružnice l (s body dotyku K, L, resp. M). Pak kružnice k a l se navzájem dotýkají, právě když platí rovnost*

$$|XY| \cdot |ZM| \pm |XZ| \cdot |YL| \pm |YZ| \cdot |XK| = 0 \tag{9.2}$$

při vhodném výběru znaků + a −.

Poznamenejme, co jsme výše slíbili: V případě, kdy kružnice l degeneruje v jediný bod U (tj. v „kružnici“ s nulovým poloměrem), platí rovnosti $K = L = M = U$ a rovnost (9.2) tak přejde v rovnost (9.1), která je jak víme podmínkou nutnou i postačující k tomu, aby dotyčný bod U ležel (stejně jako body A, B, C) na kružnici k. V tomto smyslu je Lemma rozšířením uvedené Ptolemaiovy věty. Bez ní samotné se ovšem při následujícím důkazu neobejdeme.

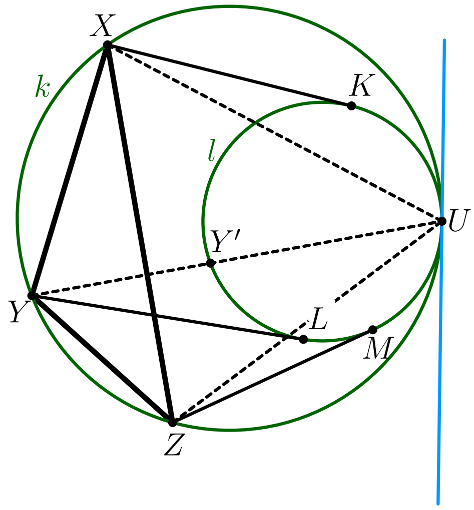
Důkaz: V první části budeme předpokládat, že kružnice k a l mají dotyk v bodě U. Bez újmy na obecnosti uvažujme situaci, kdy bod U leží na tom oblouku XZ kružnice k, který neobsahuje bod Y. Podle Ptolemaiovy věty pak platí

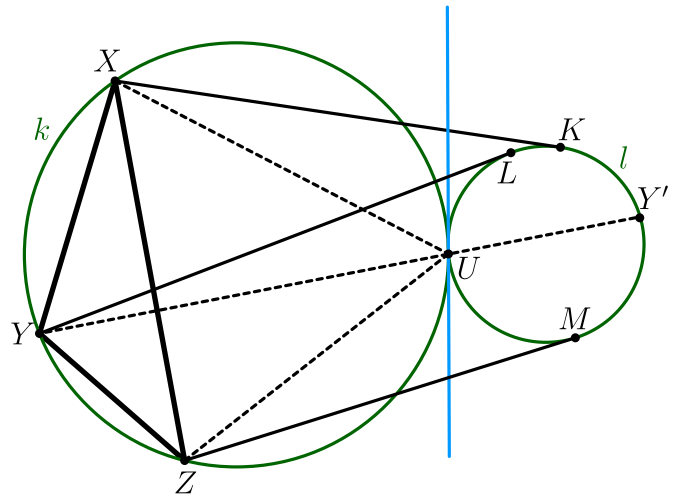
$$|XZ| \cdot |YU| = |XY| \cdot |ZU| + |YZ| \cdot |XU|. \tag{9.3}$$

Dokážeme, že rovnost (9.2) je tehdy splněna v obdobné formě

$$|XZ| \cdot |YL| = |XY| \cdot |ZM| + |YZ| \cdot |XK|. \tag{9.4}$$

Výklad doprovodíme dvojicí obrázků, na kterých je rozlišeno, zda kružnice k a l mají v bodě U vnitřní, resp. vnější dotyk.





V obou případech je kružnice l obrazem kružnice k ve stejnolehlosti se středem U a vhodným koeficientem λ. Pro něj v případě vnitřního dotyku platí $0 < \lambda < 1$ (díky předpokladu Lemmatu totiž body X, Y, Z leží ve vnější oblasti kružnice l), zatímco v případě vnějšího dotyku platí $\lambda < 0$. Ukážeme-li, že v obou případech jsou s konstantou $t = \sqrt{1-\lambda}$ splněny rovnosti

$$|XK| = t|XU|, \quad |YL| = t|YU|, \quad |ZM| = t|ZU|, \tag{9.5}$$

pak jejich dosazením do t-násobku rovnosti (9.3) obdržíme kýženou rovnost (9.4) a první část důkazu pak bude hotova.

Ze tří analogických rovností (9.5) jistě stačí dokázat jen tu prostřední. K tomu označíme Y' druhý průsečík polopřímky YU s kružnicí l. V případě $0 < \lambda < 1$ (obrázek vlevo) máme $|Y'U| = \lambda|YU|$, odkud $|YY'| = |YU| - |Y'U| = (1-\lambda)|YU|$. V případě $\lambda < 0$ (obrázek vpravo) máme $|Y'U| = -\lambda|YU|$, odkud $|YY'| = |YU| + |Y'U| = (1-\lambda)|YU|$. V obou případech vyšel stejný vzorec $|YY'| = (1-\lambda)|YU|$. Dosaďme ho do dvojího vyjádření mocnosti bodu Y ke kružnici l:

$$|YL|^2 = |YY'| \cdot |YU| = (1-\lambda)|YU| \cdot |YU| = (1-\lambda)|YU|^2.$$

Odtud po odmocnění už dostáváme prostřední vzorec (9.5).

Ve druhé části celého důkazu budeme naopak předpokládat, že platí rovnost (9.2), bez újmy na obecnosti v podobě (9.4), kterou jsme dokazovali v první části. Dokážeme, že pak kružnice k a l se navzájem dotýkají, a to v některém bodě U toho oblouku XZ

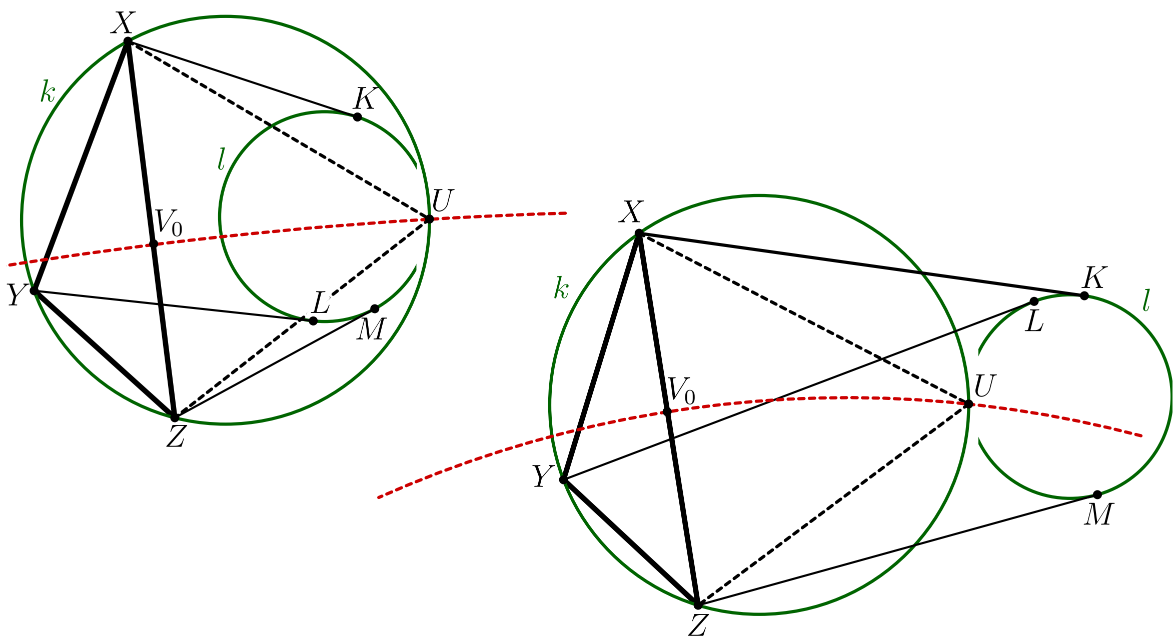
kružnice k, který neobsahuje bod Y.

K určení zmíněného bodu U využijeme základní informaci o kružnicích, kterým běžně říkáme *Apolloniovy*.[3] Vše potřebné shrneme do této poučky[4]: *Je-li v rovině ϱ dána úsečka AB, pak množina všech těch bodů $V \in \varrho$, pro které má poměr $|AV| : |BV|$ danou hodnotu $p > 0$, je v případě $p \neq 1$ kružnice se středem na přímce AB, která protíná úsečku AB v jediném bodě V_0; v případě $p = 1$ je touto množinou osa úsečky AB (a přitom bod V_0 je její střed).*

Uplatněme uvedenou poučku v naší situaci, a to pro body $A = X$, $B = Z$ a hodnotu $p = |XK|/|ZM|$. Dostaneme Apolloniovu kružnici (případně osu úsečky XZ) tvořenou právě těmi body V, které splňují úměru

$$|XV| : |ZV| = |XK| : |ZM|. \tag{9.6}$$

Tato kružnice, která je zčásti červeně vykreslena v další dvojici obrázků[5], protne vždy oba oblouky XZ kružnice k (díky jedinečnosti bodu V_0 popsaného v poučce). Za bod U, který bude kandidátem na místo dotyku kružnic k a l, vybereme průsečík sestrojené Apolloniovy kružnice s tím obloukem XZ kružnice k, který neobsahuje bod Y.



[3] Pojmenovány jsou po matematikovi Apollóniovi z Pergy (262 př. n. l.–190 př. n. l.). Tyto kružnice mohl Apollonius objevit při svém řešení tzv. *úlohy o pronásledování*, o níž se lze dočíst na stránce https://mathworld.wolfram.com/ApolloniusPursuitProblem.html.

[4] Podrobnější výklad o Apollonivých kružnicích lze nalézt v [B-Z, str. 11–13].

[5] K tomuto rozlišení dvou možných situací se vyjádříme později.

Pro tětivový čtyřúhelník $XYZU$ podle Ptolemaiovy věty platí

$$|XZ| \cdot |YU| = |XY| \cdot |ZU| + |YZ| \cdot |XU|.$$

Navíc z úměry (9.6) pro náš vybraný bod $V = U$ plynou vyjádření $|XK| = t|XU|$ a $|ZM| = t|ZU|$ pro vhodné $t > 0$. Dosadíme-li tyto vztahy do t-násobku předchozí rovnosti, dostaneme

$$t \cdot |XZ| \cdot |YU| = |XY| \cdot |ZM| + |YZ| \cdot |XK|.$$

Vyšla nám stejná pravá strana jako v předpokládané rovnosti (9.4). Z rovnosti levých stran $|XZ| \cdot |YL| = t \cdot |XZ| \cdot |YU|$ proto plyne $|YL| = t|YU|$, neboť $|XZ| \neq 0$. Platí tudíž trojice rovností

$$|XK| = t|XU|, \quad |YL| = t|YU|, \quad |ZM| = t|ZU|. \tag{9.7}$$

Povšimněme si, že obrázek vlevo, resp. vpravo odpovídá případu $t < 1$, resp. $t > 1$.[6]

Uvažme na závěr vedle kružnice l také kružnici l' , která je obrazem kružnice k ve stejnolehlosti se středem U a koeficientem λ daným vzorcem $\lambda = 1 - t^2$.[7] Stejným rozborem případů $0 < \lambda < 1$ a $\lambda < 0$ jako v první části důkazu, což zde opakovat nebudeme, lze zjistit, že mocnost každého bodu $W \in k$ ke kružnici l' má kladnou hodnotu $(1 - \lambda)|WU|^2$ neboli $t^2|WU|^2$. To s ohledem na (9.7) znamená, že každý ze tří bodů X, Y, Z má ke dvěma kružnicím l a l' stejnou mocnost. Kdyby tyto dvě kružnice nebyly totožné, nemohly by být (kvůli předchozí větě) soustředné. Pro každé dvě nesoustředné kružnice je však známo, že množina těch bodů, které k nim mají stejnou mocnost, tvoří přímku (zvanou chordála daných dvou kružnic)[8]. V případě $l \neq l'$ by proto body X, Y, Z musely být kolineární, což odporuje tomu, že jde o tři různé body na téže kružnici k. Platí tedy $l = l'$, a proto se kružnice k a l v bodě U navzájem dotýkají. Tím je i druhá část důkazu ukončena.

Poznámka 1. Z provedeného důkazu plyne zajímavá informace o poloze bodu U dotyku posuzovaných kružnic k a l. Je podle (9.7) určena rovností

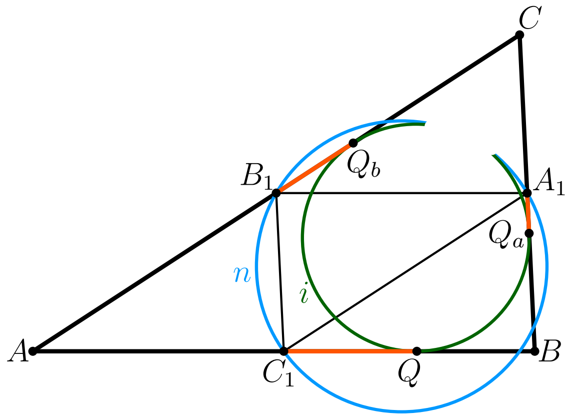
$$|XU| : |YU| : |ZU| = |XK| : |YL| : |ZM|.$$

Důkaz Feuerbachovy věty

Ukážeme, jak Feuerbachovo tvrzení snadno plyne z dokázaného Lemmatu. Jak poznamenává R. A. Johnson na str. 200 své knihy [Joh], dotyčné Lemma bylo zřejmě „vymyšleno“ (v angl. originále „deviced“) především za tímto účelem.

[6] Dále zjistíme, že hodnota $t = 1$ možná není – při takovém t by kružnice l měla nulový poloměr.
[7] Výběr hodnoty λ je motivován vzorcem $t = \sqrt{1 - \lambda}$ z první části našeho důkazu.
[8] Důkaz je uveden v [B-Z, str. 90–91].

V první části dokážeme pro libovolný trojúhelník, který není rovnostranný, dotyk jeho kružnice n (devíti bodů) s jemu vepsanou kružnicí i. Jistě se stačí omezit na různostranný trojúhelník, pojmenovaný ABC tak, aby pro délky a, b, c jeho stran platilo $b > c > a$. Body dotyku těchto stran s kružnicí i (různé od jejich středů A_1, B_1, C_1) jsou označeny Q, Q_a, Q_b podle obrázku.



Kružnice n je opsána příčkovému trojúhelníku $A_1B_1C_1$, jehož strany mají délky

$$|B_1C_1| = \tfrac{1}{2}a, \quad |A_1C_1| = \tfrac{1}{2}b, \quad |B_1A_1| = \tfrac{1}{2}c \tag{9.8}$$

Zabývejme se nyní délkami tečen ke kružnici i ze středů A_1, B_1 a C_1. Určíme je snadno z délek takových tečen z vrcholů A a B, které jsou dány Lemmatem 14.2 následovně:

$$|AQ| = |AQ_b| = \tfrac{1}{2}(b + c - a) \quad \text{a} \quad |BQ_a| = \frac{1}{2}(a + c - b).$$

Odtud s ohledem na předpoklad $b > c > a$ z našeho obrázku vyčteme vztahy

$$|A_1Q_a| = \tfrac{1}{2}(b - c), \quad |B_1Q_b| = \tfrac{1}{2}(c - a), \quad |C_1Q| = \tfrac{1}{2}(b - a). \tag{9.9}$$

Rovnosti (9.8) a (9.9) jsou vším, co potřebujeme k uplatnění Lemmatu.[9] Podle něho se kružnice n a i dotýkají, platí-li rovnost

$$|B_1C_1| \cdot |A_1Q_a| + |A_1C_1| \cdot |B_1Q_b| - |A_1B_1| \cdot |C_1Q| = 0.$$

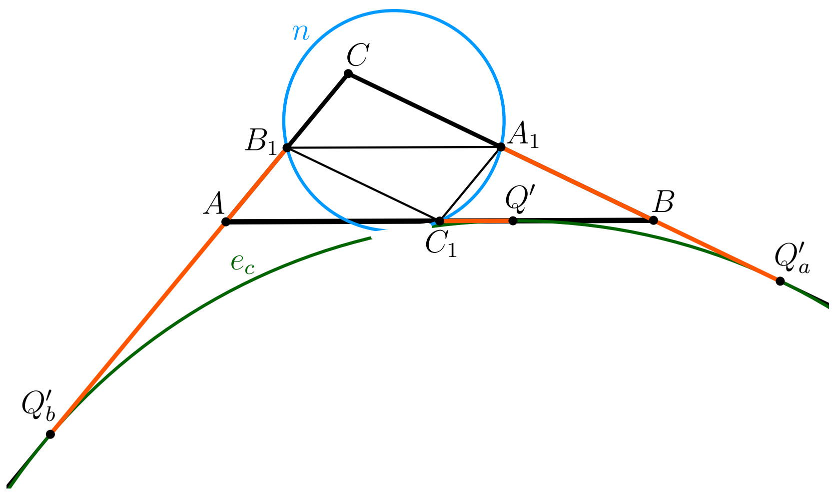
Její levá strana má ovšem po dosazení (9.8) a (9.9) hodnotu

$$\tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}(b - c) + \tfrac{1}{2}b \cdot \tfrac{1}{2}(c - a) - \tfrac{1}{2}c \cdot \tfrac{1}{2}(b - a) = \tfrac{1}{4}(ab - ac + bc - ab - bc + ac) = 0.$$

Tím je první část důkazu hotova.

V druhé části důkazu uvážíme opět kružnici n opsanou příčkovému trojúhelníku $A_1B_1C_1$ a dokážeme její dotyk s kružnicí e_c připsanou straně AB výchozího trojúhelníku ABC. Jistě se stačí omezit na případ, kdy platí $|AC| < |BC|$ neboli $b < a$. Potřebné body dotyku kružnice e_c jsou pojmenovány Q', Q'_a, Q'_b podle obrázku.

[9] Tvrzení Lemmatu má tvar ekvivalence, je proto zapotřebí jen podle vzorců (9.8) a (9.9) otestovat, který výběr znaků + a − v dotyčné rovnosti (9.2) bude ten správný.



Délky tečen ze středů A_1, B_1, C_1 ke kružnici e_c znovu získáme z délek tečen z vrcholů A, B. Ty mají podle Lemmatu 14.2 vyjádření

$$|AQ'| = |AQ'_b| = \tfrac{1}{2}(a+c-b) \quad \text{a} \quad |BQ'_a| = \frac{1}{2}(b+c-a),$$

odkud s ohledem na předpoklad $b < a$ z našeho obrázku vyčteme vztahy

$$|A_1Q'_a| = \tfrac{1}{2}(b+c), \quad |B_1Q'_b| = \tfrac{1}{2}(a+c), \quad |C_1Q'| = \tfrac{1}{2}(a-b). \tag{9.10}$$

Dotyk kružnic n a e_c vyplyne z Lemmatu, pokud ověříme rovnost

$$|B_1C_1| \cdot |A_1Q'_a| - |A_1C_1| \cdot |B_1Q'_b| - |A_1B_1| \cdot |C_1Q'| = 0.$$

Její levá strana má díky rovnostem (9.8) a (9.10) hodnotu

$$\tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}(b+c) - \tfrac{1}{2}b \cdot \tfrac{1}{2}(a+c) - \tfrac{1}{2}c \cdot \tfrac{1}{2}(a-b) = \tfrac{1}{4}(ab+ac-ab-bc-ac+bc) = 0.$$

Tím je celý důkaz Feuerbachovy věty ukončen.

