MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Jarmila ELBELOVÁ

Otáčení v rovině a komplexní čísla

Rigorózní práce

Brno, 2012

Obsah

Úvod

Předložená práce je především metodickým textem určeným středoškolským učitelům a talentovaným žákům středních škol, kteří chtějí prohloubit své znalosti a dovednosti při řešení zajímavějších úloh z elementární geometrie. Tyto úlohy jsou přitom řešitelné užitím komplexních čísel, jak je žáci znají z běžného gymnaziálního učiva.

Tato rigorózní práce navazuje na mou dizertační práci Vektorové metody v eukleidovské geometrii, obhájenou v květnu 2011. V této předešlé práci jsem se pokusila ukázat, že mnoho základních geometrických poznatků a úloh, v jejichž zadání není obvykle o vektorech žádná zmínka, lze snadno dokázat či řešit pomocí vektorové metody. Z aparátu vektorové algebry se tak stává efektivní prostředek geometrického výzkumu. Zadáním zmíněné dizertační práce původně bylo v eukleidovské geometrii vyčlenit okruhy problémů, které lze efektivně řešit metodami vektorové algebry a komplexních čísel. Z důvodu velkého rozsahu dizertační práce však nebyla komplexní čísla do jejího textu vůbec zařazena.

Má nová práce je věnována poměrně úzkému, přesto však dostatečně nosnému tématu, a to využití *komplexních čísel* při zkoumání výsledků otáčení v rovině. V úlohách využívajících nějakým způsobem tento druh shodného zobrazení (často se jedná o připsané čtverce či trojúhelníky) pouhá vektorová metoda obvykle nestačí, nebo by řešení touto metodou bylo příliš zdlouhavé. Komplexní čísla, kterými lze popisovat body a vektory v rovině, se v této situaci stávají efektivním prostředkem planimetrických výpočtů. Při rozhodování o tom, které ukázky do konečného textu zařadit, jsem se snažila vybírat pouze ty úlohy, u kterých řešení pomocí komplexních čísel umožňuje rychlejší a přehlednější postup. Na toto téma jsem v literatuře věnované komplexním číslům nenašla žádnou obsáhlejší práci, která by tyto úlohy shromažďovala, ale jen izolované příklady.

Popišme nyní celkovou stavbu práce. V první kapitole je připomenut středoškolský výklad komplexních čísel s větší pozorností na jejich jejich geometrickou interpretaci, kterou budeme v následujících kapitolách využívat. V dalších kapitolách se pak věnujeme aplikacím komplexních čísel při řešení konkrétních geometrických úloh. Jejich rozdělení do jednotlivých kapitol práce je provedeno na základě toho, o jaký úhel v řešení těchto úloh otáčíme (90°, 60°, obecný úhel), poslední pátá kapitola je pak věnována pravidelným mnohoúhelníkům. V každé z těchto kapitol jsou úlohy seřazeny podle stoupající náročnosti postupu. Touto systematizací se snažím, aby sbírka úloh mohla být využita jako metodická příručka při řešení úloh tohoto typu.

Při sestavování této kolekce příkladů a řešených úloh bylo mým cílem, aby výsledná práce shromáždila co možná nejpestřejší paletu námětů, které jsem v literatuře nalezla a které lze řešit uvedenou metodou, do jednoho textu. Přitom jsem byla vedena snahou, aby byly do práce zařazeny jen ty úlohy, ve kterých je využití komplexních čísel opravdu přínosné.

U zadání zařazených příkladů a úloh uvádím vždy odkaz na zdroj, ze kterého jsem danou úlohu převzala. U některých úloh je poznamenáno, že řešení je *vlastní*, což znamená, že dotyčná známá tvrzení se v literatuře obvykle dokazují odlišnými metodami. Některé úlohy jsou taky označeny jako *původní* (to znamená, že nejsou odnikud převzaté, čímž ovšem nevylučuji, že byly někdy publikovány ve zdroji, který jsem neměla k dispozici).

Kapitola 1

Teoretický základ

Komplexní čísla jsou v současné učebnici pro gymnázia [cal–10] zavedena jako výrazy typu $a+b\mathrm{i}$, kde $a, b \in \mathbf{R}$ a i je číslo, pro něž platí $\mathrm{i}^2 = -1$ a které nazýváme *imaginární jednotka*. Číslo a se nazývá *reálná část* komplexního čísla z (značíme $\Re z$) a číslo b *imaginární část* daného komplexního čísla (značíme $\Im z$). Množinu všech těchto čísel značíme $\mathbf{C}$ a nazýváme ji množinou komplexních čísel. Přitom dvě komplexní čísla se *rovnají*, pokud se rovnají jejich reálné i imaginární části. Je zřejmé, že pokud je $b = 0$, má komplexní číslo tvar $a + 0\mathrm{i}$ a jedná se tedy o číslo reálné. Pokud $a = 0$, pak toto číslo tvaru $b\mathrm{i}$ nazýváme *ryze imaginární*.

Dále na množině všech komplexních čísel definujeme operace *sčítání* a *násobení* takto:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}\,, \qquad (a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}\,.$$

(Komplexní čísla tedy násobíme a sčítáme jako dvojčleny.) Snadno se ukáže, že takto zavedené operace sčítání a násobení komplexních čísel splňují následující vlastnosti:

(i) $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}\colon \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$

(ii) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}\colon \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$

(iii) $\forall z_1 \in \mathbf{C}\colon \quad 0 + z_1 = z_1,$

(iv) $\forall z_1 \in \mathbf{C}\colon \quad z_1 + (-z_1) = 0,$

(v) $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}\colon \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$

(vi) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}\colon \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$

(vii) $\forall z_1 \in \mathbf{C}\colon \quad 1 \cdot z_1 = z_1,$

(viii) $\forall z_1 = a + b\mathrm{i} \in \mathbf{C}, z_1 \neq 0\colon \quad (a + b\mathrm{i}) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right) = 1,$

(ix) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}\colon \quad z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$

První čtyři vlastnosti ukazují, že sčítání na množině komplexních čísel je komutativní, asociativní, existuje nula (nulový prvek) a ke každému číslu existuje prvek opačný. Vlastnosti (v) a (vi) vyjadřují komutativitu a asociativitu násobení, (vii) pak existenci jedničky a (viii) existenci inverzního čísla ke každému nenulovému komplexnímu číslu. Nakonec (ix) ukazuje, že operace sčítání a násobení jsou svázány distributivním zákonem. To vše dohromady v řeči algebry znamená, že komplexní čísla spolu s operacemi sčítání a násobení, jak byly zavedeny výše, tvoří komutativní těleso.

Nechť $z = a + b\mathrm{i}$ je komplexní číslo, pak číslo $a - b\mathrm{i}$ nazýváme číslem *komplexně sdruženým* k číslu z a značíme jej $\overline{z}$. Snadno se ověří, že pro počítání s komplexně sdruženými čísly platí následující pravidla

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}\,, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\,.$$

Lehce lze ukázat, že součin $z \cdot \overline{z}$ je nezáporné reálné číslo pro každé $z \in \mathbf{C}$, přitom $z \cdot \overline{z} = 0$ jedině pro $z = 0$. To nám umožňuje zavést pojem *absolutní hodnoty* komplexního čísla, kterou definujeme jako

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}\,, \quad \forall z \in \mathbf{C}\,.$$

Z této definice ihned plyne, že

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$$

a že pro počítání s absolutní hodnotou platí stejná pravidla, na která jsme zvyklí u čísel reálných:

$$z \neq 0 \Rightarrow |z| > 0\,, \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,, \quad \text{pro } z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}\,, z_2 \neq 0\,.$$

Absolutní hodnota nám umožňuje zavést ještě jeden pojem, který bude hrát důležitou roli při řešení našich úloh: *komplexní jednotka* je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné. Příklady komplexních jednotek jsou čísla 1, -1, i a $-$i.

Nyní se dostáváme k tomu, co je pro tuto práci podstatné, a to je geometrická interpretace komplexních čísel. Komplexní čísla jsou v [cal–10] zavedena jako výrazy tvaru $a + b\mathrm{i}$, formálněji je však můžeme chápat jako uspořádané dvojice (a, b), kde $a, b \in \mathbf{R}$.[1] Sčítání je pak definováno po složkách a násobení stejným předpisem, jak jsme uvedli výše (jedná se jen o jiný zápis téhož):

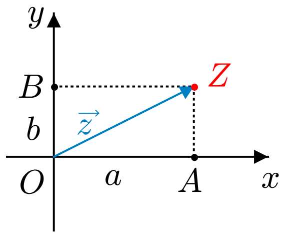
$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)\,, \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Od tohoto zápisu komplexních čísel je již jen krok ke geometrické interpretaci. Zavedeme-li v rovině kartézský souřadný systém O_{xy}, můžeme každému komplexnímu číslu $z = a + b\mathrm{i}$ v této rovině přiřadit bod Z o souřadnicích (a, b). Je zřejmé, že toto zobrazení je vzájemně jednoznačné, stejně jako zobrazení reálných čísel na přímku. Každý bod roviny je tedy obrazem právě jednoho komplexního čísla z. Rovinu, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel nazýváme *rovinou komplexních čísel*, častěji však *Gaussovou rovinou*.[2]

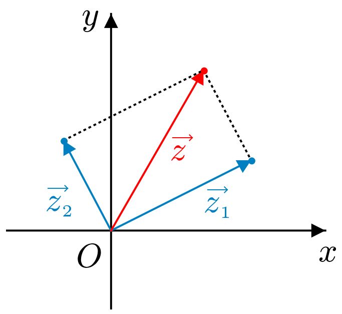
[1] Takto chápal komplexní čísla již irský fyzik a matematik W. R. Hamilton (1805-1865).

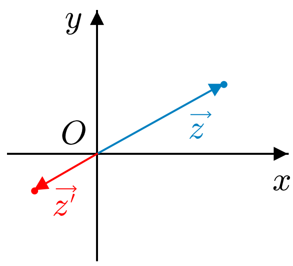
[2] Historicky došlo k rozšíření představ o komplexních číslech jakožto bodech roviny po publikaci Gaussovy práce z roku 1831 – proto název Gaussova rovina. Jako první však ke geometrické interpretaci komplexních čísel dospěl norsko-dánský matematik a kartograf C. Wessel (1745-1818) ve své práci z roku 1798.

Při tomto přiřazení počátku O souřadné soustavy O_{xy} odpovídá číslo 0, na ose x jsou zobrazena čísla reálná, říkáme ji tedy *reálná osa* a na ose y jsou zobrazena čísla ryze imaginární, proto ji nazveme *imaginární osa*.

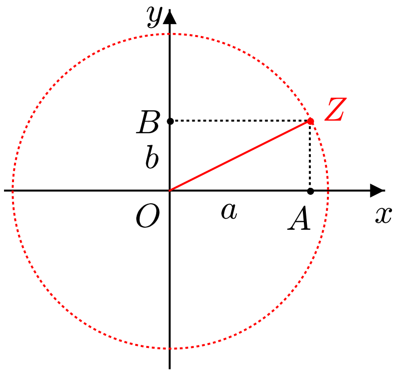


Komplexní čísla ale můžeme chápat rovněž jako vektory v Gaussově rovině. Každému komplexnímu číslu $z = a + b$i lze přiřadit vektor $\vec{z}$ o souřadnicích (a, b), jehož umístěním v Gaussově rovině je orientovaná úsečka OZ, tedy $\vec{z} = \overrightarrow{OZ}$, kde O je počátek Gaussovy a bod Z je obraz komplexního čísla z. Toto zobrazení je také zřejmě vzájemně jednoznačné. Sčítání komplexních čísel pak můžeme v Gaussově rovině znázornit jako sčítání vektorů a násobení komplexního čísla číslem reálným jako násobení vektoru reálným číslem (viz obr., kde vlevo je $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$ a vpravo $\vec{z'} = -\frac{1}{2}\vec{z}$).

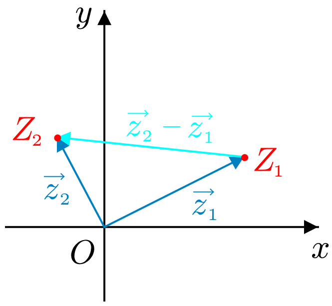




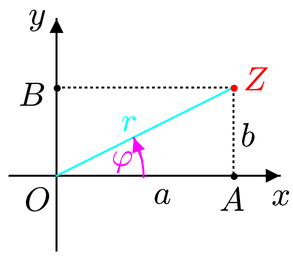
Podívejme se nyní na geometrický význam absolutní hodnoty komplexního čísla $z = a + b$i. Jak bylo uvedeno výše, je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, užitím Pythagorovy věty pro trojúhelník OAZ (viz obr.) je pak zřejmé, že absolutní hodnota daného komplexního čísla z odpovídá v Gaussově rovině vzdálenosti obrazu tohoto čísla Z od počátku O, resp. velikosti vektoru $\vec{z}$, který je tímto číslem určen. Všechny body odpovídající komplexním číslům se stejnou absolutní hodnotou pak tvoří v Gaussově rovině kružnici, v případě komplexních jednotek kružnici o poloměru 1.