Poznámka 2. Malým nedostatkem provedeného důkazu Feuerbachovy věty je, že užité rozšíření Ptolemaiovy věty nedává přímou odpověď na otázku, jaký je druh dotyku jednotlivých dvojic kružnic n, i a n, e_c (vnitřní či vnější?). Na druhou stranu použitá metoda nám přinesla cennou doplňující informaci: Poloha bodu dotyku F kružnic n, i (který je nazýván *Feuerbachovým bodem* trojúhelníku ABC) je určena poměrem

$$|A_1F| : |B_1F| : |C_1F| = |b-c| : |a-c| : |a-b|$$

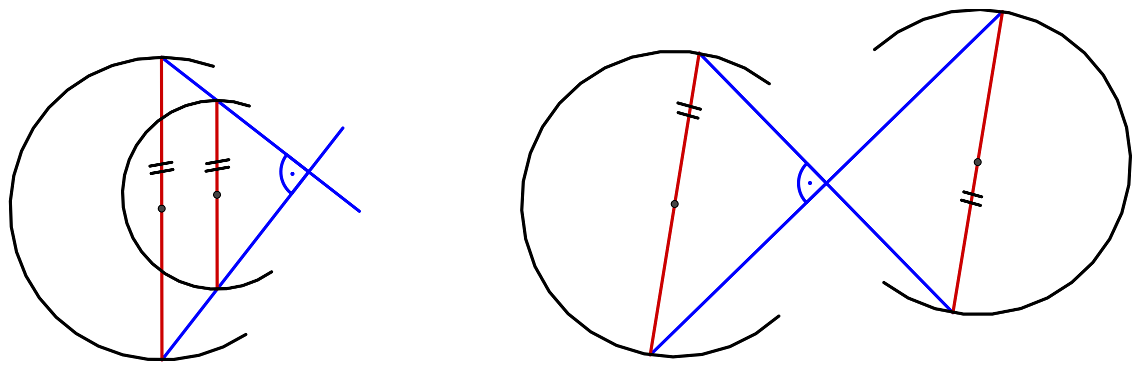
a poloha bodu dotyku F_c kružnic n, e_c poměrem

$$|A_1F_c| : |B_1F_c| : |C_1F_c| = (b+c) : (a+c) : |a-b|.$$

Kapitola 10

Důkaz užitím stejnolehlých průměrů

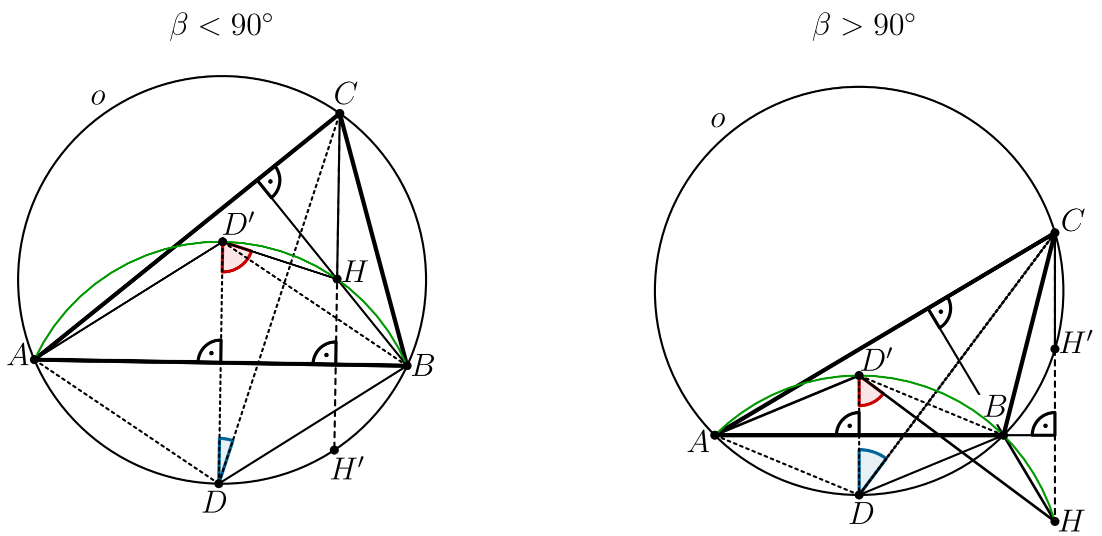
Zajímavý přístup k důkazu Feuerbachovy věty popsal A. E. Elder ve svém příspěvku [Eld] z roku 1960, zveřejněném v rubrice *Classroom Notes* časopisu *Amer. Math. Monthly.* Založil ho na zřejmém poznatku o tom, že máme-li ve dvou kružnicích dánu dvojici navzájem rovnoběžných průměrů, pak tyto kružnice mají vnitřní, resp. vnější dotyk, pokud spojnice krajních bodů těchto průměrů (sestrojené jedním ze dvou různých způsobů, jaké vidíme na obrázku) jsou navzájem kolmé přímky. Jejich průsečík je tehdy totiž jednak společným bodem obou kružnic (díky Thaletově větě), jednak je to střed vnitřní, resp. vnější stejnolehlosti dotyčných průměrů, v níž si tudíž odpovídají i dané kružnice, takže skutečně mají vnitřní, resp. vnější dotyk.



I když je hlavní myšlenka Elderova důkazu, kterou jsme právě uvedli, velmi jednoduchá, při jejím uplatnění se ve dvoustránkovém sdělení [Eld] uvádějí bez důkazu určité nadstandardní poznatky z geometrie rovinného trojúhelníku, konkrétně obecné vlastnosti Simsonových přímek a některé speciální vzorce pro středy a poloměry význačných kružnic, jež s daným trojúhelníkem spojujeme. Abychom učinili náš výklad Elderova postupu přehlednější a pojmově přístupný i čtenářům s běžnou znalostí planimetrie, potřebné méně známé poznatky nejdříve shrneme a dokážeme v pomocném tvrzení.

Lemma. *Nechť ABC je libovolný trojúhelník, ve kterém platí $|AC| \neq |BC|$. Označme H jeho ortocentrum a D střed toho oblouku AB kružnice o opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol C. Pak pro bod D' souměrně sdružený s bodem D podle přímky AB platí $D'H \perp CD$.*

Důkaz: Jako obvykle označme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle CBA|$ a $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Jistě stačí rozebrat případ, kdy $|AC| > |BC|$. Tehdy body C a H leží v polorovině $DD'B$ a platí $\beta > \alpha$, takže $\alpha < 90°$. Věnujme se nejprve případu $\gamma < 90°$, při kterém rozlišíme dvěma obrázky situace, kdy $\beta < 90°$ a kdy $\beta > 90°$ (pro $\beta = 90°$ je zjednodušení výkladu zřejmé). Našim cílem je ukázat, že součet barevně vyznačených úhlů $DD'H$ a CDD' je v obou situacích roven $90°$.



Na obou obrázcích je vykreslen bod $H' \in o$, který je podle Lemmatu 14.1(i) obrazem ortocentra H v souměrnosti podle přímky AB. Pomůže nám k odvození poznatku, že v obou situacích platí rovnost $|\sphericalangle AD'H| = 90° + \alpha$.

▷ Je-li $\beta < 90°$, je tětivový čtyřúhelník $ADH'B$, a tedy i souměrně sdružený čtyřúhelník $AD'HB$. V něm proto platí $|\sphericalangle AD'H| = 180° - |\sphericalangle ABH|$. Po dosazení zřejmé hodnoty $|\sphericalangle ABH| = 90° - \alpha$ už dostáváme $|\sphericalangle AD'H| = 90° + \alpha$.

▷ Je-li $\beta > 90°$, stačí provést tyto změny: Tětivové jsou sdružené čtyřúhelníky $ADBH'$ a $AD'BH$. Do odtud plynoucí rovnosti $|\sphericalangle AD'H| = |\sphericalangle ABH|$ tentokrát dosadíme hodnotu $|\sphericalangle ABH| = 90° + \alpha$.

Vybaveni odvozenou rovností $|\sphericalangle AD'H| = 90° + \alpha$, dokončíme celý důkaz už pro obě situace $\beta < 90°$ a $\beta > 90°$ společně. V kosočtverci $ADBD'$ máme $|\sphericalangle AD'B| = |\sphericalangle ADB| = 180° - \gamma$, takže oba úhly $AD'D$ a BDD' mají poloviční velikost $90° - \frac{1}{2}\gamma$. Pro první vyznačený úhel $DD'H$ tak dostáváme

$$|\sphericalangle DD'H| = |\sphericalangle AD'H| - |\sphericalangle AD'D| = (90° + \alpha) - \left(90° - \tfrac{1}{2}\gamma\right) = \alpha + \tfrac{1}{2}\gamma.$$

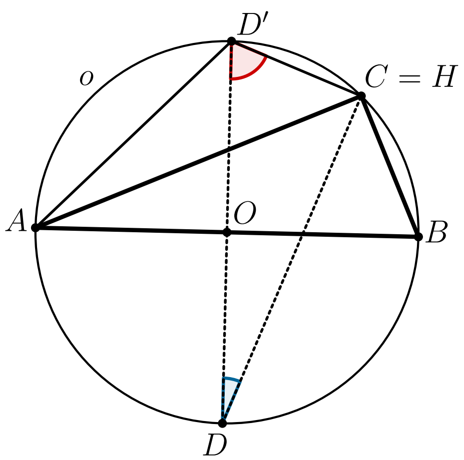
Velikost druhého vyznačeného úhlu CDD' určíme takto:

$$|\sphericalangle CDD'| = |\sphericalangle BDD'| - |\sphericalangle BDC| = \left(90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma\right) - \alpha = 90^\circ - \alpha - \tfrac{1}{2}\gamma.$$

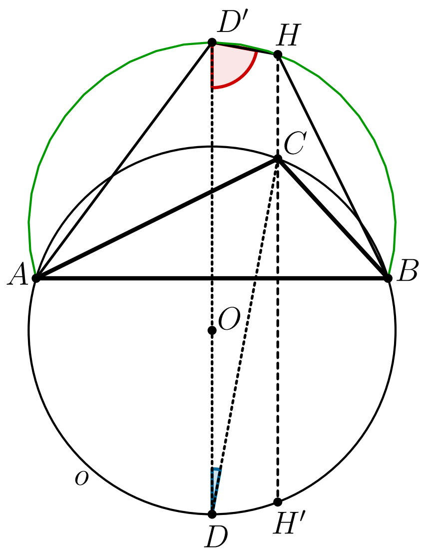
Sečtením obou velikostí obdržíme $|\sphericalangle DD'H| + |\sphericalangle CDD'| = 90^\circ$, jak jsme měli ukázat. Tím je důkaz Lemmatu pro případ $\gamma < 90^\circ$ hotov.

Zbývající případy $\gamma = 90^\circ$ a $\gamma > 90^\circ$ jsou ilustrovány další dvojicí obrázků. Opět jsou na nich vyznačeny rozhodující úhly $DD'H$ a CDD'. Vidíme, že případ $\gamma = 90^\circ$ je díky Thaletově větě triviální. Je také vcelku zřejmé, že případ $\gamma > 90^\circ$ se posoudí obdobně jako případ ostrých úhlů α, β, γ výše, a proto podrobnosti zde uvádět nebudeme.

$\gamma = 90^\circ$



$\gamma > 90^\circ$

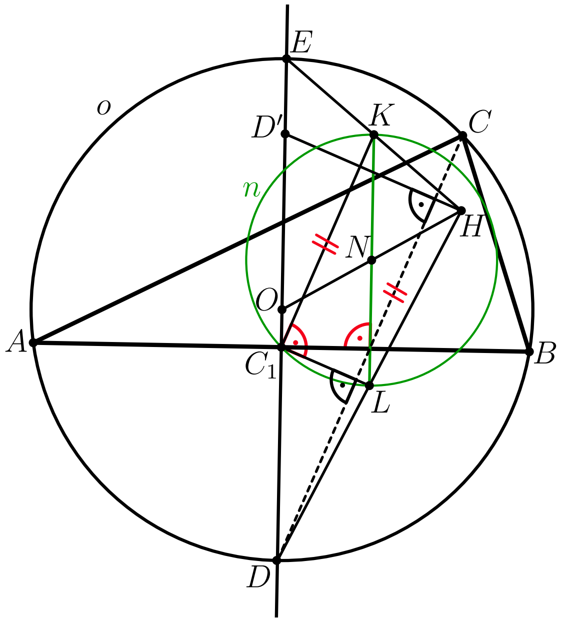


Důkaz Feuerbachovy věty

Nyní jsme připraveni přejít k samotnému Elderově důkazu. Objasněme nejdříve podmínky, za jakých bude veden. Jistě stačí dokázat tvrzení o dotyku kružnice n devíti bodů s kružnicí i vepsanou a s kružnicí e_c připsanou straně AB daného trojúhelníku ABC, a to v netriviálním případě, kdy $|AC| \neq |BC|$, tedy například $|AC| > |BC|$ bez újmy na obecnosti.[1] Ke zmíněným třem kružnicím uplatníme klíčový poznatek z úvodu této kapitoly, když přitom za směr jejich navzájem rovnoběžných průměrů vybereme *směr kolmý ke straně AB*. Nejdříve se zaměříme na takový průměr KL pro kružnici n.

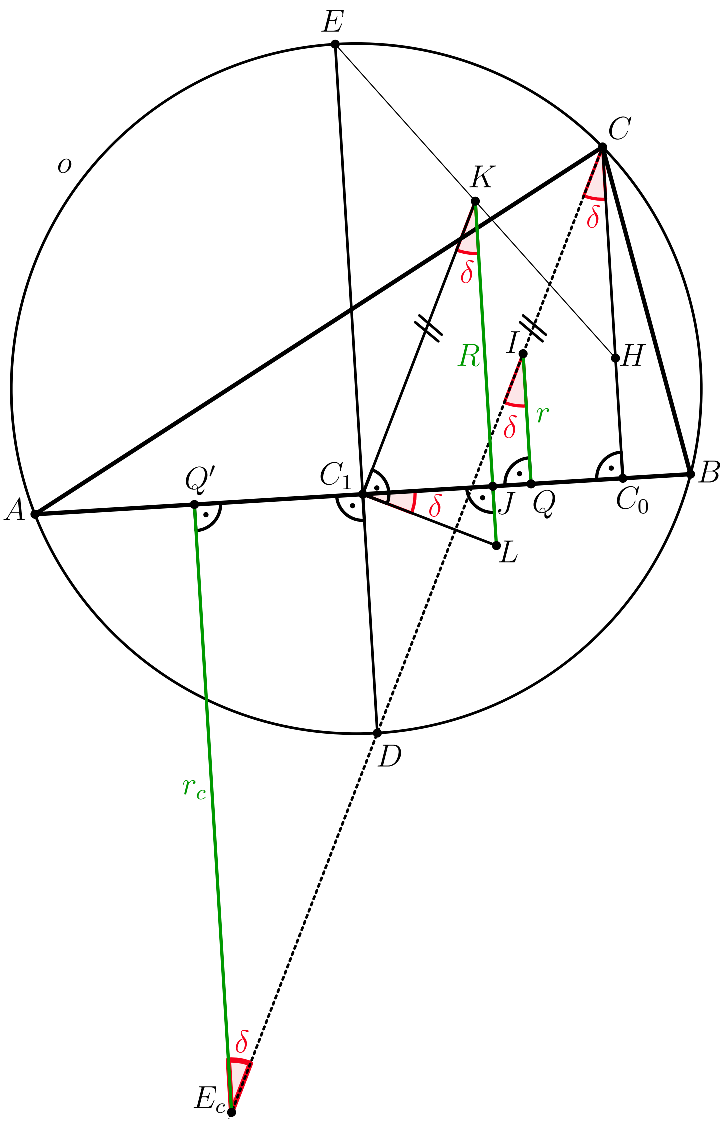
[1]Celý důkaz doprovodíme postupně třemi obrázky. Pořídíme je z rozsahových důvodů pouze pro *ostroúhlý* trojúhelník ABC, i když text podaného výkladu má ve zvoleném případě $|AC| > |BC|$ obecnou platnost (stejně jako dříve odvozené Lemma). Zatímco v původním zdroji [Eld] je důkaz podán jen pro kružnici vepsanou a k variantě pro kružnici připsanou je pouze uvedeno latinské spojení *mutatis mutandis* (česky: *po nezbytných úpravách*), v našem výkladu provedeme důkaz pro obě tyto kružnice současně.

Krajní body K, L zmíněného průměru KL kružnice n určíme způsobem, který ilustrujeme následujícím obrázkem. Ten nám poslouží rovněž k tomu, abychom z dříve dokázaného Lemmatu získali poznatky o průměru KL, které budeme dále potřebovat a které jsou v obrázku vyznačeny červeně. Shrneme je po jejich odvození v závěru odstavce pod obrázkem.



Na obrázku předně vidíme trojúhelník ABC s ortocentrem H, kružnici $o(O,R)$ jemu opsanou a její průměr $DE \perp AB$. Jak víme z kapitoly 1, kružnice $n(N, \frac{1}{2}R)$ je obrazem kružnice o ve stejnolehlosti $(H, \frac{1}{2})$. Zeleně vykreslená střední příčka KL trojúhelníku DHE je tak právě tím průměrem kružnice n, který splňuje kýženou podmínku $KL \perp AB$. Protože jedním z 9 významných bodů kružnice n je střed C_1 strany AB, je podle Thaletovy věty úhel KC_1L pravý. K důkazu další vyznačené kolmosti $C_1L \perp CD$ využijeme Lemma. Podle něho totiž platí $D'H \perp CD$, kde D' je ten bod přímky DE, který je obrazem D v souměrnosti podle přímky AB, a tedy i podle středu C_1. Úsečka C_1L je tudíž střední příčka trojúhelníku DHD', takže $C_1L \parallel D'H$, a proto kromě $D'H \perp CD$ skutečně platí i $C_1L \perp CD$. Zdůrazněme, že z dokázaných kolmostí $KC_1 \perp C_1L$ a $C_1L \perp CD$ budeme dále potřebovat už jen tu první, zatímco namísto druhé kolmosti využijeme její důsledek $KC_1 \parallel CD$.

Odvozené vlastnosti průměru KL jsme vyznačili i v dalším obrázku, rozšířeném o nové body, úsečky a úhly, na které budeme v následném textu po etapách upozorňovat a přitom pro ně odvozovat vztahy potřebné k završení celého důkazu.



Jak jsme slíbili, výklad k tomuto obrázku rozdělíme pro přehlednost do tří etap.

1. Na obrázku jsou vykresleny (kromě DE a KL) další tři úsečky kolmé ke straně AB. Díky našemu předpokladu $|AC| > |BC|$ to zprava doleva jsou: výška z vrcholu C s patou C_0, poloměr IQ kružnice i a poloměr E_cQ' kružnice e_c, přitom body C, I, D, E_c leží v tomto pořadí na ose úhlu ACB. (Poloměry IQ a E_cQ' obou kružnic teprve na závěrečném obrázku prodloužíme na jejich kýžené průměry XQ a $X'Q'$ stejnolehlé s průměrem KL kružnice n.)