Poznamenejme ještě, že absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel $|z_2 - z_1|$ odpovídá vzdálenosti bodů Z_1 a Z_2, které jsou obrazy těchto čísel v Gaussově rovině (plyne to z interpretace komplexních čísel jako vektorů v rovině, neboť hodnota $|z_2 - z_1|$ je rovna velikosti vektoru $\vec{z}_2 - \vec{z}_1$, viz obr.).



Zápis $z = a + bi$ se nazývá *algebraický tvar* daného komplexního čísla. Geometrická interpretace komplexních čísel nás však přivádí ještě k jinému možnému zápisu komplexního čísla. Danému číslu $z = a + bi \in \mathbf{C}$ v Gaussově rovině odpovídá bod Z, který je určen x-ovou souřadnicí a a y-ovou souřadnicí b. Tento bod (v případě $z \neq 0$) však můžeme určit také pomocí jeho vzdálenosti r od počátku O a velikosti orientovaného úhlu φ, který svírá úsečka OZ s kladnou poloosou x.[3]



Je přitom zřejmé, že $r = |z|$ a při pohledu na trojúhelník OAZ pro úhel φ dostaneme

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{|z|}.$$

[3] Jedná se o tzv. *polární souřadnice* daného bodu.

Číslo φ tedy není určeno jednoznačně, protože pokud nějaké φ splňuje předchozí rovnosti, pak taky $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ splňuje tyto dvě rovnosti. Obvykle volíme $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Komplexní číslo z tak můžeme zapsat ve tvaru

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,,$$

tento zápis nazýváme *goniometrický tvar* daného komplexního čísla z a číslo φ nese název *argument* daného komplexního čísla.

Lze odvodit, že pro násobení a dělení dvou nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$ platí vzorce

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2))\,, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2))\,.$$

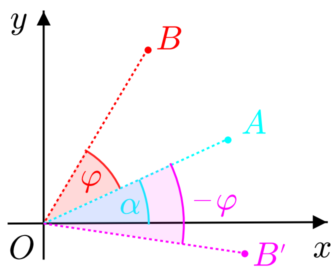
Již výše jsme při znázornění komplexních čísel jakožto vektorů v Gaussově rovině ukázali, jaký je geometrický význam sčítání a odčítání komplexních čísel a násobení komplexního čísla číslem reálným. Nyní užitím goniometrického tvaru komplexních čísel ukážeme, jaký je geometrický význam násobení komplexních čísel, a to nejprve násobení libovolného nenulového komplexního čísla komplexní jednotkou. Nechť

$$\omega = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,, \qquad \omega \neq 1$$

je komplexní jednotka. Mějme dáno libovolné komplexní číslo $a = |a| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, jemuž v Gaussově rovině odpovídá bod A (viz obr.). Vynásobíme-li toto číslo komplexní jednotkou ω dostáváme (s využitím pravidel pro násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru):

$$\omega \cdot a = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \cdot |a| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = |a| \cdot (\cos(\alpha+\varphi) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\varphi)) = b\,,$$

kde $b = \omega \cdot a$ je výsledné komplexní číslo. Z předchozího je zřejmé, že $|a| = |b|$ a argument čísla b se liší od argumentu čísla a o úhel φ. Nechť komplexnímu číslu b odpovídá v Gaussově rovině bod B, pak bod B má stejnou vzdálenost od počátku jako bod A a $|\sphericalangle AOB| = |\varphi|$. To znamená, že bod B dostaneme otočením bodu A kolem počátku o úhel $|\varphi|$, přitom se bod A otočí v kladném smyslu (proti směru chodu hodinových ručiček) do bodu B, je-li $\varphi > 0$ a v záporném smyslu (po směru chodu hodinových ručiček) do bodu B', je-li $\varphi < 0$. Vynásobení komplexní jednotkou ω tedy přiřazuje každému komplexnímu číslu a komplexní číslo b tak, že bod B (odpovídající v Gaussově rovině číslu b) dostaneme otočením bodu A kolem počátku o úhel $|\varphi|$. Vynásobení komplexní jednotkou $\omega = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ tedy charakterizuje v Gaussově rovině zobrazení, které je otočení o orientovaný úhel φ kolem počátku.

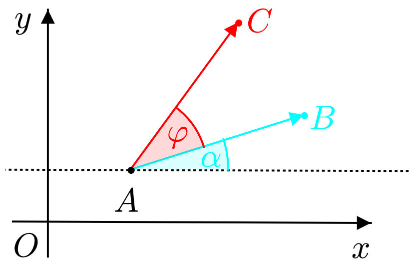


Mějme nyní v rovině dány body A, B, které jsou obrazy komplexních čísel a, b. Vektoru $\overrightarrow{AB}$ pak odpovídá číslo $b-a$. Vynásobme nyní číslo $b-a=|b-a|\cdot(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ komplexní jednotkou ω:

$$\omega(b-a)=\omega\cdot|b-a|\cdot(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)\cdot|b-a|\cdot(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=$$

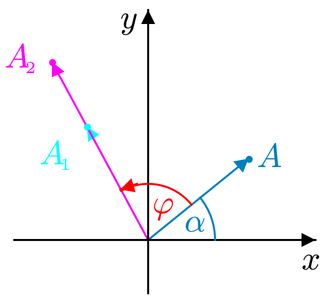
$$=|b-a|\cdot(\cos(\alpha+\varphi)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\varphi))=c-a\,.$$

Vynásobením komplexního čísla $b-a$, které odpovídá vektoru $\overrightarrow{AB}$, komplexní jednotkou ω jsme dostali komplexní číslo $c-a$ se stejnou absolutní hodnotou jako číslo $b-a$, jehož argument se liší od argumentu původního čísla $b-a$ o úhel $|\varphi|$.



Vynásobením vektoru $\overrightarrow{AB}$ komplexní jednotkou ω tedy dostaneme jiný vektor $\overrightarrow{AC}$, který má stejnou velikost jako vektor $\overrightarrow{AB}$ a s vektorem $\overrightarrow{AB}$ svírá úhel $|\varphi|$. Jinak řečeno, vektor $\overrightarrow{AC}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{AB}$ o úhel $|\varphi|$, neboli bod C dostaneme otočením bodu B kolem bodu A o úhel $|\varphi|$.

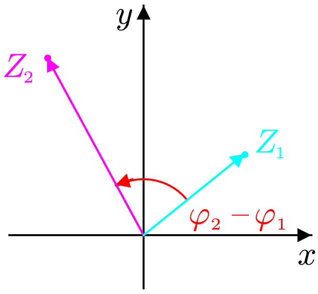
Násobení libovolného komplexního čísla a komplexním číslem $z=|z|(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)\neq 0$ pak můžeme jednoduše rozložit na násobení komplexní jednotkou $\omega_z=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ a následné vynásobení reálným číslem $|z|$. Geometricky to tedy znamená, že nejprve bod A, který odpovídá komplexnímu číslu a otočíme kolem počátku o úhel φ do bodu A_1 a následně bod A_1 zobrazíme do bodu A_2 na polopřímce OA_1 tak, že $|OA_2|=|z|\cdot|OA_1|$.