2. Bod J na obrázku značí patu výšky z vrcholu C_1 pravoúhlého trojúhelníku KLC_1. Podle Eukleidovy věty tak platí

$$|JC_1|^2 = |KJ| \cdot |LJ|. \tag{10.1}$$

Jelikož bod K je střed úsečky EH, z kolmého promítání na přímku AB plyne, že bod J

je střed úsečky C_1C_0, a proto jak známo platí rovnosti[2]

$$\begin{aligned} |C_1Q| \cdot |QC_0| &= |JC_1|^2 - |JQ|^2, \\ |Q'C_1| \cdot |Q'C_0| &= |JQ'|^2 - |JC_1|^2. \end{aligned} \tag{10.2}$$

3. Konečně je na obrázku rovněž vyznačeno pět úhlů s připsanou velikostí δ (jejich shodnost je zřejmá z vyznačených kolmostí a rovnoběžností). Z pravoúhlého trojúhelníku LKC_1 s výškou C_1J tak máme

$$|LJ| = |LC_1| \cdot \sin\delta = (|KL| \cdot \sin\delta)\sin\delta = |KL| \cdot \sin^2\delta = R \cdot \sin^2\delta. \tag{10.3}$$

Úhel δ rovněž využijeme k určení velikostí kolmých průmětů na přímku AB různých úseček přímky CD. Tak pro kolmé průměty C_1Q a QC_0 úseček DI, resp. IC platí rovnosti $|C_1Q| = |DI| \cdot \sin\delta$ a $|QC_0| = |IC| \cdot \sin\delta$. Jejich vynásobením a užitím Lemmatu 14.5 obdržíme

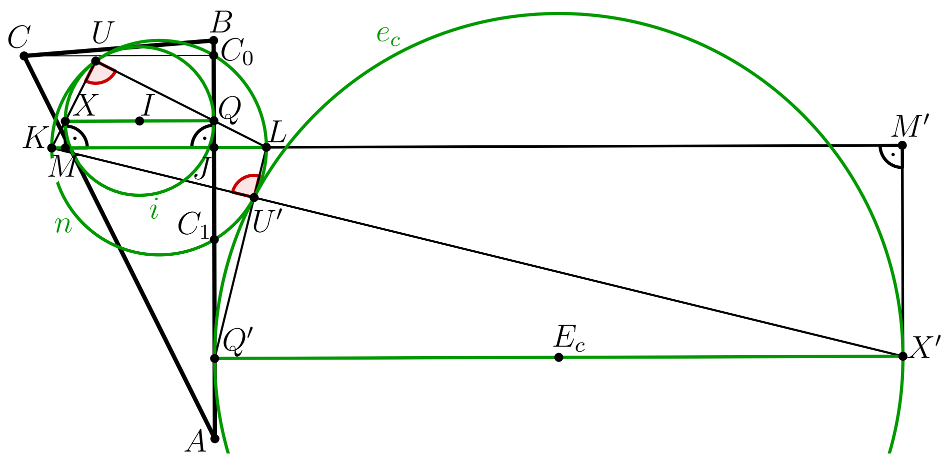
$$|C_1Q| \cdot |QC_0| = |DI| \cdot |IC| \cdot \sin^2\delta = 2Rr \cdot \sin^2\delta. \tag{10.4}$$

Podobně pro kolmé průměty C_1Q' a $Q'C_0$ úseček DE_c, resp. E_cC platí rovnosti $|C_1Q'| = |DE_c| \cdot \sin\delta$ a $|Q'C_0| = |E_cC| \cdot \sin\delta$, ze kterých užitím Lemmatu 14.5 získáme

$$|C_1Q'| \cdot |Q'C_0| = |DE_c| \cdot |E_cC| \cdot \sin^2\delta = 2Rr_c \cdot \sin^2\delta. \tag{10.5}$$

Tím je celý výklad k předchozímu obrázku ukončen.

V tuto chvíli již přejdeme k závěrečnému obrázku a namalujeme do něho naše tři uvažované kružnice s průměry kolmými ke straně AB: kružnici n s průměrem KL, kružnici i s průměrem XQ a kružnici e_c s průměrem $X'Q'$. Podle poznatku o stejnolehlých průměrech, který jsme popsali úvodem této kapitoly, je naším cílem nyní ukázat, že jak spojnice KX a LQ, tak spojnice KX' a LQ' jsou navzájem kolmé. Průsečík prvních (resp. druhých) dvou spojnic je na obrázku označen U (resp. U'); klíčové úhly KUL a $KU'L$ (hypoteticky pravé) jsou na obrázku barevně vyznačeny.



[2]Plynou z mocnosti bodů Q a Q' ke kružnici se středem J a průměrem C_1C_0.

K důkazu rovnosti $|\sphericalangle KUL| = 90°$ uvážíme kolmý průmět MJ průměru XQ na průměr KL (s bodem J jakožto středem úsečky C_0C_1 jsme už pracovali dříve). Zřejmě platí

$$|JQ| = |MX|, \quad |MJ| = |XQ| = 2r \tag{10.6}$$

a $MJXQ$ je pravoúhelník vepsaný do trojúhelníku LUK, takže jeho úhel u vrcholu U bude pravý, pokud ověříme rovnost

$$|\sphericalangle MKX| + |\sphericalangle JLQ| = 90°. \tag{10.7}$$

Za tím účelem z dříve odvozených vztahů sestavíme sérii rovností

$$\begin{aligned} |JQ|^2 + |C_1Q| \cdot |QC_0| &\overset{(10.2)}{=} |JC_1|^2 \overset{(10.1)}{=} |KJ| \cdot |LJ| = \\ = (|KM| + |MJ|) \cdot |LJ| &= |KM| \cdot |LJ| + |MJ| \cdot |LJ| \overset{(10.6),(10.3)}{=} \\ = |KM| \cdot |LJ| + 2r \cdot R \sin^2 \alpha &\overset{(10.4)}{=} |KM| \cdot |LJ| + |C_1Q| \cdot |QC_0|. \end{aligned}$$

Porovnáním obou krajních výrazů (se zcela shodnými druhými sčítanci) obdržíme vztah $|JQ|^2 = |KM| \cdot |LJ|$. Z něho s přihlédnutím k první rovnosti $|JQ| = |MX|$ z (10.6) plyne $|JQ| \cdot |MX| = |KM| \cdot |LJ|$ neboli

$$\frac{|MX|}{|KM|} = \frac{|LJ|}{|JQ|}, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg} |\sphericalangle MKX| = \operatorname{cotg} |\sphericalangle JLQ|.$$

Tím je rovnost (10.7) dokázána.

Podobně k důkazu druhé rovnosti $|\sphericalangle KU'L| = 90°$ uvážíme kolmý průmět $M'J$ průměru $X'Q'$ na přímku KL. Zřejmě platí

$$|JQ'| = |M'X'|, \quad |M'J| = |X'Q'| = 2r_c \tag{10.8}$$

a $M'JQ'X'$ je pravoúhelník s bodem L na straně $M'J$ a bodem K na jejím prodloužení za bod J. Proto úhel $KU'L$ bude pravý, pokud ověříme rovnost

$$|\sphericalangle M'KX'| + |\sphericalangle JLQ'| = 90°. \tag{10.9}$$

Proto z dříve odvozených vztahů sestavíme sérii rovností

$$\begin{aligned} |JQ'|^2 - |C_1Q'| \cdot |Q'C_0| &\overset{(10.2)}{=} |JC_1|^2 \overset{(10.1)}{=} |KJ| \cdot |LJ| = \\ = (|KM'| - |JM'|) \cdot |LJ| &= |KM'| \cdot |LJ| - |JM'| \cdot |LJ| \overset{(10.6),(10.3)}{=} \\ = |KM'| \cdot |LJ| - 2r_c \cdot R \sin^2 \alpha &\overset{(10.5)}{=} |KM'| \cdot |LJ| - |C_1Q'| \cdot |Q'C_0|. \end{aligned}$$

Porovnáním obou krajních výrazů obdržíme vztah $|JQ'|^2 = |KM'| \cdot |LJ|$. Z něho s přihlédnutím k rovnosti $|JQ'| = |M'X'|$ z (10.8) plyne $|JQ'| \cdot |M'X'| = |KM'| \cdot |LJ|$ neboli

$$\frac{|M'X'|}{|KM'|} = \frac{|LJ|}{|JQ'|}, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg} |\sphericalangle M'KX'| = \operatorname{cotg} |\sphericalangle JLQ'|.$$

Tím je důkaz rovnosti (10.9), a tedy i celý důkaz Feuerbachovy věty, hotov.

Kapitola 11

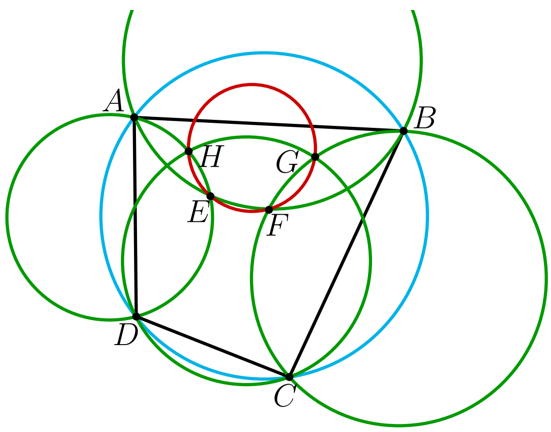
Důkaz užitím kolmostí kružnic

V této kapitole uvedeme poměrně nedávný syntetický důkaz Feuerbachovy věty. Podal ho Jean-Louis Ayme v článku [Aym] z roku 2010. Jeho důkaz je sice poněkud delší, stojí však za pozornost tím, že využívá několik pomocných tvrzení, která jsou zajímavá i sama o sobě. Okruh běžné školské planimetrie je přitom mírně překročen pouze v Lemmatech 4 a 5. Ani tyto výsledky však neuvádíme bez důkazu a objasnění zahrnutých pojmů chordály dvou kružnic a jejich vzájemné kolmosti.

Náš výklad bude prakticky totožný s obsahem zmíněného článku, z něhož uvádíme bez citací i některé historické zajímavosti. Drobným doplněním jsme pouze vylepšili formulaci Lemmatu 1, abychom mohli zkrátit původní důkaz Lemmatu 2.

Stejně jako Jean-Louis Ayme úvodem zmíníme jeden pozoruhodný hluboký výsledek, jehož (neelementární) důkaz prostředky projektivní geometrie lze nalézt například v [R-G, str. 339].

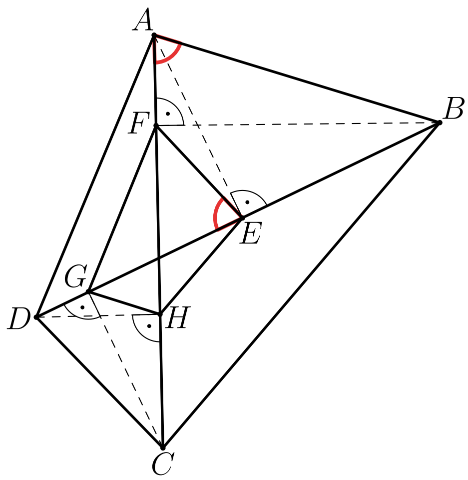
Miquelova věta o šesti kružnicích: *Nad stranami tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ jako nad tětivami jsou sestrojeny čtyři kružnice. Každé dvě sousední z nich mají kromě vrcholu čtyřúhelníku $ABCD$ společný ještě jeden bod. Pak tyto čtyři body (označené na obr. jako E, F, G, H) leží na jedné kružnici.*



V našem důkazu budeme potřebovat pouze speciální případ Miquelovy věty, při kterém jsou čtyři kružnice nad stranami čtyřúhelníku sestrojeny jako nad průměry. Průsečíky těchto čtyř Thaletových kružnic pak můžeme popsat jako kolmé průměty vrcholů čtyřúhelníku na jeho úhlopříčky. Jak dokážeme, tvrzení o těchto čtyřech průmětech lze zesílit do následující podoby.

Lemma 1. *V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$, ve kterém neplatí $AC \perp BD$, označme E, F, G, H kolmé průměty vrcholů na druhou úhlopříčku čtyřúhelníku podle obrázku. Pak tyto body E, F, G, H nejenže leží v tomto pořadí na jedné kružnici, ale navíc čtyřúhelník $EFGH$ je podobný se čtyřúhelníkem $ABCD$. (Odpovídající si vrcholy jsou zapsány v obou čtveřicích na stejném místě.)*

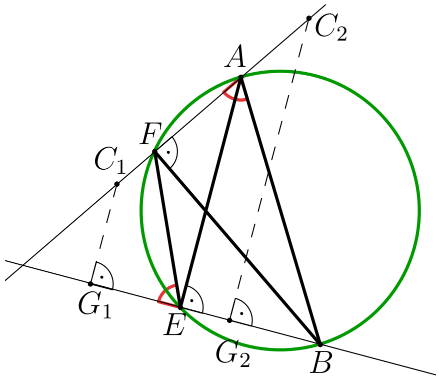
Důkaz: Díky tomu, že neplatí $AC \perp BD$, jsou E, F, G, H čtyři navzájem různé body. Dokážeme pouze, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $EFGH$ se shodují v úhlech BAC a FEG, tedy v úhlech sevřených jednou stranou a jednou úhlopříčkou (se společným krajním bodem A, resp. E). S ohledem na symetrii celé situace to pak bude znamenat, že ve čtyřúhelnících $ABCD$ a $EFGH$ budou shodné všechny další odpovídající si úhly mezi stranami a úhlopříčkami, a tedy půjde o dva navzájem podobné čtyřúhelníky. V důsledku toho bude čtyřúhelník $EFGH$ stejně jako $ABCD$ tětivový.

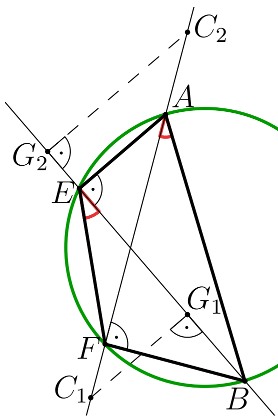


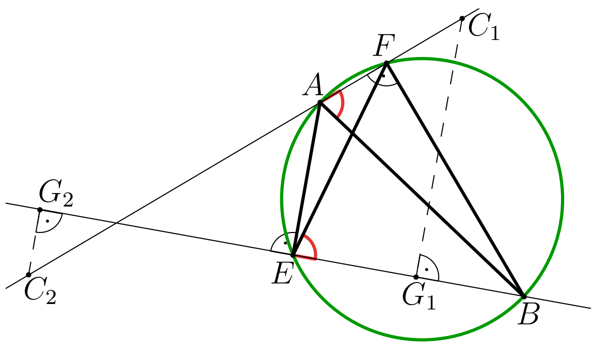
Naším jediným úkolem je tedy dokázat shodnost úhlů BAC a FEG. V situaci z prvního obrázku potřebná rovnost ihned plyne z tětivového čtyřúhelníku $ABEF$:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAF| = 180^\circ - |\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle FEG|.$$

Takto snadno (prostřednictvím úhlů BAF a BEF) se důkaz provede i v ostatních možných situacích. Jak na žádnou nezapomenout? Je třeba uvážit, v jakém pořadí leží trojice bodů (A, F, C) a (B, E, G) na přímkách a čtveřice bodů (A, B, F, E) na kružnici, abychom mohli rozhodnout, zda úhly, které jsou ve hře, tedy úhly ve dvojicích (BAC, BAF), (BAF, BEF) a (BEF, FEG) se rovnají, nebo doplňují do 180°. Úsporný rozbor velkého počtu případů provedeme tak, že je rozdělíme do tří skupin, podle toho zda tětivovým čtyřúhelníkem je $ABEF$, nebo $ABFE$, či $AEBF$. Podle dalších tří obrázků (body A, B, F, E považujme za pevné) už můžeme sami snadno vysvětlit, že bez ohledu na polohu příčky CG přímek AF a BE ($CG \parallel AE$) jsou úhly BAC a FEG vždy shodné; stačí jen rozlišit dvě možnosti, totiž zda bod C leží na polopřímce AF, či na polopřímce k ní opačné; stejný závěr pak zřejmě platí o poloze bodu G vůči polopřímce EB (zástupci obou možností jsou příčky C_1G_1 a C_2G_2, na všech třech obrázcích vybarvené úhly BAC a FEG odpovídají vždy příčce C_1G_1). Tím je úplný důkaz Lemmatu 1 hotov.



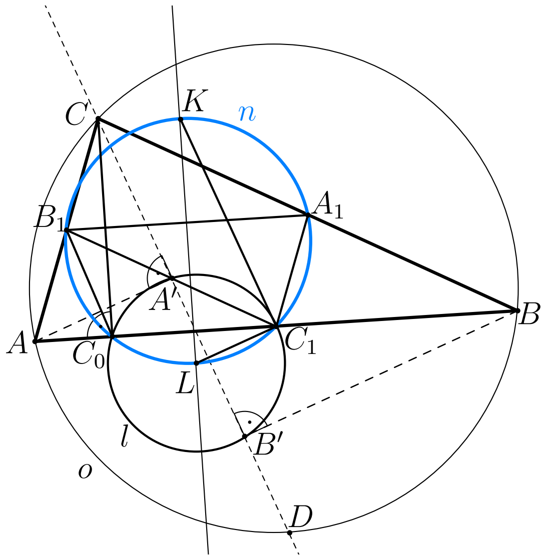




Pro tětivové čtyřúhelníky spojené s obecným trojúhelníkem ABC využijeme dokázané Lemma 1 dvakrát, totiž při důkazech Lemmat 2 a 3. První z těchto poznatků připisuje německý historik matematiky Max Simon dělostřeleckému poručíku Victoru Calabrovi a profesoru Raphaëlu Malloizelovi ze školy Sv. Barbory v Paříži.

Lemma 2. *V trojúhelníku ABC, ve kterém $|AC| \neq |BC|$, označme A', B' paty kolmic po řadě z vrcholů A, B na osu úhlu při vrcholu C. Pak body A', B' leží s body C_0, C_1 na jedné kružnici a střed L této kružnice je středem toho oblouku C_1C_0 kružnice devíti bodů, na kterém neleží body A_1, B_1.*[1]

Důkaz: Označme D průsečík kružnice o opsané trojúhelníku ABC s osou úhlu u vrcholu C. Z rovnosti obvodových úhlů BCD a ACD plyne, že bod D je středem oblouku AB, a tudíž C_1 je kolmý průmět D na AB. Díky $|AC| \neq |BC|$ neplatí $AB \perp CD$. Proto je možné k tětivovému čtyřúhelníku $ADBC$ uplatnit Lemma 1. Podle něho jsou čtyřúhelníky $ADBC$ a $A'C_1B'C_0$ podobné, takže i druhému z nich lze opsat kružnici, kterou označíme l (obr.). Zbývá dokázat, že středem kružnice l je právě bod L z formulace Lemmatu. Tento bod L jakož to střed oblouku C_0C_1 kružnice n jistě leží na ose úsečky C_0C_1, proto stačí ukázat, že leží také na ose úsečky $A'B'$.



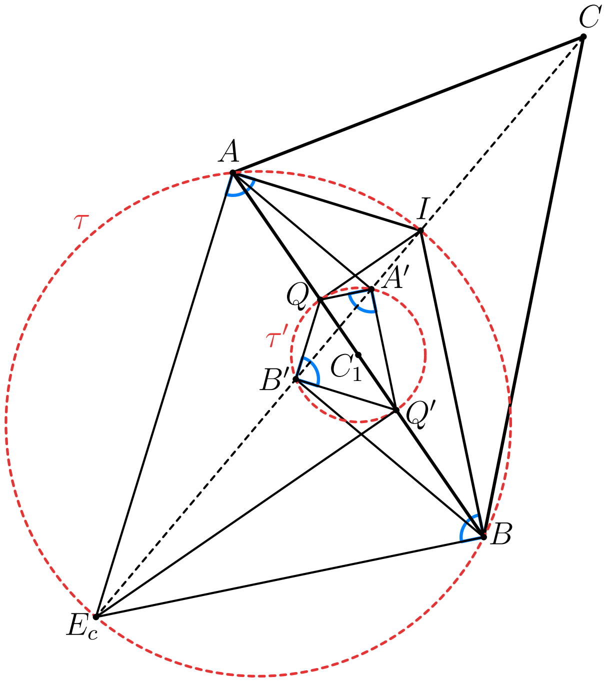
Označme K střed druhého oblouku $C_0A_1C_1$ kružnice n. Protože tětivy C_1C_0 a B_1A_1 kružnice n jsou rovnoběžné, mají společnou osu, takže bod K je středem jejího oblouku B_1A_1, a proto jeho spojnice s třetím vrcholem C_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ tvoří osu úhlu $A_1C_1B_1$. Jelikož čtyřúhelník $A_1CB_1C_1$ je rovnoběžník, jsou osy C_1K a CD dvou jeho protějších úhlů u vrcholů C_1, C rovnoběžné, tj. $C_1K \parallel CD$. Z Thaletovy věty pro kružnici n s průměrem KL plyne $C_1L \perp C_1K$, takže podle předchozího závěru také platí $C_1L \perp CD$ neboli $C_1L \perp A'B'$.

Podobnost čtyřúhelníků $ADBC$ a $A'C_1B'C_0$ zaručuje, že spolu s zřejmou rovností $|DA| = |DB|$ platí také $|C_1A'| = |C_1B'|$, tudíž bod C_1 leží a ose úsečky $A'B'$. Díky $C_1L \perp A'B'$ leží na této ose i bod L, jak jsme potřebovali dokázat.

[1] V této rozsáhlejší kapitole využíváme dohodnutá značení významných bodů a kružnic obecného trojúhelníku ABC bez jejich úvodních připomenutí. Jejich zavedení lze najít v kapitole 1 a význam ověřit v Seznamu užitých značení.

Lemma 3. *V trojúhelníku ABC, ve kterém $|AC| \neq |BC|$, označme A', B' paty kolmic po řadě z vrcholů A, B na osu úhlu při vrcholu C a Q, Q' body dotyku strany AB po řadě s kružnicí vepsanou a kružnicí připsanou ke straně AB. Pak body A', B' leží na kružnici s průměrem QQ' a středem C_1 .*

Důkaz:



Na obrázku jsou vykresleny kromě bodů A', B', Q a Q' také úsečky IQ a E_cQ' kolmé ke straně AB, které jsou poloměry zmíněných kružnic i, resp. e_c. Vrcholy A, B leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem IE_c, neboť jak polopřímky AI a AE_c, tak polopřímky BI a BE_c, jsou osami dvou vedlejších úhlů – osami, které jsou vždy navzájem kolmé (pravé úhly na obrázku značíme modře). Čtyřúhelník AE_cBI je tak tětivový, navíc díky $|AC| \neq |BC|$ neplatí $AB \perp IE_c$. Aplikací Lemmatu 1 dostáváme podobnost čtyřúhelníků AE_cBI a $A'Q'B'Q$, takže i v druhém z nich vrcholy A', B' leží na Thaletově kružnici τ' nad průměrem QQ'. Jejím středem je skutečně střed C_1 strany AB, neboť body dotyku Q a Q' jsou (viz Lemma 14.2) podle bodu C_1 souměrně sdružené. Tím je důkaz hotov.

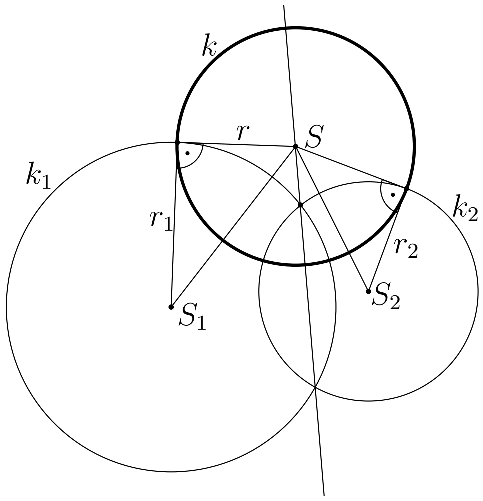
Roku 1813 francouzský geometr Louis Gaultier, během svého studia na École Polytechnique v Paříži, napsal monografii nazvanou *Les contacts des cercles*, ve které poukázal na jednu pozoruhodnou vlastnost *chordály* dvou kružnic. Připomeňme, že jde o přímku tvořenou právě těmi body, které mají k daným dvěma nesoustředným kružnicím stejnou mocnost; v případě protínajících se kružnic tato přímka prochází oběma jejich průsečíky.[2] Vysvětleme ještě, že dvě protínající kružnice se nazývají *nav-*

[2] Větu o chordále i s důkazem lze najít v české brožuře [Hor, str. 53–57].

zájem kolmé, mají-li ve svém průsečíku navzájem kolmé tečny.

Lemma 4. *a) Každá kružnice kolmá ke dvěma daných kružnicím má střed na chordále těchto kružnic.*
b) Pokud na chordále dvou kružnic má střed třetí kružnice a je kolmá k jedné z nich, pak je kolmá i ke druhé z nich.

Důkaz: Dané kružnice označme $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a libovolnou další $k(S, r)$.



a) Z kolmostí $k \perp k_1$, $k \perp k_2$ dostáváme $|SS_1|^2 = r_1^2 + r^2$ a $|SS_2|^2 = r_2^2 + r^2$. Odtud vyloučením hodnoty r^2 vychází $|SS_1|^2 - r_1^2 = |SS_2|^2 - r_2^2$. Bod S tak má stejnou mocnost ke kružnicím k_1 a k_2, leží tedy na jejich chordále.

b) Leží-li bod S na chordále kružnic k_1 a k_2, má k nim stejnou mocnost, tedy $|SS_1|^2 - r_1^2 = |SS_2|^2 - r_2^2$. Z $k \perp k_1$ plyne $|SS_1|^2 = r_1^2 + r^2$. Vyloučením r_1^2 z obou rovností dostaneme $|SS_2|^2 = r^2 + r_2^2$, tedy $k \perp k_2$.

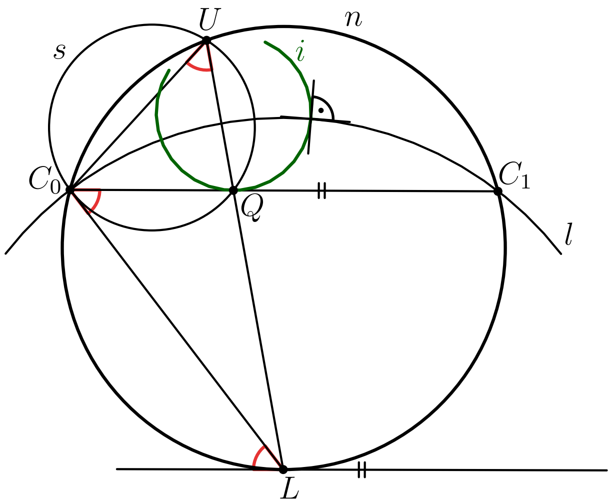
V závěrečném Lemmatu 5 nebude řeč o trojúhelníku ABC, ale označení jeho některých prvků ponesou zastoupené body a kružnice, ke kterým při důkazu Feuerbachovy věty dotyčný výsledek uplatníme.

Lemma 5. *Je dána kružnice n a její tětiva C_0C_1. Střed jednoho oblouku C_0C_1 kružnice n označme L. Nechť l je kružnice se středem L procházející body C_0, C_1.*
a) Uvnitř úsečky C_0C_1 je dán bod Q. Označme U druhý průsečík přímky LQ s kružnicí n. Předpokládejme, že i je taková kružnice, která se dotýká úsečky C_0C_1 v bodě Q a která je kolmá ke kružnici l.[3] Pak kružnice i má vnitřní dotyk s kružnicí n v bodě U.
b) Na polopřímce opačné k polopřímce C_1C_0 je dán bod Q'. Označme U' druhý průsečík přímky LQ' s kružnicí n a předpokládejme, že e_c je taková kružnice, která se dotýká přímky C_0C_1 v bodě Q' a která je kolmá ke kružnici l. Pak kružnice e_c má vnější dotyk

[3]Existenci a jednoznačnost kružnice i zatím neposuzujeme. Totéž se týká kružnice e_c z části b).

s kružnicí n v bodě U'.

Důkaz: a) Označme s kružnici procházející body C_0, Q, U. V první části důkazu ukážeme, že kružnice s a i mají kromě bodu Q také společný bod U, vedle bodu C_0 druhý průsečík kružnic s a n.



V kružnici n je pro tětivu C_0L vyznačený úsekový úhel s vrcholem L shodný s obvodovým úhlem LUC_0. S nimi je shodný i třetí vyznačený úhel C_1C_0L, a to díky rovnoběžnosti přímky C_0C_1 s tečnou v bodě L. Nyní z rovnosti $|\sphericalangle QUC_0| = |\sphericalangle QC_0L|$ vyplývá, že přímka C_0L je tečna ke kružnici s v bodě C_0. Avšak úsečka C_0L je poloměrem kružnice l, takže kružnice l, s jsou navzájem kolmé.

Podle předpokladu jsou rovněž kružnice l, i navzájem kolmé, takže podle Lemmatu 4a) střed L kružnice l leží na chordále kružnic s a i, která prochází jejich společným bodem Q. Proto je touto chordálou přímka LQ, která ovšem obsahuje bod U kružnice s, jenž je proto i bodem kružnice i. Bod U je tak rovněž společným bodem kružnic n a i.

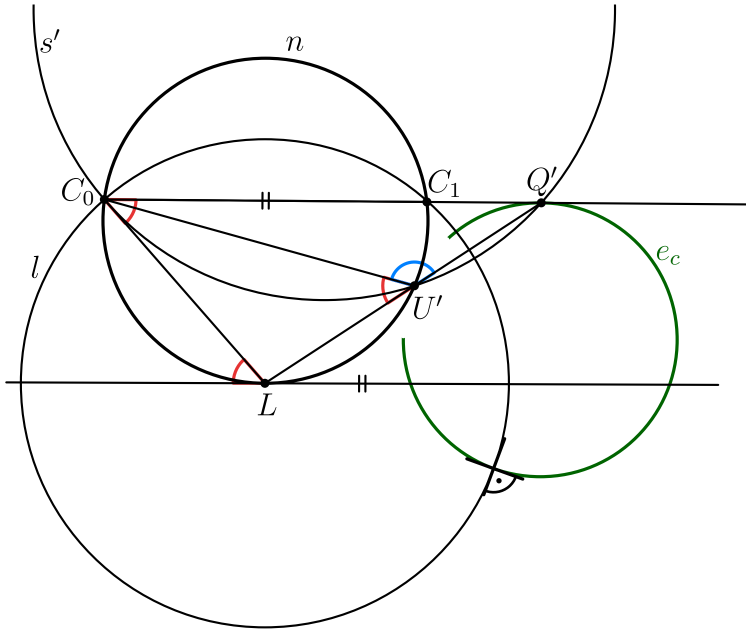
Teprve nyní využijeme předpoklad, že kružnice i má v bodě Q za tečnu přímku C_0C_1 rovnoběžnou s tečnou ke kružnici l v bodě L. Proto ve stejnolehlosti se středem U a kladným koeficientem, při které se bod Q zobrazí do bodu L, přejde kružnice i v kružnici, která prochází body U a L a ve druhém z nich má stejnou tečnu jako kružnice n. Protože těmito podmínkami je zmíněná kružnice jednoznačně určena, musí to být kružnice n. Stejnolehlé kružnice i a n tak mají v bodě U vnitřní dotyk. Důkaz části a) je hotov.

b) Uvažujme kružnici s' procházející body C_0, U', Q'. Nejprve ukážeme, že bod U', vedle bodu C_0 druhý průsečík kružnic s' a n, je společným bodem kružnic s' a e_c.

Podobně jako v části a) úvahou o tětivě C_0L kružnice n a její tečně v bodě L získáme shodnost tří červeně vyznačených úhlů na dalším obrázku. K jednomu z nich, úhlu $LU'C_0$, je modře vyznačen vedlejší úhel $C_0U'Q'$, který je v kružnici s' obvodovým úhlem nad tětivou C_0Q'. Platí tedy

$$|\sphericalangle Q'C_0L| = 180^\circ - |\sphericalangle C_0U'Q'|,$$

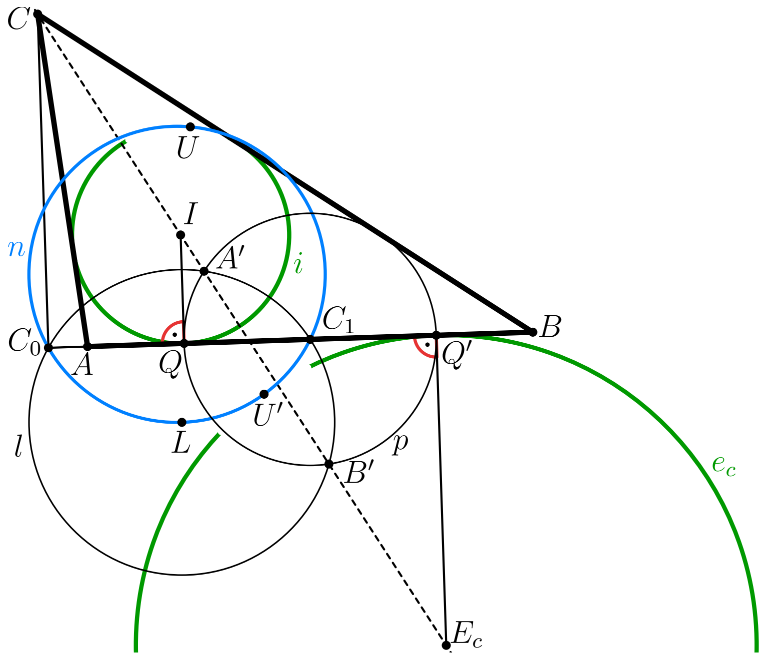
úhel $Q'C_0L$ je tak shodný s obvodovým úhlem, který v kružnici s' přísluší oblouku $C_0U'Q'$.



Přímka C_0L je tudíž tečna ke kružnici s', která navíc prochází středem L kružnice l. Kružnice l a s' jsou tedy kolmé. Ke kružnici l je však podle předpokladu kolmá i kružnice e_c, z čehož podle Lemmatu 4a) plyne, že střed L leží na společné chordále kružnic s' a e_c, která prochází bodem Q'. Touto chordálou je tedy přímka LQ', která ovšem obsahuje bod U' kružnice s', jenž je tudíž bodem kružnice e_c. Víme, že kružnice e_c má v bodě Q' za tečnu přímku C_0C_1 rovnoběžnou s tečnou ke kružnici l v bodě L. Proto ve stejnolehlosti se středem U' a záporným koeficientem, při které se bod Q' zobrazí do L, přejde kružnice e_c jednoznačně v kružnici n. Stejnolehlé kružnice e_c a n mají tedy v bodě U' vnější dotyk, jak jsme chtěli dokázat.

Důkaz Feuerbachovy věty

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom krátkým výkladem podali důkaz o vnitřním dotyku kružnice n devíti bodů s kružnicí i trojúhelníku ABC vepsanou. Budeme přitom předpokládat, že platí $|AC| \neq |BC|$, a zachováme označení všech významných bodů z předchozích lemmat (viz další obrázek). Podle Lemmatu 2 víme, že body B', A', C_1, C_0 leží na kružnici l, jež má střed v bodě L (střed oblouku C_1C_0 kružnice n). V Lemmatu 3 jsme zjistili, že body Q, B', Q', A' leží na kružnici se středem C_1, již nazveme p. Tato kružnice je kolmá ke kružnici i, neboť $IQ \perp QC_1$.



Protože kružnice p a i jsou kolmé a střed I kružnice i leží na společné chordále $A'B'$ kružnic l a p, jsou podle Lemmatu 4b) rovněž kružnice i a l kolmé. Kružnice i, l a n splňují podmínky Lemmatu 5a), a proto kružnice n a i mají skutečně vnitřní dotyk.

Obdobný důkaz pro vnější dotyk kružnice n s kružnicí e_c trojúhelníku ABC připsanou pouze stručně naznačíme. Využijeme stejnou kružnici p jako v předchozím důkazu. Pro ni totiž platí nejen $p \perp i$, ale také $p \perp e_c$, neboť $E_cQ' \perp Q'C_1$. Jelikož kružnice p a e_c jsou kolmé a střed E_c kružnice e_c leží na společné chordále $A'B'$ kružnic l a p, jsou tudíž kolmé i kružnice e_c a l. Podle Lemmatu 5b) tak mají kružnice n a e_c skutečně vnější dotyk.

Poznámka. Výklad článku [Aym] doplňme o jednu historickou zajímavost, která v něm chybí. Klíčové kolmosti $l \perp i$ a $l \perp e_c$ z Aymeho důkazu Feuerbachovy věty dokázal odlišným postupem již roku 1861 J. Casey[4] (viz [Cas, str. 105–106]), aby je využil ke svému krátkému důkazu Feuerbachovy věty, založenému na tehdy již existující teorii *kruhové inverze*. Casey uplatnil toto zobrazení s řídící kružnicí l: K ní kolmé kružnice i a e_c jsou totiž v této inverzi samodružné, zatímco obrazem jejich společné tečny AB je zřejmě kružnice n (neboť právě ta prochází středem inverze L a samodružnými body C_1, C_0 přímky AB). Tento důkaz Feuerbachovy věty do naší kapitoly 12 o kruhových inverzích ovšem nezařadíme, neboť Caseyovy důkazy kolmostí $l \perp i$ a $l \perp e_c$ jsou velice náročné – pro komplikované úvahy o mocnostech bodů ke kružnicím i a e_c využívají mimo jiné Lemma 1 z kapitoly 10 a Lemma 14.3. Místo toho ve zmíněné kapitole o kruhových inverzích dáme přednost dvěma jednodušším

[4]John Casey (1820–1891), irský geometr, profesor Katolické univerzity v Dublinu, proslul svými články, učebnicemi a komentovaným překladem prvních šesti knih Eukleidových základů, doplněných rozsáhlými kolekcemi vlastních i převzatých příkladů a cvičení.

postupům, které jsou i díky tomu známější z různých knižních publikací.