Podívejme se ještě na geometrický význam podílu dvou nenulových komplexních čísel

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2))\,.$$

Absolutní hodnota výsledného podílu udává poměr velikostí vektorů $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ a argument podílu udává úhel, který vektory $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ svírají.



Pro umocňování komplexního čísla $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ libovolným číslem $n \in \mathbf{Z}$ platí tzv. *Moivreova věta*:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)\,.$$

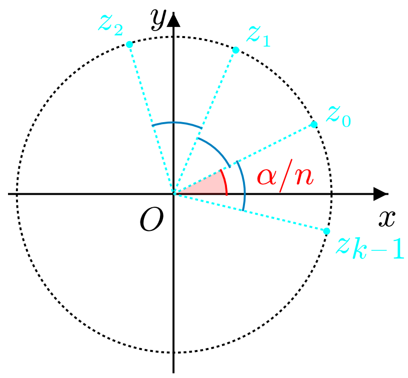
Pomocí Moivreovy věty je možné odvodit (viz např. [cal–10]), že binomická rovnice s neznámou z tvaru

$$z^n - a = 0\,, \qquad n \in \mathbf{N}\,,\ n > 1\,, \quad a \in \mathbf{C}\colon\ a = |a|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \neq 0\,,$$

má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů ve tvaru

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\,, \quad k = 0, \dots, n-1\,. \tag{1.1}$$

Jinak řečeno, všechny n-té komplexní odmocniny čísla a jsou tvaru (1.1) a je jich právě n. Všechny tyto odmocniny mají stejnou absolutní hodnotu rovnu $\sqrt[n]{|a|}$, v Gaussově rovině tedy leží na jedné kružnici o poloměru $\sqrt[n]{|a|}$. Jsou-li Z_k a Z_{k+1} obrazy kořenů z_k a z_{k+1}, je úhel Z_kOZ_{k+1} vždy roven $\frac{2\pi}{n}$. Všechny kořeny $z_0, \dots, z_{k-1}$ tedy tvoří v Gaussově rovině vrcholy pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.



Na závěr uveďme ještě jeden možný zápis komplexního čísla. Stejně jako v [rab–96] definujme funkci e^z pro každé $z \in \mathbf{C}$, $z = x + y\mathrm{i}$ tímto předpisem

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+y\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,.$$

Pro $y = 0$ je $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x$, takže funkce e^z je rozšířením funkce e^x z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{C}$. Lehce lze ukázat, že platí

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z\,, \qquad \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}\,, \qquad \mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}\,.$$

Z definice exponenciální funkce je zřejmé, že každé komplexní číslo $z = |z| \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ můžeme psát ve tvaru

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,.$$

Tento zápis nazýváme *exponenciální tvar* daného komplexního čísla. Jeho výhodou je především stručnost zápisu komplexních jednotek a jejich násobení. Zápis budeme využívat výhradně ve čtvrté kapitole, při řešení jedné úlohy tam uplatníme i významné vzorce

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\,,$$

jež plynou z exponenciálních tvarů dvou komplexně sdružených jednotek

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \qquad \text{a} \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi\,.$$

Kapitola 2

Otáčení o úhel $\frac{\pi}{2}$

V této kapitole uvedeme 14 geometrických úloh, které lze řešit s využitím otáčení o úhel $\frac{\pi}{2}$, jde tedy o úlohy, které mají v zadání předpoklad o jisté kolmosti nebo naopak nějakou kolmost dokazují. Často tak jde o úlohy, ve kterých vystupují čtverce nebo pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky.

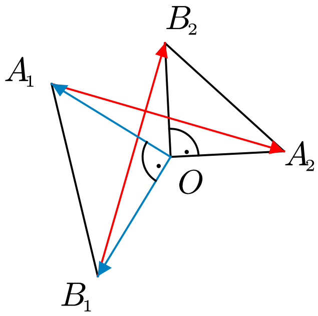
Otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru v komplexní rovině odpovídá násobení komplexního čísla příslušného danému vektoru komplexní jednotkou i. Právě tak totiž dostaneme komplexní číslo, jež přísluší obrazu původního vektoru při zmíněném otočení. V následujících úlohách budeme využívat známých vlastností imaginární jednotky

$$\mathrm{i}^2 = -1\,, \qquad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}\,, \qquad \mathrm{i}^4 = 1\,. \tag{2.1}$$

Podobně otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v záporném směru znamená vynásobení komplexní jednotkou $-\mathrm{i}$ (v uvedeném vektorově-algebraickém významu).

Udělejme ještě dohodu, že body Gaussovy roviny budeme dále značit velkými písmeny (A, $B, \dots$) a jim odpovídající komplexní čísla příslušnými malými písmeny (a, $b, \dots$). Dále se domluvme, že zkoumané trojúhelníky a čtyřúhelníky ze zadáních úloh leží v jedné rovině a jsou popisovány vždy v kladném směru, abychom při řešení úloh nemuseli často upřesňovat směr otáčení.

Úloha 2.1: *Nechť A_1B_1O a A_2B_2O jsou dva pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s pravými úhly při společném vrcholu O. Dokažte, že platí rovnost $|A_1A_2| = |B_1B_2|$ a zároveň $A_1A_2 \perp B_1B_2$.*[1]



Řešení:
Jistě můžeme předpokládat, že společnému bodu O obou trojúhelníků odpovídá v Gaussově rovině komplexní číslo 0. Protože trojúhelník OA_1B_1 je podle zadání rovnoramenný a pravoúhlý, je vektor $\overrightarrow{OB_1}$ otočením vektoru $\overrightarrow{OA_1}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, čemuž, jak víme, algebraicky odpovídá vynásobení komplexní jednotkou i. Analogicky to platí i pro vektory $\overrightarrow{OB_2}$ a $\overrightarrow{OA_2}$ v trojúhelníku OA_2B_2, a tedy

$$b_1 = \mathrm{i}a_1 , \qquad b_2 = \mathrm{i}a_2 .$$

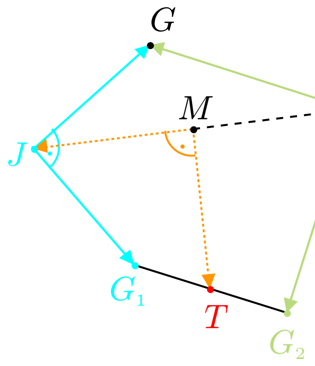
Vektorům $\overrightarrow{A_1A_2}$ a $\overrightarrow{B_1B_2}$ pak odpovídají komplexní čísla

$$\overrightarrow{A_1A_2} : \quad a_2 - a_1 , \qquad \overrightarrow{B_1B_2} : \quad b_2 - b_1 = \mathrm{i}(a_2 - a_1) .$$

Odtud je zřejmé, že vektor $\overrightarrow{B_1B_2}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{A_1A_2}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, a tedy $|A_1A_2| = |B_1B_2|$ a zároveň $A_1A_2 \perp B_1B_2$. □

Úloha 2.2: *Jeden muž našel v podkroví starý popis piráta, který zemřel před mnoha lety. Četl toto: Běž na ostrov X, začni u šibenice G, běž k jilmu J a počítej kroky. Pak se otoč doleva o 90° a běž stejný počet kroků až do bodu G_1. Znovu běž od šibenice k fíkovníku F a počítej kroky. Pak se otoč doprava o 90° a běž stejný počet kroků až do bodu G_2. Poklad je zakopán ve středu T spojnice bodů G_1 a G_2. Muž přicestoval na ostrov, našel jilm a fíkovník, ale šibenici nemohl najít, pomozte mu určit bod T.*[2]

[1] [švr–00], str. 24, úloha 1, řešení vlastní.
[2] [eng–97], str. 295, úloha E9; [tab–02], str. 48, úloha 10.



Řešení:
Vektor $\overrightarrow{JG_1}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{JG}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v záporném směru, čemuž algebraicky odpovídá násobení komplexní jednotkou $-\mathrm{i}$. Pro odpovídající komplexní číslo tak dostáváme

$$g_1 - j = -\mathrm{i}(g - j)\,, \quad \text{neboli} \quad g_1 = j - \mathrm{i}(g - j)\,.$$

Vektor $\overrightarrow{FG_2}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{FG}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, čemuž algebraicky odpovídá násobení komplexní jednotkou i. Pro číslo g_2 tak dostáváme

$$g_2 - f = \mathrm{i}(g - f)\,, \quad \text{neboli} \quad g_2 = f + \mathrm{i}(g - f)\,.$$

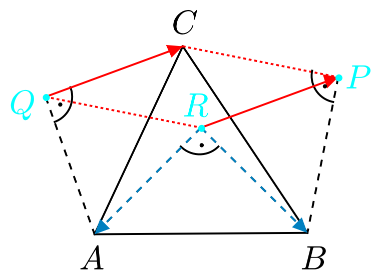
Bod T je podle zadání střed úsečky G_1G_2, odtud

$$t = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) = \frac{1}{2}(j + f) + \frac{1}{2}\mathrm{i}(j - f)\,. \tag{2.2}$$

Označme nejprve komplexní číslo $m = \frac{1}{2}(j + f)$, obrazem tohoto čísla v Gaussově rovině je bod M, střed úsečky JF. Vektor $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FJ}$, jemuž odpovídá komplexní číslo $j - m = \frac{1}{2}(j - f)$ otočíme o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a podle (2.2) pak dostaneme vektor $\overrightarrow{MT}$: $t - m = \frac{1}{2}\mathrm{i}(j - f)$. Pomocí bodu M a vektoru $\overrightarrow{MT}$ dostaneme bod T (jako obraz čísla $t = m + \frac{1}{2}(t - m) = \frac{1}{2}(j + f) + \frac{1}{2}\mathrm{i}(j - f)$), a tak vidíme, že na umístění šibenice G vůbec nezáleží. $\square$

Úloha 2.3: *Je dán trojúhelník ABC s vnitřními úhly při vrcholech A, B většími než $\frac{\pi}{4}$. Nad jeho stranou AB je sestrojen pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABR tak, že vrchol R s pravým úhlem leží uvnitř trojúhelníku ABC. Podobně stranám BC a AC jsou po řadě vně připsané pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky CBP a ACQ s pravými úhly při vrcholech P a Q. Dokažte, že $CQRP$ je rovnoběžník.*[3]

[3] [švr–01], str. 48, úloha 1, řešení vlastní.



Řešení:
Bod R je vrchol pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku sestrojeného nad stranou AB, vektor $\overrightarrow{RB}$ je tedy otočením vektoru $\overrightarrow{RA}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, čemuž odpovídá vynásobení komplexní jednotkou i. Pro příslušná komplexní čísla tak platí

$$b - r = \mathrm{i}(a - r)\,, \qquad \text{odtud} \qquad r = \frac{1}{1-\mathrm{i}}(b - \mathrm{i}a) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(b - \mathrm{i}a) = \frac{1}{2}(a + b - \mathrm{i}a + \mathrm{i}b)\,.$$

Analogicky vektor $\overrightarrow{QC}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{QA}$ a vektor $\overrightarrow{PB}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{PC}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, a tedy

$$c - q = \mathrm{i}(a - q)\,, \qquad \text{odtud} \qquad q = \frac{1}{1-\mathrm{i}}(c - \mathrm{i}a) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(c - \mathrm{i}a) = \frac{1}{2}(a + c - \mathrm{i}a + \mathrm{i}c)\,,$$

$$b - p = \mathrm{i}(c - p) \qquad \text{neboli} \qquad p = \frac{1}{1-\mathrm{i}}(b - \mathrm{i}c) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(b - \mathrm{i}c) = \frac{1}{2}(b + c - \mathrm{i}c + \mathrm{i}b)\,.$$

Nyní najdeme vektory $\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{RP}$ a jim odpovídající komplexní čísla:

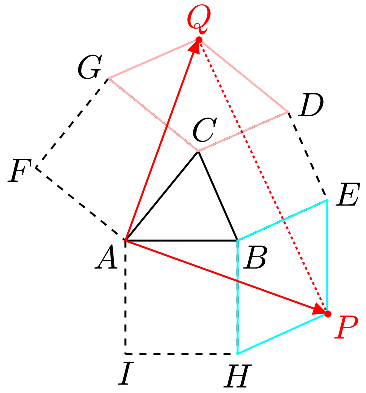
$$\overrightarrow{QC}: \quad c - q = c - \frac{1}{2}(a + c - \mathrm{i}a + \mathrm{i}c) = \frac{1}{2}(-a + c + \mathrm{i}a - \mathrm{i}c)\,,$$

$$\overrightarrow{RP}: \quad p - r = \frac{1}{2}(b + c - \mathrm{i}c + \mathrm{i}b) - \frac{1}{2}(a + b - \mathrm{i}a + \mathrm{i}b) = \frac{1}{2}(-a + c + \mathrm{i}a - \mathrm{i}c)\,.$$

Z předchozího vidíme, že $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{RP}$, a tedy $CQRP$ je rovnoběžník. □

Úloha 2.4: *Čtverce $CBED$, $ACGF$, $BAIH$ jsou sestrojeny vně nad stranami libovolného trojúhelníku ABC. Trojúhelníky GCD a EBH jsou doplněny na rovnoběžníky $GCDQ$ a $EBHP$. Dokažte, že trojúhelník APQ je rovnoramenný a pravoúhlý, s pravým úhlem u vrcholu A.*[4]

[4] [rad–07], str. 3, úloha 3.