Kapitola 12

Důkazy pomocí kruhové inverze

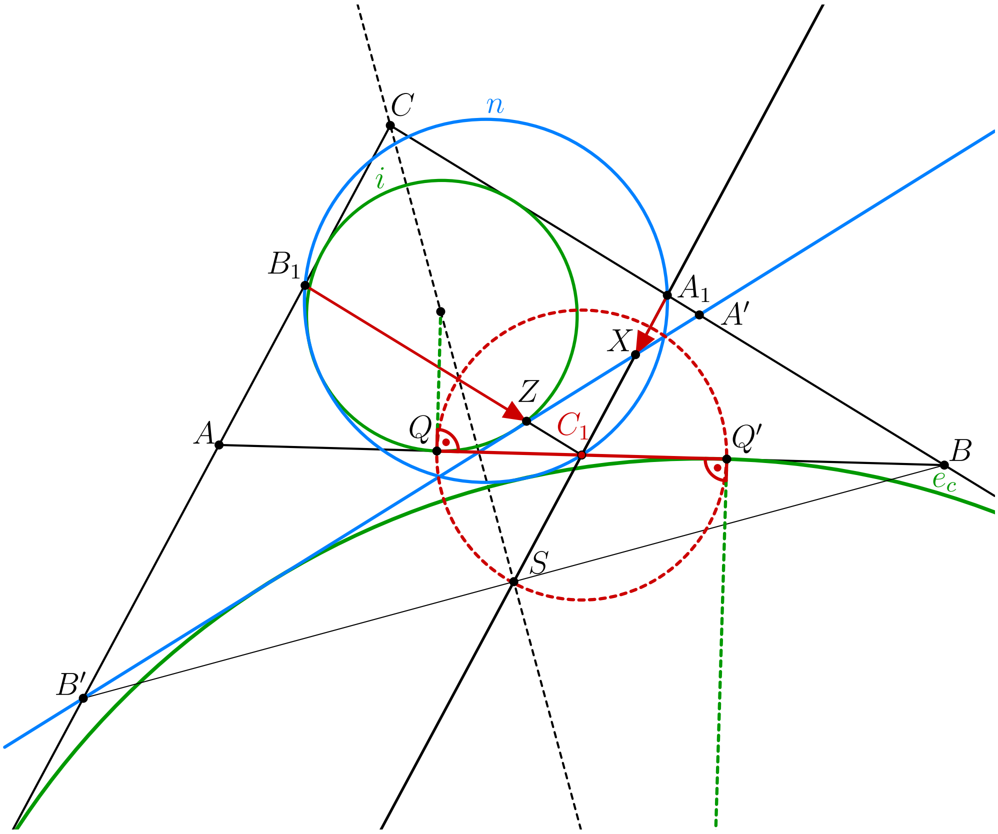
V této kapitole se podíváme na dva zajímavé důkazy Feuerbachovy věty využitím kruhové inverze, jež se nám podařilo v literatuře najít. První z nich je uváděn častěji a mnozí geometři jej považují za nejpřirozenější postup, jakým uchopit problematiku Feuerbachovy věty. Využívá totiž (stejně jako druhý důkaz, který uvedeme) pouze základní, běžně známé vlastnosti kruhové inverze. Ty nyní pouze zformulujeme, aniž bychom připomínali obecnou definici tohoto zobrazení, kterou lze nalézt v [B-Z, str. 93]. Omezíme se přitom jen na takové kruhové inverze, jež mají kružnici samodružných bodů, kterou nazveme *řídící kružnicí* dané inverze. První vlastností je, že obrazem každé zobecněné kružnice (tj. přímky nebo kružnice) v kruhové inverzi je opět zobecněná kružnice. Kromě toho se při zobrazování v kruhové inverzi zachovává odchylka mezi libovolnými dvěma protínajícími se zobecněnými kružnicemi (určená jako úhel mezi jejími tečnami ve společném bodě). Konečně zásadní význam pro nás bude mít následující třetí vlastnost: V dané kruhové inverzi se zobrazí sama na sebe každá kružnice, která je k řídící kružnici této inverze kolmá (viz [Alt, str. 234], [Joh, str. 50]).

První důkaz

Jedná se o známější ze dvou užití kruhové inverze k tomuto účelu, které lze najít v knihách [Jef, str. 13–14], [C-G, str. 117–119] a sbírce [Pra, úloha 28.29, str. 452 a 460].

Mějme tedy dán trojúhelník ABC a uvažme jeho kružnici n devíti bodů. Ta je jako každá kružnice určena třemi svými body, za které vybereme středy A_1, B_1, C_1 stran BC, AC, resp. AB. Kružnice n tak bude kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Naším cílem je ukázat, že kružnice n má vnitřní dotyk s kružnicí i vepsanou trojúhelníku ABC (neplatí-li $n = i$) a vnější dotyk se všemi třemi jemu připsanými kružnicemi. Z toho druhého (s ohledem na symetrii situace) dokážeme pouze vnější dotyk kružnice n s kružnicí e_c připsanou ke straně AB.

Vytyčený cíl je triviální v případě $|AC| = |BC|$. Tehdy totiž díky zřejmé osové souměrnosti mají kružnice n a e_c vnější dotyk v bodě C_1, který je zároveň i bodem vnitřního dotyku kružnic n a i (neplatí-li $n = i$). Budeme proto dále bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí například $|BC| > |AC|$, jak je tomu na následujícím obrázku.



Co vše (kromě kružnice n určené středy A_1, B_1, C_1) je na obrázku vykresleno a označeno? Přímka AB je společnou vnitřní tečnou kružnic i a e_c s body dotyku označenými po řadě Q a Q'. K vrcholům A, B jsou sestrojeny jejich obrazy A', B' v souměrnosti podle osy úhlu ACB. Body A', B' tak leží po řadě na polopřímkách CB, CA a modře vykreslená přímka $A'B'$ je druhou společnou vnitřní tečnou kružnic i a e_c. Tato tečna protíná přímky C_1A_1 a C_1B_1 v bodech, které jsou označeny po řadě X a Z.

Protože podle Lemmatu 14.2 mají úsečky AQ, BQ' tutéž délku $\frac{1}{2}(b + c - a)$, kde a, b, c jsou obvykle značené délky stran, díky našemu předpokladu $a > b$ a rovnostem $|C_1A| = |C_1B| = \frac{1}{2}c$ platí

$$|C_1Q| = |C_1Q'| = \tfrac{1}{2}(a - b).$$

Existuje tedy kružnice červeně vykreslená na obrázku: má střed v bodě C_1, který je i středem jejího průměru QQ'. Jak dále ověříme, kruhová inverze s touto řídící kružnicí má následující vlastnosti:

(1) Každá z kružnic i, e_c se zobrazí sama na sebe.

(2) Body A_1, B_1 se zobrazí po řadě na body X, Z (jak je vyznačeno šipkami na obrázku).

Odložme na chvíli důkaz vlastností (1) a (2) a ukažme, jak z nich plyne to, co máme dokázat. Protože kružnice n prochází středem C_1 uvažované inverze a obrazy dalších dvou jejích bodů A_1, B_1 jsou podle (2) body X, Z přímky $A'B'$, je tato přímka obrazem kružnice n. To spolu s vlastností (1) znamená, že obrazem uspořádané trojice útvarů $(i,\ e_c,\ n)$ je trojice útvarů $(i,\ e_c,\ \overleftrightarrow{A'B'})$. Protože v druhé trojici je přímka společnou vnitřní tečnou obou kružnic, má v první trojici kružnice n dotyk s oběma ostatními kružnicemi i a e_c. K určení druhů těchto dotyků si uvědomme, že obrazem poloroviny s hraniční přímkou $A'B'$ je v naší inverzi buď vnější, nebo vnitřní oblast kružnice n, a to podle toho, zda dotyčná polorovina obsahuje střed C_1 uvažované inverze či nikoliv. Protože díky předpokladu $a > b$ leží střed C_1 ve stejné polorovině s hranicí $\overleftrightarrow{A'B'}$ jako kružnice e_c, zatímco kružnice i leží v polorovině opačné, leží kružnice e_c (resp. i) tudíž ve vnější (resp. vnitřní) oblasti kružnice n, jejich dokázaný dotyk je tak vnější (resp. vnitřní).

Zbývá tedy dokázat vlastnosti (1) a (2). Pro první z nich je to snadné: řídící kružnice je skutečně kolmá k oběma kružnicím i a e_c, neboť krajní body průměru QQ' řídící kružnice jsou kolmými průměty středů kružnic i, e_c na přímku QQ'. K důkazu (2) označme S střed úsečky BB'. Protože C_1S a A_1S jsou střední příčky trojúhelníků ABB', resp. CBB', leží bod C_1 na úsečce A_1O tak, že platí

$$|C_1S| = \tfrac{1}{2}|AB'| = \tfrac{1}{2}(|CB'| - |CA|) = \tfrac{1}{2}(a-b) = |C_1Q|.$$

(Znamená to, že bod S leží na řídící kružnici naší inverze.) Díky tomu, že $CB' \parallel A_1S$ a že přímky AB, $A'B'$ a CS procházejí jedním (na obrázku neoznačeným) bodem, máme k dispozici několik dvojic podobných trojúhelníků, ze kterých vyčteme, že

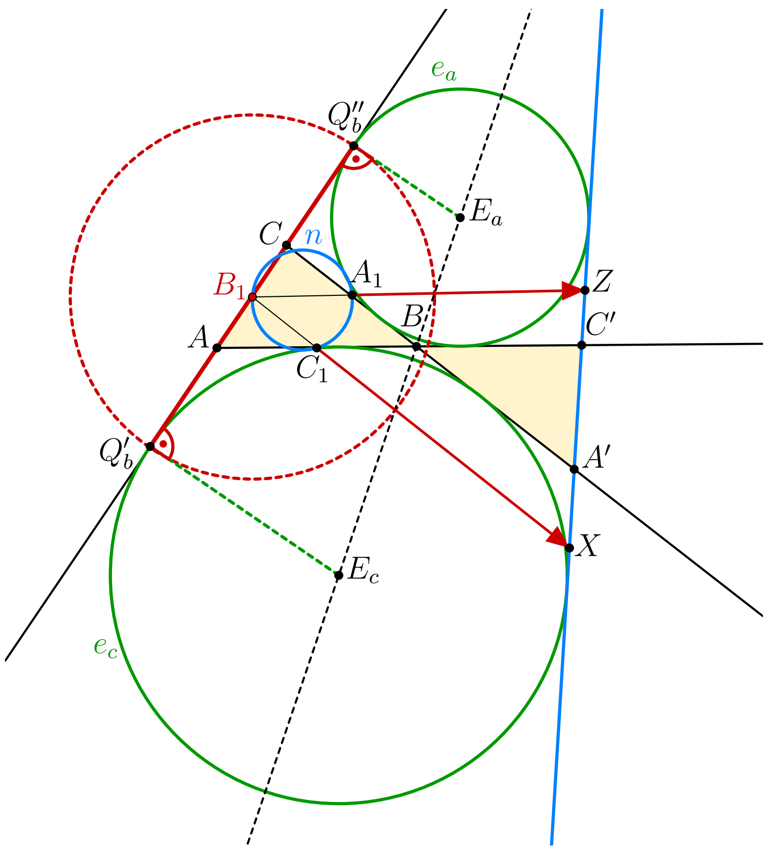
$$|C_1X| : |C_1S| = |AB'| : |AC| = |C_1S| : |C_1A_1|.$$

Z rovnosti krajních poměrů plyne $|C_1X| \cdot |C_1A_1| = |C_1S|^2 = |C_1Q|^2$. To už znamená, že v naší kruhové inverzi se bod A_1 zobrazí na bod X.
Podobně lze získat rovnost $|C_1Z| \cdot |C_1B_1| = |C_1Q|^2$, podle které se bod B_1 zobrazí na bod Z. Tím je celý důkaz ukončen.

Druhý důkaz

Nyní uvedeme důkaz, který je uveden v knihách [Joh, str. 203–204], [Ped, str. 9–10] a ve sbírce [D-Ž, úloha 296, str. 32 a 200–202]. Po zkušenostech s prvním důkazem však stojí za to už nyní oba postupy porovnat. Zatímco kruhová inverze z prvního důkazu přinesla ověření dotyku kružnice devíti bodů s vepsanou kružnicí a jednou ze tří připsaných kružnic daného trojúhelníku, kruhová inverze z druhého důkazu povede k potřebnému výsledku pro libovolné dvě ze tří připsaných kružnic. *Avšak pro vepsanou kružnici uplatnění nenachází.* Hlavní myšlenka obou důkazů je zato stejná: Pro vybrané dvě kružnice, jejichž dotyk s kružnicí devíti bodů chceme dokázat, hledáme kruhovou inverzi, při které se každá z obou vybraných kružnic zobrazí sama na sebe a současně se kružnice devíti bodů zobrazí na přímku, která je společnou tečnou těchto kružnic.

V souladu s předchozím odstavcem nyní zahájíme důkaz tvrzení, že kružnice připsané k libovolným dvěma stranám obecného trojúhelníku ABC, řekněme ke stranám AB a BC, mají vnější dotyk s jeho kružnicí devíti bodů. Tu stejně jako obvykle označíme n a budeme ji i zde interpretovat jako kružnici opsanou příčkovému trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Ve srovnání s prvním důkazem bude mít nový důkaz jednu výhodu: Zvolený výběr stran AB, BC a další výklad je univerzální, tj. použitelný pro jakýkoliv trojúhelník ABC (bez ohledu na porovnání délek a, b, c jeho stran). K tomuto výkladu využijeme následující obrázek.



Na obrázku vidíme kružnice e_c, e_a připsané stranám AB, BC trojúhelníku ABC. Jejich středy E_c, E_a leží na vykreslené ose vnějšího úhlu při vrcholu B. Dále Q_b', Q_b'' značí body dotyku těchto kružnic s prodloužením strany AC, body C', A' jsou obrazy bodů C, A v osové souměrnosti podle přímky E_aE_c. Protože přímka CA je společnou vnější tečnou kružnic e_c, e_a, je jejich společnou vnější tečnou i modře vykreslená přímka $A'C'$. Tato přímka protíná různoběžku B_1C_1 (resp. A_1B_1) v bodě X (resp. Z). Dodejme ještě jeden důležitý poznatek: Přímky BC, AB jakožto společné vnitřní tečny kružnic e_c, e_a si odpovídají v již zmíněné osové souměrnosti podle přímky E_aE_c, takže body A', C' leží po řadě na polopřímkách CB, AB – tudíž bod B je průsečíkem úseček CA' a AC'.

Podle Lemmatu 14.2 víme, že obě úsečky AQ'_b a CQ''_b mají tutéž délku rovnu $\frac{1}{2}(a+c-b)$. Odtud plyne, že střed B_1 strany CA je rovněž středem úsečky $Q'_bQ''_b$ a přitom platí

$$|B_1Q'_b| = |B_1Q''_b| = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}(a + c - b) = \tfrac{1}{2}(a + c).$$

Nalezli jsme tedy kružnici, jež je červeně vykreslená na obrázku: má střed B_1, průměr $Q'_bQ''_b$ a poloměr rovný $\frac{1}{2}(a + c)$. To bude řídící kružnice naší kruhové inverze, o které ukážeme, že má vlastnosti obdobné jako inverze z prvního důkazu:

(1) Každá z kružnic e_a, e_c se zobrazí sama na sebe.

(2) Body C_1, A_1 se zobrazí po řadě na body X, Z (jak je vyznačeno šipkami na obrázku).

Analogicky jako v prvním důkazu tyto dvě vlastnosti vedou z závěru, že kružnice n jakožto obraz společné tečny $A'C'$ kružnic e_a, e_c bude mít s těmito kružnicemi dotyk, v obou případech vnější, neboť střed inverze B_1 leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou $A'C'$ jako obě kružnice e_a, e_c, které tudíž leží ve vnější oblasti kružnice n.

Důkaz vlastnosti (1) je snadný, neboť $B_1Q''_b \perp E_aQ''_b$ a $B_1Q'_b \perp E_cQ'_b$. Řídící kružnice je tedy skutečně kolmá k oběma kružnicím e_a i e_c, jak jsme měli ukázat.

K důkazu vlastnosti (2) pro bod C_1 vyjdeme z faktu, že $B_1C_1 \parallel BC$. Odtud spolu s tím, že bod B leží na úsečce CA', plyne podobnost trojúhelníků $C_1C'X$ a $BC'A'$, díky které platí

$$|C_1X| : |BA'| = |C_1C'| : |BC'|.$$

Protože bod B leží na společné ose E_aE_c úseček CC' a AA', platí pro něj $|BC| = |BC'|$ a $|BA| = |BA'|$, neboli $|BC'| = a$ a $|BA'| = c$. Po dosazení do předchozí rovnosti poměrů dostaneme pro vzdálenost bodů C_1, X vyjádření

$$|C_1X| = \frac{|C_1C'|}{|BC'|} \cdot |BA'| = \frac{|C_1B| + |BC'|}{a} \cdot c = \frac{\frac{1}{2}c + a}{a} \cdot c.$$

Teď už pomocí délek a, b, c určíme potřebný součin

$$|B_1C_1| \cdot |B_1X| = \frac{a}{2} \cdot (|B_1C_1| + |C_1X|) = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{\frac{1}{2}c + a}{a} \cdot c\right) = \frac{(a + c)^2}{4} = |B_1Q'_b|^2.$$

Tím jsme dokázali, že v naší kruhové inverzi (s řídící kružnicí o středu B_1 a poloměru $B_1Q'_b$) se bod C_1 skutečně zobrazí na bod X.

Analogicky lze odvodit i rovnost $|A_1B_1| \cdot |B_1Z| = |B_1Q'_b|^2$, která potvrzuje, že se také bod A_1 skutečně zobrazí na bod Z. Tím je i druhý důkaz Feuerbachovy věty užitím kruhové inverze ukončen.

Kapitola 13

Důkaz užitím polohových vektorů

Feuerbachův původní důkaz jím objevené věty lze označit za *ryze algebraický*[1]. Jak jsme totiž v kapitole 2 podrobně ukázali, Feuerbachovo odvození potřebných vzdáleností středů uvažovaných kružnic je založeno na poměrně náročných výpočtech s polynomy tří proměnných (délek stran daného trojúhelníku), a to bez užití souřadnic nebo významnějšího zapojení goniometrických funkcí. Z důkazů prezentovaných v celém našem textu bude tomuto postupu nejbližší právě důkaz z této kapitoly. Potřebné vzdálenosti však budou určovány z polohových vektorů pro dotyčné středy kružnic a následnými výpočty *skalárních součinů* vektorů v rovině daného trojúhelníku. Při nich opět významně vstoupí do hry výše zmíněné polynomy. Přesvědčíme se zároveň, že Feuerbachova věta patří do okruhu těch planimetrických otázek, k jejichž řešení může zapojení vektorů významně přispět – třeba i jen početním zjednodušením původních postupů.

Výklad nastíněné vektorové metody jsme nalezli v 1. díle ruské učebnice *Elementarnaja geometrija* z roku 2004, kterou sepsal Jakov Petrovič Ponarin, viz [Pon, str. 49–51]. Stejně jako on při důkazu Feuerbachovy věty využijeme vyjádření polohových vektorů, odvozených v jeho učebnici na str. 37–39. V našem textu je uvedeme jako následující pomocné tvrzení. Už v něm se rozhodneme, pro kterou ze tří kružnic připsaných provedeme druhou část celého důkazu.

Lemma. *Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC s obvykle značenými délkami stran a, b, c. Pak poloha ortocentra H tohoto trojúhelníku je dána vektorem*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \tag{13.1}$$

střed I kružnice jemu vepsané je určen vektorem

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \tag{13.2}$$

[1] Viz [Ped, str. 90] . Sám Feuerbach jako podtitul dotyčného díla [Feu] ovšem uvádí *„Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung.“* Dnes však chápeme zaměření obou oborů *analytická geometrie* a *trigonometrie* odlišně.

a konečně střed E_c kružnice připsané jeho straně AB zadává vektor

$$\overrightarrow{OE_c} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} - c\overrightarrow{OC}}{a+b-c}. \tag{13.3}$$

Důkaz: K odvození (13.1) si povšimneme, že z rovnosti $|OA| = |OB|$ zřejmě plyne kolmost vektorového součtu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ k vektoru $\overrightarrow{AB}$. Jelikož H je ortocentrum, k $\overrightarrow{AB}$ je kolmý rovněž vektor $\overrightarrow{CH}$, který je roven $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}$. Dohromady dostáváme, že vektorem kolmým k $\overrightarrow{AB}$ je také vektorový rozdíl

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) - \left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OH}.$$

Ze symetrie posledního zápisu plyne, že jde o vektor, který je kolmý nejen k $\overrightarrow{AB}$, ale také k $\overrightarrow{AC}$ a k $\overrightarrow{BC}$. Takový vektor je ovšem nutně nulový (vždyť ABC je trojúhelník), odkud už plyne vzorec (13.1).