Řešení:
Vektor $\overrightarrow{BH}$ čtverce sestrojeného nad stranou AB dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{BA}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, tomu odpovídá násobení komplexní jednotkou i. Pro komplexní číslo odpovídající vrcholu H tak dostáváme

$$h-b=\mathrm{i}(a-b)\,, \qquad \text{odtud} \qquad h=(1-\mathrm{i})b+\mathrm{i}a\,.$$

Analogicky najdeme vyjádření komplexních čísel odpovídajících vrcholům E, D, G:

$$e-b=-\mathrm{i}(c-b)\,, \qquad \text{odtud} \qquad e=(1+\mathrm{i})b-\mathrm{i}c\,.$$

$$d-c=\mathrm{i}(b-b)\,, \qquad \text{odtud} \qquad d=(1-\mathrm{i})c+\mathrm{i}b\,.$$

$$g-c=-\mathrm{i}(a-c)\,, \qquad \text{odtud} \qquad g=(1+\mathrm{i})c-\mathrm{i}a\,.$$

Podle zadání je $EBHP$ rovnoběžník, platí proto $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{BH}$, pro odpovídající komplexní čísla pak s využitím předchozích rovností dostáváme

$$p-e=h-b\,, \qquad \text{neboli} \qquad p=e+h-b=(1+\mathrm{i})b-\mathrm{i}c+(1-\mathrm{i})b+\mathrm{i}a-b=\mathrm{i}a+b-\mathrm{i}c\,.$$

Podobně $GCDQ$ je rovnoběžník, tedy $\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{CG}$, odtud

$$q-d=g-c\,, \qquad \text{neboli} \qquad q=d+g-c=(1-\mathrm{i})c+\mathrm{i}b+(1+\mathrm{i})c-\mathrm{i}a-c=-\mathrm{i}a+\mathrm{i}b+c\,.$$

Nyní vyjádříme komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{AP}$ a $\overrightarrow{AQ}$:

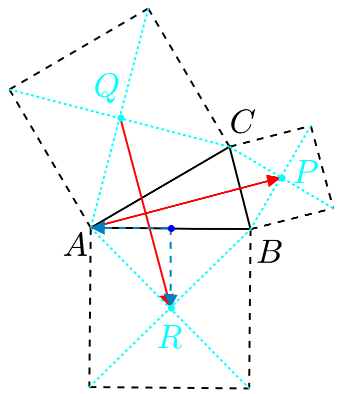
$$\overrightarrow{AP}: \quad p-a=(\mathrm{i}-1)a+b-\mathrm{i}c\,, \qquad \overrightarrow{AQ}: \quad q-a=(-\mathrm{i}-1)a+\mathrm{i}b+c\,.$$

Máme dokázat, že trojúhelník APQ je rovnoramenný a pravoúhlý, což nastane, pokud vektor $\overrightarrow{AQ}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{AP}$ o úhel $\pm\frac{\pi}{2}$, v řeči komplexních čísel vynásobením komplexní jednotkou $\pm$i. Z odvozených rovností plyne

$$\mathrm{i}(p-a)=(\mathrm{i}^2-\mathrm{i})a+\mathrm{i}b-\mathrm{i}^2c=(-1-\mathrm{i})a+\mathrm{i}b+c=q-a\,,$$

což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Úloha 2.5: *Nechť P, Q, R jsou po řadě středy čtverců sestrojených vně nad stranami BC, CA, AB libovolného trojúhelníku ABC. Dokažte, že platí rovnost $|AP| = |QR|$ a zároveň $AP \perp QR$.*[5]



Řešení:
Střed R čtverce sestrojeného nad stranou AB získáme tak, že ke středu strany AB, který vyjádříme pomocí komplexního čísla $\frac{1}{2}(a+b)$, přičteme polovinu vektoru $\overrightarrow{BA}$ otočeného o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, kterému odpovídá komplexní číslo $\mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b)$. Analogicky dostaneme středy P a Q dalších dvou:

$$r = \frac{1}{2}(a+b) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b)\,, \qquad q = \frac{1}{2}(a+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c-a)\,, \qquad p = \frac{1}{2}(b+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c)\,.$$

Nyní vyjádříme komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{AP}$ a $\overrightarrow{QR}$:

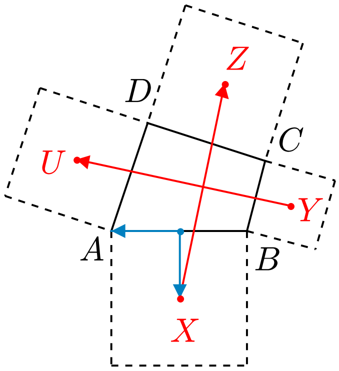
$$\overrightarrow{AP}: \quad p-a = \frac{1}{2}(b+c-2a) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c)\,, \qquad \overrightarrow{QR}: \quad r-q = \frac{1}{2}(b-c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(2a-b-c)\,.$$

Máme dokázat, že vektory $\overrightarrow{AP}$ a $\overrightarrow{QR}$ jsou navzájem kolmé a stejně dlouhé. To nastane, pokud $\overrightarrow{AP}$ dostaneme otočením $\overrightarrow{RQ}$ o úhel $\pm\frac{\pi}{2}$, v řeči komplexních čísel vynásobením komplexní jednotkou i nebo $-\mathrm{i}$. Pro první z nich to z odvozených rovností snadno vyplývá:

$$\mathrm{i}(r-q) = \mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c) - \frac{1}{2}(2a-b-c) = p-a\,. \qquad \square$$

[5] [švr–00], str. 28, úloha 6, řešení vlastní. S ohledem na symetrii dané situace mají stejné vlastnosti i dvojice úseček BQ, PR a CR, PQ.