Namísto delšího *odvození* vzorce (13.2) podle Ponarinova textu dáme přednost jeho kratšímu *ověření*. Použijeme tento obrat: o bodu I, který je definován polohovým vektorem OI ze vzorce (13.2), ukážeme, že je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Díky symetrii pravé strany (13.2) stačí ukázat, že takový bod I leží na jedné ose z těchto os, řekněme na ose úhlu ACB. K tomu přepíšeme (13.2) do tvaru

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CI} = \frac{a\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}\right) + b\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}\right) + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

odkud po odečtení $\overrightarrow{OC}$ od obou stran obdržíme

$$\overrightarrow{CI} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b+c}.$$

Protože v čitateli posledního zlomku je součet dvou vektorů stejné velikosti ab, které jsou navíc souhlasně rovnoběžné s vektory $\overrightarrow{CA}$, resp. $\overrightarrow{CB}$, má jejich součet skutečně směr osy úhlu sevřeného posledními dvěma vektory, jak jsme slíbili ukázat.

Obdobně ukážeme, že bod E_c definovaný vzorcem (13.3) leží jak na ose vnitřního úhlu u vrcholu C trojúhelníku ABC, tak na ose jeho vnějšího úhlu u vrcholu A. K tomu rovnost (13.3) postupem z předchozího odstavce upravíme dvěma způsoby do tvarů

$$\overrightarrow{CE_c} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b-c} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{AE_c} = \frac{b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}}{a+b-c}.$$

Můžeme tedy stejně dokončit i důkaz, neboť v čitatelích zlomků je po řadě součet a rozdíl směrových vektorů ramen úhlu ACB, resp. BAC, které mají stejnou velikost ab, resp. bc.

Kromě právě dokázaného Lemmatu využijeme, stejně jako při výkladu Feuerbachova postupu v kapitole 2, některé základní vzorce, které splňují délky stran a, b, c obecného trojúhelníku ABC, jeho obsah S a poloměry R, r, r_a, r_b, r_c uvažovaných kružnic. K jejich zápisu využijeme obvykle značený poloviční obvod $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ a také délky

$$s_a = \tfrac{1}{2}(-a + b + c), \quad s_b = \tfrac{1}{2}(a - b + c), \quad s_c = \tfrac{1}{2}(a + b - c). \tag{13.4}$$

Poslouží nám k přehlednějšímu zapisování vztahů z Ponarinovy učebnice (ve které značení hodnot s_a, s_b, s_c zavedeno není) a také k detailnímu ověřování rovností, které Ponarin přenechává čtenářům (v tomto ohledu bude náš výklad úplnější). Budeme se při tom odkazovat na následující zřejmé vztahy

$$s_a = s - a, \quad s_a + s_b = c, \quad s + s_c = a + b, \quad s_a + s_b + s_c = s \tag{13.5}$$

(z trojice analogických rovností jsme vypsali vždy jen jednu). Potřebné trojúhelníkové vzorce pak stručně zapíšeme do dvou řádků

$$\begin{gathered} S = \sqrt{s s_a s_b s_c} \quad \text{(Heronův vzorec)}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \\ r = \frac{S}{s}, \quad r_a = \frac{S}{s_a}, \quad r_b = \frac{S}{s_b}, \quad r_c = \frac{S}{s_c}. \end{gathered} \tag{13.6}$$

Přidáme k nim ještě jeden pozoruhodný, a přitom málo známý vztah

$$4R = r_a + r_b + r_c - r, \tag{13.7}$$

který proto hned v následujícím odstavci dokážeme. K důkazu vzorce (13.7) využijeme algebraickou identitu

$$s s_b s_c + s s_a s_c + s s_a s_b - s_a s_b s_c = abc, \tag{13.8}$$

kterou odvodíme úpravami její levé strany na základě vztahů (13.5):

$$\begin{aligned} s s_b s_c + s s_a s_c + s s_a s_b - s_a s_b s_c &= s s_c(\underbrace{s_b + s_a}_{c}) + s_a s_b(\underbrace{s - s_c}_{c}) = \\ &= (s s_c + \underbrace{s_a}_{s-a} \cdot \underbrace{s_b}_{s-b})c = (s s_c + s^2 - sa - sb + ab)c = \\ &= (s(\underbrace{s_c + s}_{a+b} - a - b) + ab)c = (s \cdot 0 + ab)c = abc. \end{aligned}$$

Do dokázané identity (13.8) nyní dosadíme za každý ze čtyř součinů nalevo jeho vyjádření z Heronova vzorce, zatímco součin abc napravo zaměníme za výraz $4RS$. Obdržíme tak

$$\frac{S^2}{s_a} + \frac{S^2}{s_b} + \frac{S^2}{s_c} - \frac{S^2}{s} = 4RS,$$

odkud po vydělení obou stran hodnotou S už získáváme – díky čtyřem vzorcům z druhého řádku (13.6) – dokazovaný vzorec (13.7).

Nyní jsme již připraveni přejít k důkazům tvrzení o dotycích kružnice devíti bodů $(N, \frac{1}{2}R)$ jak s kružnicí vepsanou (I, r), tak s kružnicí připsanou (E_c, r_c), a to cestou výpočtů délek vektorů $\overrightarrow{NI}$ a $\overrightarrow{NE_c}$. Celý postup popíšeme pouze pro první vektor $\overrightarrow{NI}$ a pak objasníme, proč obměnu postupu pro druhý vektor $\overrightarrow{NE_c}$ není nutné provádět.

Protože N je středem úsečky OH, podle rovnosti (13.1) z úvodního Lemmatu platí

$$\overrightarrow{ON} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right),$$

zatímco vzorec (13.2) lze díky označení $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ přepsat takto:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{2s}.$$

Dohromady tak pro vektor $\overrightarrow{NI}$ vychází:

$$\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{ON} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{2s} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} =$$

$$= \frac{(\overbrace{a-s}^{-s_a})\overrightarrow{OA} + (\overbrace{b-s}^{-s_b})\overrightarrow{OB} + (\overbrace{c-s}^{-s_c})\overrightarrow{OC}}{2s} = \frac{-s_a\overrightarrow{OA} - s_b\overrightarrow{OB} - s_c\overrightarrow{OC}}{2s}. \tag{13.9}$$

K určení hodnoty $\overrightarrow{NI}^2$ užitím vzorce (13.9) využijeme kromě zřejmých rovností

$$\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 = R^2 \tag{13.10}$$

také hodnoty dvojnásobků skalárních součinů

$$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2, \quad 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 2R^2 - b^2, \quad 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2. \tag{13.11}$$

Z rovností (13.11) jistě stačí ověřit první z nich:

$$c^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)^2 = \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB},$$

odtud už plyne potřebné.

Abychom se vyhnuli zapisování řady zlomků s jmenovatelem $(2s)^2$, počítejme z rovností (13.9)–(13.11) raději $4s^2$-násobek hodnoty $\overrightarrow{NI}^2$:

$$\begin{aligned}
4s^2\overrightarrow{NI}^2 &= s_a^2\overrightarrow{OA}^2 + s_b^2\overrightarrow{OB}^2 + s_c^2\overrightarrow{OC}^2 + \\
& +2s_as_b\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 2s_as_c\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + 2s_bs_c\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \\
&= (s_a^2 + s_b^2 + s_c^2)R^2 + s_as_b(2R^2 - c^2) + s_as_c(2R^2 - b^2) + s_bs_c(2R^2 - a^2) = \\
&= (s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 + 2s_as_b + 2s_as_c + 2s_bs_c)R^2 - (a^2s_bs_c + b^2s_as_c + c^2s_as_b) = \\
&= (s_a + s_b + s_c)^2R^2 - (a^2s_bs_c + b^2s_as_c + c^2s_as_b) = \\
&= s^2R^2 - (a^2s_bs_c + b^2s_as_c + c^2s_as_b)
\end{aligned}$$

(závěrem jsme využili rovnost $s_a + s_b + s_c = s$).

Odtud a z rovnosti

$$a^2 s_b s_c + b^2 s_a s_c + c^2 s_a s_b = 4s^2 r(R-r), \tag{13.12}$$

kterou vzápětí dokážeme, dostaneme (po vydělení hodnotou $4s^2$) vyjádření

$$|NI|^2 = \overrightarrow{NI}^2 = \tfrac{1}{4}R^2 - r(R-r) = \left(\tfrac{1}{2}R - r\right)^2 .$$

Z něho po odmocnění díky Eulerově nerovnosti (Lemma 14.6) vyplyne $|NI| = \frac{1}{2}R - r$, takže kružnice $(N, \frac{1}{2}R)$ a (I, r) budou skutečně mít vnitřní dotyk (není-li ovšem výchozí trojúhelník ABC rovnostranný).

Zbývá tedy dokázat rovnost (13.12). Podle rovností (13.6) platí

$$s_b s_c = \frac{S^2}{s s_a} = \frac{S}{s} \cdot \frac{S}{s_a} = r r_a,$$

analogicky $s_a s_c = r r_b$ a $s_a s_b = r r_c$. Levá strana (13.12) je tak rovna $a^2 r r_a + b^2 r r_b + c^2 r r_c$, tudíž namísto (13.12) můžeme (po vydělení hodnotou r) dokazovat rovnost

$$a^2 r_a + b^2 r_b + c^2 r_c = s^2(4R - 4r),$$

kam ještě za $4R$ dosadíme $r_a + r_b + r_c - r$ podle (13.6). Tímto jsme náš úkol převedli na důkaz rovnosti

$$a^2 r_a + b^2 r_b + c^2 r_c = s^2(r_a + r_b + r_c - 5r). \tag{13.13}$$

Ukážeme, že obě strany rovnosti (13.13), označme je L respektive P, se rovnají témuž výrazu $V = s(ar_a + br_b + cr_c - 2S)$. Skutečně, podle vztahů (13.5) a (13.6) platí

$$\begin{aligned} L - V &= (a^2 r_a + b^2 r_b + c^2 r_c) - s(ar_a + br_b + cr_c - 2S) = \\ &= ar_a(\underbrace{a-s}_{-s_a}) + br_b(\underbrace{b-s}_{-s_b}) + cr_c(\underbrace{c-s}_{-s_c}) + (a+b+c)S = \\ &= a(\underbrace{S - r_a s_a}_{0}) + b(\underbrace{S - r_b s_b}_{0}) + c(\underbrace{S - r_c s_c}_{0}) = 0 \end{aligned}$$

a současně

$$\begin{aligned} P - V &= s^2(r_a + r_b + r_c - 5r) - s(ar_a + br_b + cr_c - 2S) = \\ &= sr_a(\underbrace{s-a}_{s_a}) + sr_b(\underbrace{s-b}_{s_b}) + sr_c(\underbrace{s-c}_{s_c}) - 5s \cdot \underbrace{rs}_{S} + 2sS = \\ &= s(\underbrace{r_a s_a + r_b s_b + r_c s_c}_{3S}) - 3sS = 0. \end{aligned}$$

Tím je rovnost (13.12), a tedy i rovnost $|NI| = \frac{1}{2}R - r$, dokázána.

Dotyk kružnice devíti bodů $(N, \frac{1}{2}R)$ s kružnicí (E_c, r_c) připsanou straně AB daného trojúhelníku ABC nyní dokážeme podobně jako v kapitole 2 obratem, převzatým přímo z původního Feuerbachova důkazu v knize [Feu].[2]

Zachovejme označení bodů O, H, I, E_c, N trojúhelníku ABC a podívejme se, jak se při změně $(a, b, c) \to (a, b, -c)$ změní ostatní skalární veličiny, které s daným trojúhelníkem spojujeme a které nyní *zavedeme definitoricky* pomocí vztahů (13.4) a (13.6). Jiné vztahy mezi nimi jsme ostatně v podaném algebraickém důkazu nevyužili – s jedinou výjimkou, kterými byly rovnosti (13.10) a (13.11). Podle (13.4) a (13.6) při $(a, b, c) \to (a, b, -c)$ dojde k těmto změnám:

1. $(s, s_a, s_b, s_c) \to (s_c, -s_b, -s_a, s)$,
2. hodnota $S = \sqrt{s s_a s_b s_c}$ se nezmění díky bodu 1,
3. hodnota $R = \frac{abc}{4S}$ se změní na $-R$ kvůli $c \to -c$ a bodu 2,
4. $(r, r_a, r_b, r_c) \to (r_c, -r_b, -r_a, r)$ podle bodů 1 a 2.

Dodejme k tomu, že změny $R \to -R$ z bodu 3 spolu s $c \to -c$ neovlivní platnost výše zmíněných „dodatečných “vztahů (13.10) a (13.11), a to díky zachování hodnot R^2 a c^2. Znamená to, že celý předchozí výklad můžeme s pozměněnými veličinami přepsat, aniž by se změnila platnost jeho závěrů. Jako příklad uveďme přepis dokázané rovnosti (13.7):

$$4R = r_a + r_b + r_c - r \quad \to \quad 4(-R) = (-r_b) + (-r_a) + r - r_c.$$

Vidíme, že tento přepis nepřináší nic nového – obměněná rovnost je ekvivalentní s tou původní.

Posouzenou změnu $(a, b, c) \to (a, b, -c)$ ovšem oceníme při úvahách o polohových vektorech z úvodního Lemmatu. Zatímco předpis (13.1) pro vektor $\overrightarrow{OH}$ (a tedy ani předpis pro $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$) na hodnotách a, b, c nezávisí, předpis (13.2) pro vektor $\overrightarrow{OI}$ přejde při změně $c \to -c$ v předpis (13.3) pro vektor $\overrightarrow{OEc}$:

$$\frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c} \to \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} - c\overrightarrow{OC}}{a + b - c}.$$

Proto náš finální vzorec $\overrightarrow{NI}^2 = (\frac{1}{2}R - r)^2$ přejde ve vzorec pro $\overrightarrow{NE_c}^2$, když v něm provedeme změny $R \to -R$ a $r \to r_c$ (viz body 3 a 4 výše).
Platí tedy

$$|NE_c|^2 = \overrightarrow{NE_c}^2 = (\tfrac{1}{2}(-R) - r_c)^2 = \left(\tfrac{1}{2}R + r_c\right)^2.$$

Odtud po odmocnění už dostaneme vztah $|NE_c| = \frac{1}{2}R + r_c$, který dokazuje vnější dotyk kružnic $(N, \frac{1}{2}R)$ a (E_c, r_c). Tím je celý důkaz Feuerbachovy věty hotov.

[2] V Ponarinově učebnici je tato část důkazu Feuerbachovy věty přenechána jako úkol pro čtenáře.

Kapitola 14

Pomocná tvrzení

Do této kapitoly jsme zařadili i s důkazy ta lemmata, která byla využita při důkazech Feuerbachovy věty ve více než jedné z předchozích kapitol. Pro čtenářovu lepší orientaci nejprve uvedeme přehled kapitol, ve kterých se na tato jednotlivá tvrzení odvoláváme.

- $\triangleright$ Lemma 14.1.(i): kapitoly 3, 10.
- $\triangleright$ Lemma 14.1.(ii): kapitoly 3, 4, 5, 6, 7.
- $\triangleright$ Lemma 14.1.(iii): kapitoly 3, 6, 7.
- $\triangleright$ Lemma 14.2: kapitoly 2, 8, 9, 11, 12, 14.
- $\triangleright$ Lemma 14.3: kapitoly 6, 7, 8.
- $\triangleright$ Lemma 14.4: kapitoly 4, 7, 14.
- $\triangleright$ Lemma 14.5: kapitoly 3, 5, 7, 10, 14.
- $\triangleright$ Lemma 14.6: kapitoly 3, 4, 5, 13.

Lemma 14.1 *V trojúhelníku ABC označme o kružnici opsanou a O její střed, C_1 střed strany AB, C_0 patu výšky z vrcholu C, H ortocentrum, C_2 střed spojnice HC, n kružnici devíti bodů a N její střed. Potom platí následující tvrzení:*

(i) Obrazy ortocentra H v obou souměrnostech podle středů C_1, C_0 leží na kružnici o.

(ii) Bod N je nejen středem spojnice OH, ale také středem úsečky C_1C_2, která je tudíž průměrem kružnice n. Její poloměr NC_1 je přitom nesouhlasně rovnoběžný s poloměrem OC kružnice o.

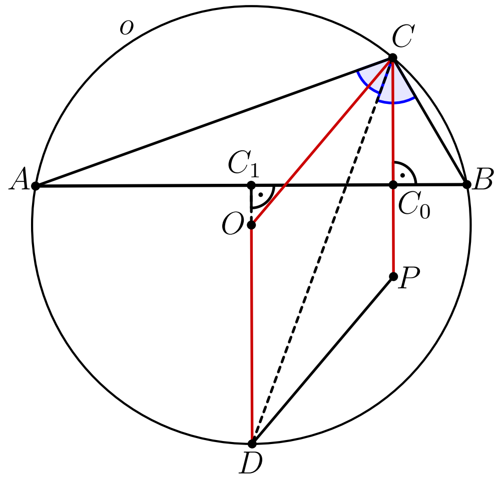
(iii) Polopřímka, která je osou vnitřního úhlu ACB, je rovněž osou úhlu OCC_0.

Důkaz: Využijeme toho, že kružnice n je obrazem kružnice o jak ve stejnolehlosti $(H, \frac{1}{2})$, tak ve stejnolehlosti $(G, -\frac{1}{2})$, kde G je těžiště trojúhelníku ABC. Trojice bodů $A, B, C \in o$ se totiž ve stejnolehlosti $(H, \frac{1}{2})$ zřejmě zobrazí na trojici $A_2, B_2, C_2 \in n$ a ve stejnolehlosti $(G, -\frac{1}{2})$ na trojici $A_1, B_1, C_1 \in n$.[1]

Ve stejnolehlosti $(H, 2)$ přejdou body C_1, C_0 kružnice n v takové dva body kružnice o, které jsou zřejmě souměrně sdružené s bodem H podle středu C_1, resp. C_0. Tvrzení (i) je dokázáno.

Obrazem poloměru OC ve stejnolehlosti $(G, -\frac{1}{2})$, resp. ve stejnolehlosti $(H, \frac{1}{2})$ je poloměr NC_1, resp. poloměr NC_2 kružnice n – tyto poloměry jsou tedy nesouhlasně, resp. souhlasně rovnoběžné s poloměrem OC. Důkaz (ii) je hotov.

K důkazu (iii) ještě označíme D střed toho oblouku AB kružnice o, na kterém neleží vrchol C. Osou vnitřního úhlu ACB je tak (díky shodnosti oblouků AD, DB) polopřímka CD. Na rameni CC_0 zkoumaného úhlu OCC_0 ještě určíme bod P tak, aby úsečka CP měla stejnou délku jako poloměry OD, OC kružnice o.



Jelikož úsečky OD a CP jsou shodné a souhlasně rovnoběžné, platí to rovněž o úsečkách OC a DP, celkem je tedy $DOCP$ kosočtverec a polopřímka CD tak skutečně půlí úhel OCP, jak jsme měli dokázat.[2]

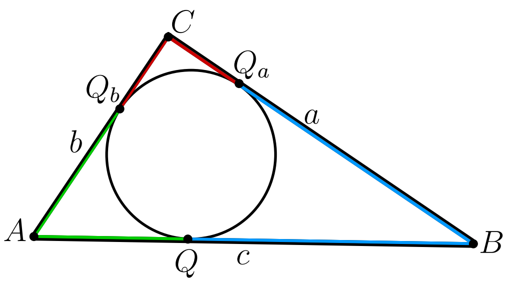
Lemma 14.2 *V trojúhelníku ABC označme Q, Q' body dotyku strany AB s kružnicí tomuto trojúhelníku vepsanou, resp. připsanou straně AB. Pak body Q, Q' jsou souměrně sdružené podle středu C_1 strany AB a shodné úsečky AQ, BQ' mají délku $\frac{1}{2}(b + c - a)$, kde a, b, c jsou obvykle značené délky stran. Tutéž délku mají i tečny*

[1] Pojednali jsme o tom v kapitole 1. Tam jsme také dokázali část (i) a první větu části (ii) aktuálního Lemmatu, přesto tyto krátké důkazy i v této kapitole zopakujeme.