Úloha 2.6: *Nad stranami libovolného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou vně sestrojeny čtyři čtverce. Jsou-li středy čtverců označeny po řadě X, Y, Z, U, pak úsečky XZ a YU jsou navzájem kolmé a stejně dlouhé. Dokažte.*[6]



Řešení 1:
Střed X čtverce sestrojeného nad stranou AB získáme tak, že ke středu strany AB (který je obrazem komplexního čísla $\frac{1}{2}(a+b)$) přičteme polovinu vektoru $\overrightarrow{BA}$ otočeného o úhel $\frac{\pi}{2}$ (které odpovídá číslo $\mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b)$). Analogicky dostaneme také středy ostatních čtverců:

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b)\,, \qquad y = \frac{1}{2}(b+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c)\,,$$

$$z = \frac{1}{2}(c+d) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c-d)\,, \qquad u = \frac{1}{2}(d+a) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(d-a)\,.$$

Nyní vyjádříme komplexními čísly vektory $\overrightarrow{XZ}$ a $\overrightarrow{YU}$:

$$\overrightarrow{XZ}: \quad z - x = \frac{1}{2}(c+d-a-b) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c-d-a+b)\,,$$

$$\overrightarrow{YU}: \quad u - y = \frac{1}{2}(d+a-b-c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(d-a-b+c)\,.$$

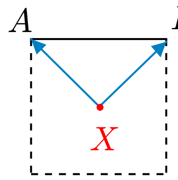
Tyto vektory jsou navzájem kolmé a stejně dlouhé, pokud jeden z nich dostaneme otočením druhého o úhel $\pm\frac{\pi}{2}$, čili vynásobením jednou z komplexních jednotek $\pm\mathrm{i}$. Skutečně,

$$(z-x)\mathrm{i} = \frac{1}{2}(a+d-b-c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c+d-a-b) = u - y\,.$$

Důkaz je hotov. $\square$

[6] [eng–97], str. 296, úloha E11; [lar–90], str. 391, úloha 8.3.14; [švr–00], str. 29, úloha 7. Tvrzení je známé pod názvem *první Van Aubelova věta*.

Řešení 2:



Protože X je střed čtverce sestrojeného nad stranou AB, je bod A obrazem bodu B v otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ se středem X. Pro odpovídající komplexní čísla tak platí $a = x + \mathrm{i}(b - x)$. Úpravou získáme první ze čtyř rovností, další tři pak dostaneme analogicky

$$a = (1-\mathrm{i})x + \mathrm{i}b\,, \qquad b = (1-\mathrm{i})y + \mathrm{i}c\,,$$

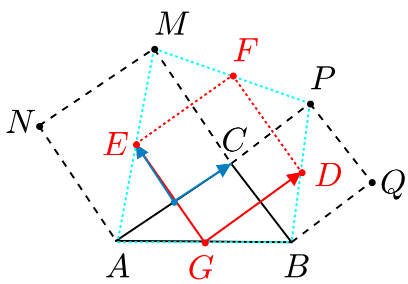
$$c = (1-\mathrm{i})z + \mathrm{i}d\,, \qquad d = (1-\mathrm{i})u + \mathrm{i}a\,.$$

Vynásobíme-li jednotlivé rovnosti po řadě čísly 1, i, i^2, i^3 a pak je sečteme, dostaneme

$$a + \mathrm{i}b - c - \mathrm{i}d = (1-\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y - z - \mathrm{i}u) + (\mathrm{i}b - c - \mathrm{i}d + a)\,.$$

Výraz nalevo je ovšem roven poslední závorce napravo, takže s ohledem na $1 - \mathrm{i} \neq 0$ odtud máme $x + \mathrm{i}y - z - \mathrm{i}u = 0$, neboli $z - x = \mathrm{i}(y - u)$, takže úsečky XZ a YU jsou skutečně shodné a navzájem kolmé. □

Úloha 2.7: *Čtverce $CBQP$ a $ACMN$ jsou sestrojeny vně nad stranami daného trojúhelníku ABC. Ukažte, že středy D, E těchto čtverců, střed G strany AB a střed F úsečky MP jsou vrcholy čtverce.*[7]



Řešení:
Všimněme si, že $GDFE$ je čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou středy stran čtyřúhelníku $ABPM$ (viz obr.), takže se jedná o rovnoběžník.[8] Proto stačí ukázat, že jeho strany EG a GD jsou stejně dlouhé a navzájem kolmé.

[7] [eng–97], str. 296-297, úloha E12. Tvrzení o bodech D, E, G (že to jsou vrcholy pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku) je uvedeno v [švr–00], str. 25, jako úloha 2.

[8] Jde o tzv. *Varignonův rovnoběžník* daného čtyřúhelníku.

Pro komplexní číslo odpovídající středu G strany AB platí

$$g = \frac{1}{2}(a + b)\,.$$

Střed E čtverce $ACMN$ sestrojeného nad stranou AC získáme tak, že ke středu strany AC přičteme polovinu vektoru $\overrightarrow{AC}$ otočeného o úhel $\frac{\pi}{2}$ (stejně jako v úloze 2.5). Analogicky rovněž dostaneme střed D čtverce sestrojeného nad stranou BC:

$$e = \frac{1}{2}(a + c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c - a)\,, \qquad d = \frac{1}{2}(b + c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(b - c)\,.$$

Vektory $\overrightarrow{GD}$ a $\overrightarrow{GE}$ jsou tudíž určeny čísly

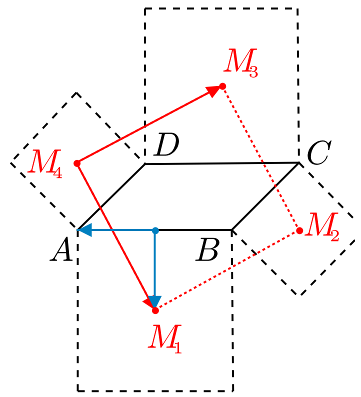
$$\overrightarrow{GD}: \quad d - g = \frac{1}{2}(c - a) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(b - c)\,, \qquad \overrightarrow{GE}: \quad e - g = \frac{1}{2}(c - b) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c - a)\,.$$

Tyto vektory jsou navzájem kolmé a stejně dlouhé, pokud jeden z nich dostaneme otočením druhého o úhel $\frac{\pi}{2}$, což algebraicky ověříme násobením komplexní jednotkou i:

$$(d - g)\mathrm{i} = \frac{1}{2}(c - b) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c - a) = e - g\,.$$

Odtud již plyne, že $GDFE$ je skutečně čtverec. $\square$

Úloha 2.8: *Nad stranami libovolného rovnoběžníku $ABCD$ jsou vně sestrojeny čtverce. Dokažte, že jejich středy M_1, M_2, M_3, M_4 jsou vrcholy čtverce.*[9]



[9] [lar–90], str. 391, úloha 8.3.12; [tab–02], str. 48, úloha 7. Připomeňme, že v případě *libovolného* čtyřúhelníku $ABCD$ jsou středy M_1, M_2, M_3, M_4 vrcholy čtyřúhelníku se stejně dlouhými a navzájem kolmými úhlopříčkami (úloha 2.6).