[2] Kosočtverec degeneruje v úsečku v případě $C_1 = C_0$, kdy CD je ovšem osou nulového úhlu OCC_0.

z vrcholu C ke kružnici připsané straně AC.[3] *(Analogické vzorce platí i pro ostatní délky tečen z vrcholů A, B, C ke kružnici vepsané a ke dvěma kružnicím připsaným stranám, jež z dotyčného vrcholu vycházejí.*[4]*)*

DůKAZ: Věnujme se nejprve kružnici vepsané a kromě jejího bodu Q na straně AB uvažme její body Q_a, Q_b po řadě na stranách BC, CA.



Z osové souměrnosti každé z dvojic tečen vedených z bodů A, B, C ke kružnici vepsané plyne $|AQ| = |AQ_b|$, $|BQ| = |BQ_a|$ a $|CQ_b| = |CQ_a|$. Z posledních dvou rovností máme

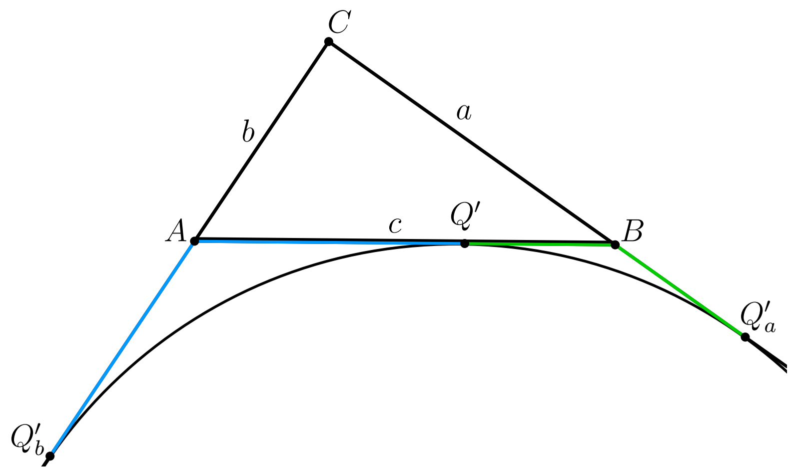
$$|CQ_b| + |BQ| = |CQ_a| + |BQ_a| = a.$$

Odtud s přihlédnutím k první rovnosti $|AQ| = |AQ_b|$ plyne

$$2 \cdot |AQ| = |AQ_b| + |AQ| = (b - |CQ_b|) + (c - |BQ|) = b + c - a.$$

Po vydělení dvěma už dostáváme dokazovaný vzorec pro $|AQ|$.

K důkazu téhož vzorce pro délku tečny BQ' ke kružnici připsané straně AB uvažme obdobně body Q'_a, Q'_b této kružnice po řadě na prodlouženích stran CB, CA.



[3]Délkou tečny z daného bodu k dané kružnici rozumíme vzdálenost tohoto bodu od příslušného bodu dotyku.

[4]Tato analogie bude upřesněna po provedeném důkazu a doplněna ilustračním obrázkem.

Podobně jako v předchozím pro tečny z bodů A, B, C ke kružnici připsané straně AB platí $|AQ'| = |AQ'_b|$, $|BQ'| = |BQ'_a|$ a $|CQ'_a| = |CQ'_b|$. Z první a třetí rovnosti máme

$$|CQ'_a| - |AQ'| = |CQ'_b| - |AQ'_b| = b.$$

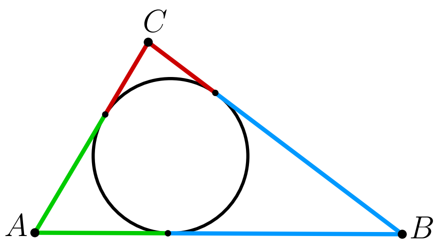
Odtud s přihlédnutím ke druhé rovnosti $|BQ'| = |BQ'_a|$ plyne

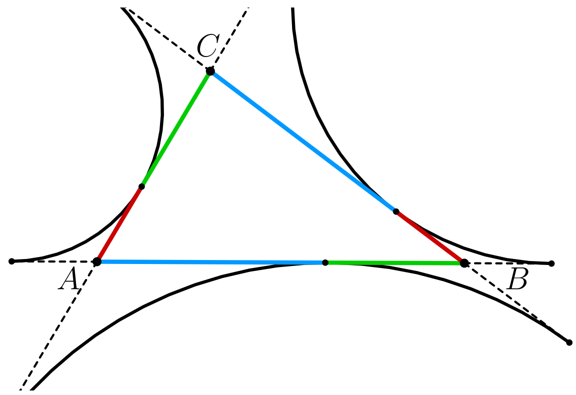
$$2 \cdot |BQ'| = |BQ'_a| + |BQ'| = (|CQ'_a| - a) + (c - |AQ'|) = b + c - a.$$

Po vydělení dvěma už dostáváme dokazovaný vzorec pro $|BQ'|$.

Dokázali jsme, že tečny z vrcholu B ke kružnici připsané straně AB trojúhelníku ABC mají délku $\frac{1}{2}(b + c - a)$. Protože tento výraz je symetrickou funkcí délek b a c, stejnou délku $\frac{1}{2}(b+c-a)$ mají i tečny z vrcholu C ke kružnici připsané straně AC.

K dodatku v závorce, který jsme připojili k formulaci Lemmatu 14.2, uvádíme nyní slíbenou ilustraci spolu s následným upřesněním:





- ▷ Zeleně vyznačené úsečky mají délku $\frac{1}{2}(b + c - a)$.
- ▷ Modře vyznačené úsečky mají délku $\frac{1}{2}(a + c - b)$.
- ▷ Červeně vyznačené úsečky mají délku $\frac{1}{2}(a + b - c)$.

Lemma 14.3 *V trojúhelníku ABC označme C_0 patu výšky z vrcholu C, C_1 střed strany AB, Y její průsečík s osou vnitřního úhlu BCA a Q, Q' body dotyku strany AB s kružnicí vepsanou, resp. připsanou této straně. Pak platí*

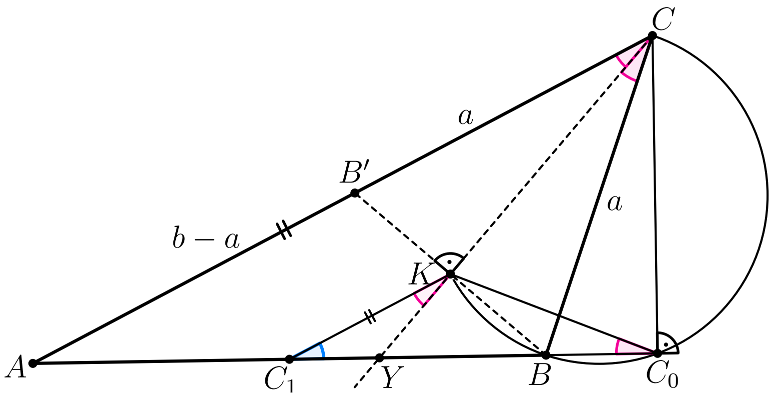
$$|C_1Y| \cdot |C_1C_0| = |C_1Q|^2 = |C_1Q'|^2.$$

Důkaz: S ohledem na symetrii se stačí zabývat případem $|AC| > |BC|$, neboť v případě $|AC| = |BC|$ všechny body z dokazovaných rovností splývají. Podle Lemmatu 14.2 při obvyklém značení délek stran a, b, c platí

$$|AQ| = |BQ'| = \tfrac{1}{2}(b + c - a),$$

což s ohledem na rovnosti $|AC_1| = |BC_1| = \frac{1}{2}c$ a předpoklad $b > a$ vede k závěru, že $|C_1Q| = |C_1Q'| = \frac{1}{2}(b - a)$.

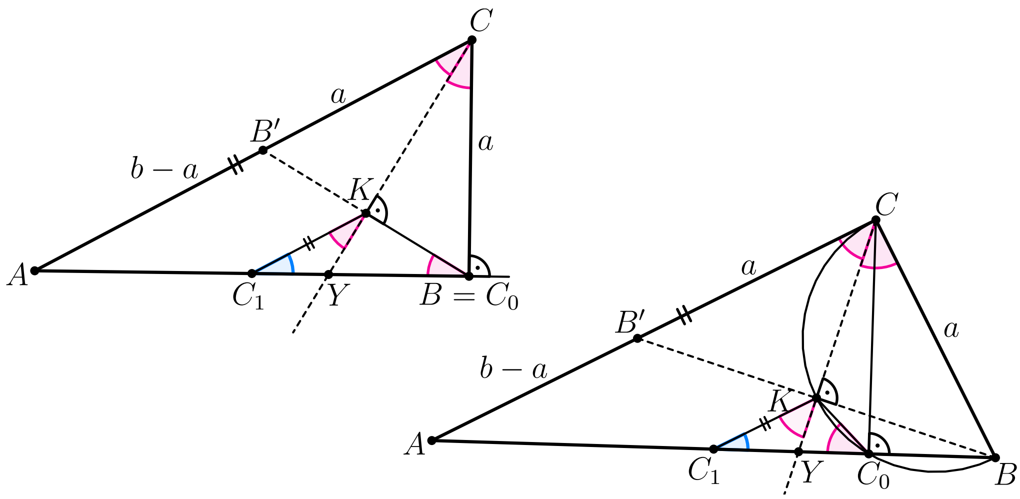
Uvažme nyní obraz B' bodu B v souměrnosti podle osy CY úhlu BCA a označme K ten její bod, který je středem úsečky BB'. Díky předpokladu $b > a$ leží bod B' uvnitř strany AC tak, že $|AB'| = b - a$. Pro střední příčku C_1K trojúhelníku ABB' tak platí $|C_1K| = \frac{1}{2}(b - a)$, navíc z $C_1K \parallel AC$ plyne shodnost tří úhlů C_1KY, ACY a BCY, vyznačených na obrázku.



Podle předchozích úvah lze dokazované tvrzení vyjádřit jedinou rovností

$$|C_1Y| \cdot |C_1C_0| = |C_1K|^2, \quad \text{neboli} \quad |C_1Y| : |C_1K| = |C_1K| : |C_1C_0|.$$

Stačí tak ověřit, že trojúhelníky C_1KY a C_1C_0K jsou podobné podle věty *uu*. Skutečně, jejich úhly u společného vrcholu C_1 jsou totožné a shodnost jejich úhlů u vrcholů K a C_0 snadno vyplyne z vlastností úhlů v kružnici s průměrem BC, na které oba body K a C_0 zřejmě leží. K tomu rozlišíme, zda je úhel ABC tupý (obr. výše), nebo pravý či ostrý (obr. níže). Vše je natolik očividné, že slovní výklad uvádět nebudeme.

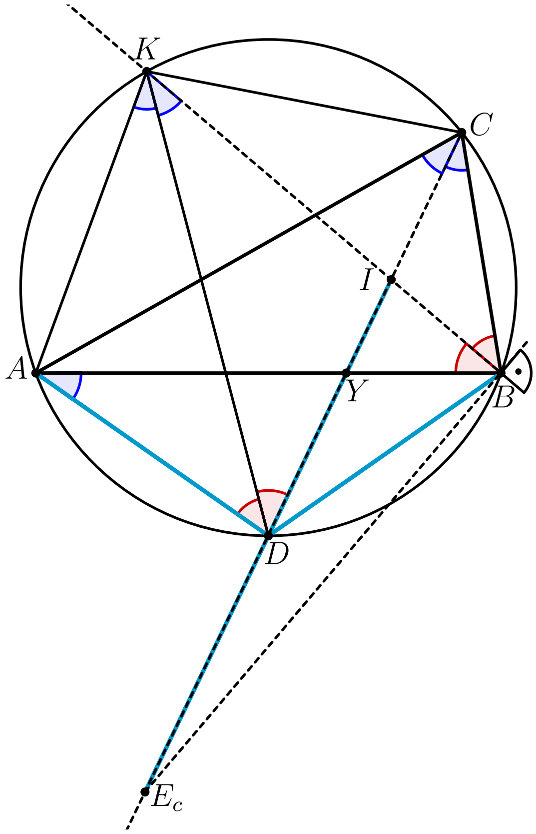


Tím je důkaz Lemmatu 14.3. ukončen.

Lemma 14.4 *V trojúhelníku ABC na ose vnitřního úhlu ACB uvažme postupně střed I kružnice vepsané, průsečík Y se stranou AB, průsečík D s kružnicí trojúhelníku ABC opsanou a konečně střed E_c kružnice připsané straně AB. Pak platí rovnosti*

$$|DA| = |DB| = |DI| = |DE_c| \quad \text{a} \quad |DY| \cdot |DC| = |DA|^2.$$

Důkaz: Pojmenované body jsou znázorněny na obrázku. V něm je vykreslena rovněž osa vnitřního úhlu ABC a určen její průsečík K s kružnicí opsanou. Vyznačeny jsou pak modře a červeně dvě skupiny shodných obvodových úhlů.



Z vyznačených úhlů plyne jednak rovnost $|DA| = |DB|$, jednak shodnost trojúhelníků DAK a DIK díky větě *usu*, takže platí rovněž $|DA| = |DI|$. Máme tak dokázány první dvě z rovností $|DA| = |DB| = |DI| = |DE_c|$. Třetí rovnost je důsledkem Thaletovy věty: díky vyznačenému pravému úhlu mezi osami BI a BE_c (jde o osy dvou vedlejších úhlů) je bod D nutně středem přepony IE_c pravoúhlého trojúhelníku IE_cB, neboť (jak už víme) $|DI| = |DB|$.

Rovnost $|DY| \cdot |DC| = |DA|^2$ upravená do tvaru $|DY|/|DA| = |DA|/|DC|$ plyne z trojúhelníků DYA a DAC, které jsou totiž podobné podle věty *uu*. Tím je důkaz Lemmatu 14.4. ukončen.

Lemma 14.5 *Označme R poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC a D střed toho jejího oblouku AB, na kterém neleží vrchol C. Pak pro střed I a poloměr r kružnice vepsané trojúhelníku ABC platí $|DI| \cdot |IC| = 2Rr$. Podobně pro střed E_c a poloměr r_c kružnice připsané straně AB trojúhelníku ABC platí $|DE_c| \cdot |E_cC| = 2Rr_c$.*

Důkaz: Díky Lemmatu 14.4 platí $|DI| = |DE_c| = |DB|$, stačí tudíž dokázat rovnosti

$$|DB| \cdot |IC| = 2Rr \quad \text{a} \quad |DB| \cdot |E_cC| = 2Rr_c.$$

Označme P, P' kolmé průměty po řadě středů I, E_c na polopřímku CB (viz obr.). Při obvyklém označení $\gamma = |\sphericalangle BCA|$ mají trojúhelníky ICP, E_cCP', DCB u vrcholu C společný úhel velikosti $\frac{1}{2}\gamma$. První dva z nich jsou pravoúhlé, tudíž

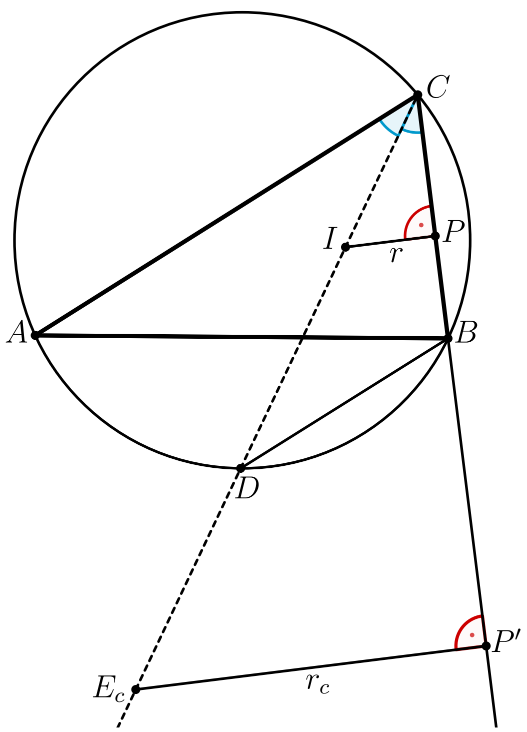
$$r = |IP| = |IC| \sin \tfrac{1}{2}\gamma \quad \text{a} \quad r_c = |E_cP'| = |E_cC| \sin \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Ve třetím trojúhelníku DCB s opsanou kružnicí o poloměru R podle sinové věty platí $|DB| = 2R \sin \frac{1}{2}\gamma$. Z odvozených rovností plyne

$$2Rr \sin \tfrac{1}{2}\gamma = (2R \sin \tfrac{1}{2}\gamma) \cdot r = |DB| \cdot |IC| \sin \tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$2Rr_c \sin \tfrac{1}{2}\gamma = (2R \sin \tfrac{1}{2}\gamma) \cdot r_c = |DB| \cdot |E_cC| \sin \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Odtud po vydělení kladným číslem $\sin \frac{1}{2}\gamma$ už dostáváme rovnosti, které jsme měli dokázat.



Z právě dokázaného Lemmatu 14.5 snadno plynou známé Eulerovy vztahy, které kvůli odkazům (cíleným právě na ně) nyní uvedeme samostatně.

Lemma 14.6 *Pro libovolný trojúhelník ABC uvažme jemu opsanou kružnici (O, R), vepsanou kružnici (I, r) a kružnici (E_c, r_c) připsanou straně AB. Pak vzdálenosti středu O od středů I a E_c jsou určeny vzorci*

$$|OI|^2 = R^2 - 2Rr \quad a \quad |OE_c|^2 = R^2 + 2Rr_c.$$

Navíc platí nerovnost $R \geq 2r$, ve které nastane rovnost, právě když je trojúhelník ABC rovnostranný.

Důkaz: Využijeme mocnosti m_I, m_{E_c} středů I, E_c ke kružnici opsané (O, R). Díky Lemmatu 14.5 má záporná mocnost m_I dvojí vyjádření

$$m_I = |OI|^2 - R^2 = -|DI| \cdot |IC| = -2Rr;$$

podobně pro kladnou mocnost m_{E_c} platí

$$m_{E_c} = |OE_c|^2 - R^2 = |DE_c| \cdot |E_cC| = 2Rr_c.$$

Odtud už plynou oba dokazované vzorce. Podle prvního z nich $R(R-2r) = |OI|^2 \geq 0$, tudíž skutečně platí $R \geq 2r$ s rovností v jediném případě $O = I$. Poslední zřejmě nastane, jen když je trojúhelník ABC rovnostranný.

Kapitola 15

Životní dráha K. W. Feuerbacha

Životopisné údaje o matematikovi, jehož slavnému (a prakticky jedinému významnému) výsledku jsme naši závěrečnou práci věnovali, lze najít na internetu jak v obecné otevřené encyklopedii Wikipedie ([Wii]), tak ve specializované historicko-matematické encyklopedii MacTutor ([McT]), včetně stručného hodnocení jeho nepříliš rozsáhlého matematického díla. Asi nejpodrobněji se popisu jeho života věnovala Laura Guggenbuhl, jejíž šestistránkový článek *Karl Wilhelm Feuerbach, Mathematician* vyšel v roce 1955 v časopise *The Scientific Monthly.*[1] Z jeho přetisku v dodatku knihy [Ped, str. 89–100], doplněném o několik fotokopií z originálu Feuerbachova hlavního díla [Feu], jsme čerpali téměř všechny níže uvedené informace o krátkém, ale zato bouřlivém životě tohoto matematika.

[1]Doktorka Guggenbuhl byla odbornou asistentkou matematiky na Hunter College v New Yorku. Jak autorka uvádí s odkazy na seznam literatury k uvedenému článku, základní biografická fakta převzala z příspěvku od Moritze Cantora z roku 1910, ovšem hluboce dojímavé a bolestné detaily z Karlova života jí přinesla až četba dopisů z archívu Karlova otce.

Karl Feuerbach se narodil 30. 5. 1800 v německém městě Jena do tamější významné rodiny Feuerbachů. Jeho matka byla Eva Wilhelmine Maria Troster a otec Paul Johann Anselm Feuerbach, profesor práva na univerzitě v Jeně, který později napsal bavorský trestní zákoník. Eva a Paul měli jedenáct dětí, z nichž tři synové zemřeli už jako děti. Zbylých pět synů dosáhlo časem doktorských titulů a tři z nich se stali dokonce profesory. Nejznámějším z bratrů byl Ludwig Feuerbach (1804–1872), přední materialistický filosof 19. století.

Otec Paul Feuerbach se musel kvůli profesní kariéře často se svou rodinou stěhovat: z Karlova rodiště Jeny do Kielu, v roce 1804 do bavorského Landshutu a poté odtud do nedalekého Mnichova. V roce 1814 Karl a jeho starší bratr Anselm začali chodit na gymnázium v Mnichově, když se jejich otec opět musel přestěhovat, tentokrát do 200 km vzdáleného Bamberku. Synové však zůstali v Mnichově, aby gymnázium dokončili. Poté oba chlapci vstoupili na univerzitu v Erlangenu (v roce 1817) a stali se oba skvělými studenty. Na univerzitě studovali pod patronací bavorského vévody Maxmiliána Josefa, který povýšil jejich otce Paula do šlechtického stavu a slíbil mu finanční zajištění vysokoškolských studií pro všechny jeho syny. V roce 1819 se Paul Feuerbach stal předsedou Odvolacího soudu v Ansbachu, kde se celá jeho rodina definitivně usídlila.

V roce 1820 Karl přestoupil na univerzitu ve Freiburgu, aby mohl pokračovat ve studiu matematiky u profesora Karla Buzengeigera. Ten napsal i úvodní slovo k Feuerbachovu nejznámějšímu dílu *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung.*[2] Tato útlá kniha [Feu] o 62 stranách (90 stran i s přílohami a úvodem) byla nejspíše jeho závěrečnou prací, za kterou byl jejímu autorovi již v jeho 22 letech udělen doktorát.

V tomto díle z roku 1822 Karl uvádí i s důkazem svůj objev „nejhezčí věty elementární geometrie od dob Eukleida“[3], které jsme se v celé naší závěrečné práci věnovali. Její znění se objevilo jen jako zmínka na konci paragrafu 57, popisující dotyk kružnice vepsané a kružnic připsaných s kružnicí devíti bodů libovolného trojúhelníku v podobě, jejíž sken z německého originálu uvádíme na další stránce. (Česky: Kružnice, která prochází patami výšek trojúhelníku, se dotýká všech čtyř kružnic, které se dotýkají všech tří stran daného trojúhelníku. Kružnice vepsaná má dotyk vnitřní a každá z kružnic připsaných dotyk vnější.)

[2]Česky: *Vlastnosti některých významných bodů rovinného trojúhelníku a navíc jím určenými přímkami a útvary. Analyticky-trigonometrické pojednání.*

[3]Toto ocenění, v originále: „the most beautiful theorem in elementary geometry that has been discovered since the time of Euclid“, jsme převzali ze str. 21 článku J. L. Coolidge, *The Heroic Age of Geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 35(1): str. 19-37 (January-February 1929).

Der Kreis, welcher durch die Fußpunkte der Perpendikel eines Dreiecks geht, berührt alle vier die drei Seiten desselben berührenden Kreise, und zwar den innerhalb berührenden innerhalb, jeden der ausserhalb berührenden aber ausserhalb.

Tato věta, jež je obecně známa jako Feuerbachova, je v tomto díle dokázána, jak jsme ukázali v kapitole 2, především pomocí algebraických výpočtů, ne tedy syntetickými úvahami v duchu tradice zmíněného Eukleida. Je však třeba ocenit preciznost a trpělivost, se kterou byl Feuerbach schopen takto náročné výpočty v té době vykonat. V kapitole 2 jsme jejich krátkou ukázku ve skenu z originálu přetiskli.

Ačkoli Feuerbachové nebyli rodilí Bavořani a navíc byli protestanty v této jinak převážně katolické zemi, stal se díky své publikaci Karl Feuerbach ve svých 22 letech profesorem matematiky na gymnáziu v Erlangenu a o rok později i na tamní vysoké škole. Dále se však stýkal s přáteli ze studií, mezi nimiž byl znám jako bezstarostný homosexuál, pověstný svou nezodpovědností a dluhy. Za svou politickou aktivitu a názory byl v roce 1824 cestou do školy zatčen. Obviněno bylo s Karlem také 19 spolužáků z univerzity a poté byli všichni vězněni v Nové věži v Mnichově bez práva přijímat návštěvy zvenčí.

Karlův otec Paul ve svých dopisech zmiňuje obavy, že synovo zatčení mohlo být podníceno jeho (Paulovými) politickými nepřáteli. I tak se Karl cítil osobně zodpovědný za neutěšenou situaci svých vězněných přátel, což ho přivádělo k depresím. Několikrát se pokusil i o sebevraždu. Skok z nemocničního okna mu zanechal dokonce doživotní následky. Nedlouho po tomto svém posledním pokusu o sebevraždu byl Karl Feuerbach propuštěn pod podmínkou, že se o něj bude starat Friedrich Wilhelm Thiersch (1784–1860), učenec, pedagog a přítel rodiny Feuerbachů, který Karla dříve učil. Jeden z Karlových přátel ve vězení zemřel, avšak po 14 měsících věznění byli všichni ostatní soudem osvobozeni a mohli se znovu věnovat normálnímu životu.

Po zproštění viny se Karl vrátil ke své rodině do Ansbachu a věnoval se v klidu domova matematickým úvahám, které započal rozvíjet ve vězení. V roce 1827 publikoval v Norimbergu 48stránkovou brožuru s názvem *Grundriss zu analytischen Untersuchungen der dreyeckigen Pyramide*[4]. Jak píše Laura Guggenhalm, Moritz Cantor ve svém příspěvku [Can] podrobil tuto Feuerbachovu studii příznivě vyznívajícímu kritickému rozboru a v závěrečném shrnutí prohlásil jejího autora vedle Möbia za „nezávislého spoluobjevitele teorie homogenních souřadnic bodů v prostoru.“

Ještě celý rok po svém propuštění z vězení nebyl Karl v dostatečně dobrém duševním stavu, aby se mohl vrátit k výuce ve škole. Teprve poté přijal místo na gymnáziu v maloměstském Hofu. Jeho jmenování tamním profesorem matematiky zařídil vévoda Max-

[4]Česky: *Základy analytické teorie trojbokého jehlanu (tj. čtyřstěnu).*

milián Josef, který se usilovně snažil pomoci všem mladým mužům, kteří byli společně s Karlem uvězněni. Karl však v Hofu nebyl vnitřně spokojen, chyběl mu klidný život, který měl u rodičů a sourozenců v Ansbachu. Jeho duševní stav se zhoršoval, dokud ho jeho dva bratři neodvezli na lékařské vyšetření zpět do Erlangenu, města, ve kterém dříve býval šťastný. Po zlepšení zdravotního stavu, v roce 1828, začal opět učit na gymnáziu v Erlangenu. Na této škole ale jednoho dne při výuce vytáhl meč a hrozil žákům uříznutím hlavy, pokud nebudou umět vyřešit rovnici napsanou na tabuli. V týž den se pak vzdal místa na gymnáziu a rozhodl se žít v ústraní. Šest let se v Erlagenu oddával v častých depresích samotě a rozjímáním se vzdaloval od reality okolního světa. Dovolil, aby mu narostly dlouhé vlasy, vousy a nehty, zíral na občasné návštěvníky bez jakékoli známky emocí a jeho rozhovor sestával pouze z hlubokých mumlavých tónů bez srozumitelného významu. Zemřel 12. března 1834, tedy ve věku nedožitých 34 let.

Závěr

Předloženou práci jsem věnovala jedinému výsledku o pěti významných kružnicích, které spojujeme s obecným trojúhelníkem v eukleidovské rovině, totiž Feuerbachově větě. Její problematiku jsem přiblížila v kapitole 1. Tam jsem také nastínila její postavení a význam v geometrii rovinného trojúhelníku. V dalších výkladových kapitolách pak podrobně popisuji rozličné elementární přístupy, kterými lze Feuerbachovu větu dokázat.

Domnívám se, že jsem dosáhla obou cílů vytyčených v Úvodu k této práci. V nejrozsáhlejší kapitole 2 uvádím ve vlastním pojetí výklad historicky prvního důkazu, se kterým v roce 1822 přišel sám Karl Feuerbach. Nebylo snadné tuto kompozici různých dílčích výsledků z knihy [Feu], které jejího autora přivedly k potřebnému závěru, přepracovat do ústrojného celku, který věrně odráží strukturu celého postupu i zahrnuje početní odvození potřebných dílčích závěrů. Zvolený způsob zpracování popisuji úvodem dotyčné kapitoly 2 a nebudu ho na tomto místě opakovat.

V kapitolách 3 až 13 se zabývám dalšími důkazy Feuerbachovy věty. Vybrala jsem je z téměř tří desítek důkazů, které se mi podařilo v literatuře dohledat.[5] Při rozhodování o tom, které z postupů do chystaného textu zařadit, jsem se prioritně řídila požadavkem, aby použitá teorie nepřekračovala významně rámec gymnaziální planimetrie. Navíc jsem hledala zejména takové důkazy, jejichž podstatu lze vyjádřit jasnou myšlenkou. Tu jsem pak heslovitě vtělila do názvu příslušné kapitoly a rozvinula v úvodní části jejího textu. Přestože zpracování následných výkladů v kapitolách 3 až 13 nebylo tolik náročné jako v případě kapitoly 2 s Feuerbachovým důkazem, podrobnější argumentace a potřebné doplňky si vyžádaly i v dalších kapitolách nemalé úsilí. Dokládám to (nijak výjimečným) příkladem kapitoly 5, ve které k vypracovanému šestistránkovému výkladu připojuji závěrem sken původního příspěvku.

Jsem přesvědčena, že všechny etapy přípravy předložené práce nesmírně obohatily můj pohled na elementární planimetrii a prohloubily moje dovednosti při využívání takových nástrojů, jakými jsou podobnosti trojúhelníků, mocnosti bodů ke kružnicím a rovinné stejnolehlosti. Cením si rovněž zkušeností s psaním matematických výkladů, které jsem získala při četných konzultacích se svým školitelem nad pracovními verzemi

[5] V Seznamu užité literatury uvádím pouze ty příspěvky o Feuerbachově větě, které jsem do výsledného textu skutečně zapracovala.

jednotlivých kapitol. Musela jsem je často i několikrát přepisovat a pak ještě dolaďovat, abych dostála školitelovým představám o obsahové přesnosti a stylistické vytříbenosti.

Věřím, že můj text ocení všichni zájemci o elementární planimetrii, zejména středoškolští učitelé matematiky a jejich talentovaní žáci.

Seznam užitých značení

1. V celém textu práce používáme standardní algebraickou a geometrickou symboliku. Rovinné zobrazení, jež je stejnolehlostí se středem M a koeficientem λ, značíme (M, λ).
2. Označení prvků rovinného trojúhelníku ABC, které jsme zavedli v kapitole 1, v dalších kapitolách zpravidla znovu připomínáme při jejich prvním výskytu. Seznam těchto značení nyní uvedeme, a to v takovém pořadí, abychom k popisům dalších značení mohli využít značení popsaná dříve. V popisech neuvádíme, že použité termíny se vztahují k danému trojúhelníku ABC. Ostatní v textu práce užitá značení, jež v seznamu chybí, mají platnost v rámci kapitol, ve kterých byla zavedena. Zařazeny do seznamu jsou jen ta další označení, která se v důkazových kapitolách opakují nejčastěji.

α, β, γ	velikosti úhlů CAB, ABC, BCA
a, b, c	délky stran BC, CA, AB
S	obsah (trojúhelníku ABC)
A_1, B_1, C_1	středy stran BC, CA a AB
G	těžiště
A_0, B_0, C_0	paty výšek z vrcholů A, B, C
H	ortocentrum (průsečík výšek)
O	střed kružnice opsané
R	poloměr kružnice opsané
$o = (O, R)$	kružnice opsaná
I	střed kružnice vepsané
r	poloměr kružnice vepsané
$i = (I, r)$	kružnice vepsaná
E_a, E_b, E_c	středy kružnic připsaných stranám BC, CA, AB
r_a, r_b, r_c	poloměry kružnic připsaných stranám BC, CA, AB
$e_a = (E_a, r_a)$	kružnice připsaná straně BC
$e_b = (E_b, r_b)$	kružnice připsaná straně CA
$e_c = (E_c, r_c)$	kružnice připsaná straně AB
N	střed kružnice devíti bodů
$n = (N, \frac{1}{2}R)$	kružnice devíti bodů
A_2, B_2, C_2	středy spojnic AH, BH, CH (Eulerovy body)
Q	bod dotyku kružnice i se stranou AB
Q'	bod dotyku kružnice e_c se stranou AB
D	střed oblouku AB kružnice o, na kterém neleží bod C
Y	průsečík strany AB s osou vnitřního úhlu BCA

Seznam použité literatury

[Alt] ALTSHILLER-COURT, N. *College geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. Second Edition. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 1980.

[Aym] AYME, J. L. *Feuerbach's Theorem: A New Purely Synthetic Proof* [online]. 2010, 7 [cit. 2023-07-21].
Dostupné z: http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Feuerbach.pdf.

[Bal] BALTZER, R. *Die Elemente der Mathematik.* Leipzig: Verlag von S. Hirzel, 1883.

[B-Z] BOČEK, L. a ZHOUF, J. *Máte rádi kružnice?* Praxe učitele matematiky, fyziky, informatiky. Praha: Prometheus, 1995.

[C-G] COXETER, H. S. M. a GREITZER S. L. *Geometry revisited.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1967.

[Can] CANTOR, M. *Karl Wilhelm Feuerbach.* Heidelberg: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Abh 25, 1910.

[Cas] CASEY, J. *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclids.* London: Longmans, Green and Co., 1886.

[Dob] DOBBS, W. J. 1387. A Simple Proof of Feuerbach's Theorem. *The Mathematical Gazette.* 1939, roč. 23 (255), str. 291–292.

[Don] DONATH, E. *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1968.

[D-Ž] DELONE, B. a ŽITOMIRSKIJ, O. *Zadačnik po geometrii.* Moskva: Izdatěl'stvo těchniko-těoretičeskoj litěratury, 1949.

[Eld] ELDER, A. E. Feuerbach's Theorem: A New Proof. *The American Mathematical Monthly.* 1960, roč. 67 (9), str. 905–906.

[Feu] FEUERBACH, K. W. *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung.* Nürnberg: Riegel and Wiessner, 1822.

[Har] HARVEY, W. Geometrical Proof of the Tangency of the Inscribed and Nine-Point Circles. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.* 1886, roč. 5, str. 102–103.

[Hor] HORÁK, S. *Kružnice.* Škola mladých matematiků. Praha: Mladá Fronta, 1966. Dostupné z: https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589.

[Hod] HODGETTS, W. J. 1769. Feuerbach's theorem. *The Mathematical Gazette.* 1944, roč. 28 (282), str. 198.

[Jef] JEFREMOV, D. *Novaja geometrija treugol'nika.* Oděsa: Izdatěl'stvo M. Špencera, 1903.

[Joh] JOHNSON, R. A. *Advanced Euclidean Geometry.* New York: Dover Publications, 1960.

[Lac] LACHLAN, R. *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry.* Londýn: Macmillan and Co., 1893.

[Lei] LEISCHNER, P. Ptolemaiova věta. *Matematika–fyzika–informatika.* 2005/2006, roč. 15, str. 129–135.

[Les] LEISCHNER, P. Ptolemaiova nerovnost. *Matematika–fyzika–informatika.* 2005/2006, roč. 15, str. 385–392.

[Lor] LORENCOVÁ, T. Karl Feuerbach a jeho věta o dotyku kružnic. *Učitel matematiky.* 2014, roč. 23 (93), str. 16–27.

[Mac] MACKAY, J. S. History of the Nine Point Circle. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.* 1892, roč. 11, str. 19–57.

[MCa] MCCAY, W. S. Proof of Feuerbach's Theorem. *The Educational Times and Journal of the College of Preceptors.* 1889, roč. 42 (336), str. 187.

[M'Cl] M'CLELLAND, W. J. *A Treatise on the Geometry of The Circle.* Londýn: Macmillan and Co., 1891.

[McT] O'CONNOR, J. J a ROBERTSON, E. F. Karl Wilhelm Feuerbach. In: *Historicko-matematická encyclopedie MacTutor* [online]. 2010 [cit.2024-04-15]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Feuerbach/.

[Men] MENTION, J. Note sur le triangle rectiligne. *Nouvelles annales de mathématiques.* 1850, roč. 9, str. 401–403.

[Nev] NEVILLE, E. H. Feuerbach's Theorem as a Corollary. *The Mathematical Gazette.* 1928, roč. 14 (194), str. 109–111.

[Ped] PEDOE, D. *Circles: a mathematical view.* New York: The Mathematical Association of America, 1995.

[Pea] PEACOCK, J. 884. Feuerbach's Theorem. *The Mathematical Gazette.* 1927, roč. 13 (191), str. 458–459.

[Pon] PONARIN, J. P. *Elementarnaja Geometria.* Díl 1. Moskva: Izdatěl'stvo MCNMO, 2004.

[Pra] PRASOLOV, V. *Problems in Plane and Solid Geometry.* Překlad z ruštiny: D. Leites. Díl 1. [cit. 2024-04-13].
Dostupné z: http://archive.org/details/planegeo/page/n459/mode/2up.

[R-G] RICHTER - GEBERT, J. *Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour Through Real and Complex Geometry.* Berlin: Springer Science and Business Media, 2011.

[San] SANJANA, K. J. An Elementary Proof of Feuerbach's Theorem. *Edinburgh Mathematical Notes.* 1924, roč. 22, str. 11–12.

[Š-V] ŠVRČEK, J. a VANŽURA, J. *Geometrie trojúhelníka.* Polytechnická knižnice. Praha: SNTL, 1988.

[Ter] TERQUEM, Considerations sur le Triangle Rectiligne. *Nouvelles annales de mathématiques.* 1842, roč. 1, str. 79–87.

[Wii] Karl Wilhelm Feuerbach. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2024-04-13].
Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Wilhelm_Feuerbach.

[Wik] Euler's theorem in geometry. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2024-04-13]. Dostupné z:
https://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_theorem_in_geometry.

Přehled publikací autorky

[1] NEDEVOVÁ, T. Jakob Steiner a jeho přínos k poznatkům o kružnici. In: *32. mezinárodní konference HISTORIE MATEMATIKY.* Praha: MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2011, str. 223–226.

[2] NEDEVOVÁ, T. Mocnost bodu ke kružnici. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* 2012, roč. 87 (2), str. 9–17.

[3] NEDEVOVÁ, T. Circular Inversion. In: *XXX International Colloquium on the Management of Educational Process.* Brno: Publishing office of the University of Defence, 2012.

[4] NEDEVOVÁ, T. Giusto Bellavitis a jeho přínos geometrii. In: *33. mezinárodní konference HISTORIE MATEMATIKY.* Praha: MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2012, str, 229–232.

[5] LORENCOVÁ, T. Karel Feuerbach a jeho věta o dotyku kružnic. *Učitel matematiky.* 2014, roč. 23 (93), str. 16–27.