Řešení:
Střed M_1 čtverce sestrojeného nad stranou AB získáme tak, že ke středu strany AB přičteme polovinu vektoru $\overrightarrow{BA}$ otočeného o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru. Analogicky rovněž dostaneme středy ostatních čtverců:

$$m_1 = \frac{1}{2}(a+b) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b)\,, \qquad m_2 = \frac{1}{2}(b+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c)\,,$$

$$m_3 = \frac{1}{2}(c+d) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c-d)\,, \qquad m_4 = \frac{1}{2}(d+a) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(d-a)\,.$$

Odtud vyjádříme komplexními čísly vektory $\overrightarrow{M_2M_1}$ a $\overrightarrow{M_3M_4}$:

$$\overrightarrow{M_2M_1}: \quad m_1 - m_2 = \frac{1}{2}(a-c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b+c-b)\,,$$

$$\overrightarrow{M_3M_4}: \quad m_4 - m_3 = \frac{1}{2}(a-c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(d-a+d-c)\,.$$

S využitím toho, že $ABCD$ je rovnoběžník, a tedy $d-a=c-b$ a $d-c=a-b$, dostaneme rovnost $m_1-m_2=m_4-m_3$, tudíž $M_1M_2M_3M_4$ je rovnoběžník. Půjde o čtverec, pokud vektor $\overrightarrow{M_4M_3}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{M_4M_1}$ o $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, v řeči komplexních čísel vynásobením odpovídajícího čísla imaginární jednotkou i. Z odvozených vyjádření obdržíme

$$m_1-m_4 = \frac{1}{2}(b-d)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b+a-d) = \frac{1}{2}(b-d)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(d-c+a-d) = \frac{1}{2}(b-d)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(a-c)\,,$$

$$m_3-m_4 = \frac{1}{2}(c-a)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(a-d+c-d) = \frac{1}{2}(c-a)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c+c-d) = \frac{1}{2}(c-a)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(b-d)\,,$$

$$(m_1-m_4)\mathrm{i} = \frac{1}{2}\mathrm{i}(b-d) + \mathrm{i}^2\frac{1}{2}(a-c) = \frac{1}{2}\mathrm{i}(b-d) + \frac{1}{2}(c-a) = m_3-m_4\,,$$

a tedy $M_1M_2M_3M_4$ je skutečně čtverec. □

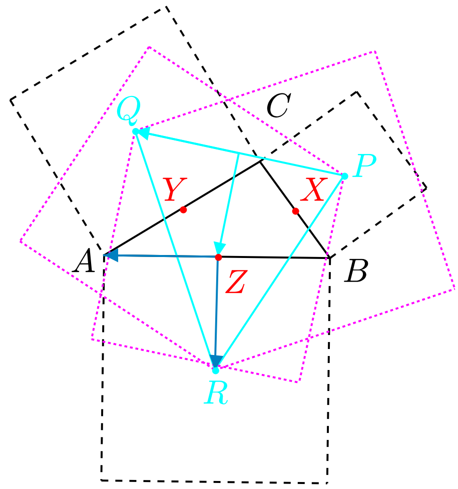
Poznámka:
V podaném řešení jsme nevyužili výsledku úlohy 2.6. Podle něho stačilo ukázat, že úhlopříčky M_1M_3 a M_2M_4 se navzájem půlí. To z vyjádření čísel m_1, m_2, m_3, m_4 snadno vyplývá:

$$\frac{m_1+m_3}{2} = \frac{m_2+m_4}{2} = \frac{1}{4}(a+b+c+d)\,,$$

neboť $a-b+c-d=0$. Vidíme navíc, že střed čtverce $M_1M_2M_3M_4$ splývá se středem rovnoběžníku $ABCD$.

Úloha 2.9: *Nechť P, Q, R jsou po řadě středy čtverců sestrojených vně nad stranami BC, CA, AB libovolného trojúhelníku ABC. Dále nechť X, Y, Z jsou po řadě středy čtverců sestrojených nad stranami QR, RP, PQ trojúhelníku PQR nikoliv vně, nýbrž do polorovin jeho vnitřku. Dokažte, že body X, Y, Z jsou středy stran trojúhelníku ABC.*[10]

[10] [tab–02], str. 48, úloha 8, řešení vlastní.



Řešení:
Střed R čtverce sestrojeného nad stranou AB získáme tak, že ke středu strany AB, který vyjádříme pomocí komplexního čísla $\frac{1}{2}(a+b)$, přičteme polovinu vektoru $\overrightarrow{BA}$ otočeného o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, kterému odpovídá komplexní číslo $\mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b)$. Analogicky pak dostaneme i středy P a Q. Odpovídající komplexní čísla proto jsou

$$r = \frac{1}{2}(a+b) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(a-b)\,, \qquad q = \frac{1}{2}(a+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c-a)\,, \qquad p = \frac{1}{2}(b+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c)\,.$$

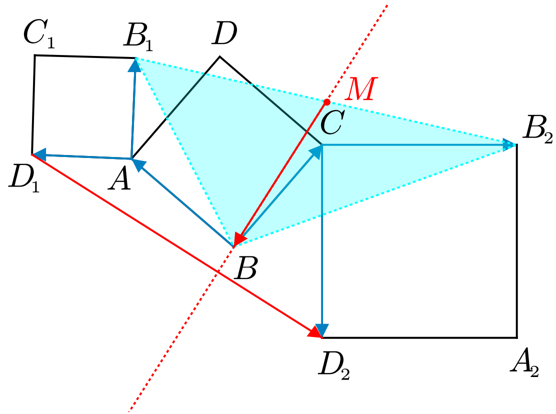
Střed Z čtverce sestrojeného uvnitř nad stranou PQ získáme tak, že ke středu strany PQ, který vyjádříme pomocí komplexního čísla $\frac{1}{2}(p+q)$, přičteme polovinu vektoru $\overrightarrow{PQ}$ otočeného o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, kterému odpovídá komplexní číslo $\mathrm{i}\frac{1}{2}(q-p)$. Odpovídající komplexní číslo z je proto rovno

$$z = \frac{1}{2}(p+q) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(q-p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(b+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c) + \frac{1}{2}(a+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c-a)\right) +$$

$$+\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+c) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(c-a) - \frac{1}{2}(b+c) - \mathrm{i}\frac{1}{2}(b-c)\right) = \frac{1}{4}(2a+2b) = \frac{1}{2}(a+b)\,.$$

Bod Z je tedy skutečně středem strany AB původního trojúhelníku ABC. S ohledem na symetrii je jasné, že body Y, X jsou po řadě středy stran AC, BC a celý důkaz je hotov. □

Úloha 2.10: *Jsou dány tři čtverce $ABCD$, $AB_1C_1D_1$, $A_2B_2CD_2$ (první a druhý čtverec mají společný vrchol A, první a třetí čtverec mají společný vrchol C). Dokažte, že těžnice BM trojúhelníku BB_2B_1 je kolmá na přímku D_1D_2.*[11]



Řešení:
Zvolme vrchol A za počátek komplexní roviny, tzn. $a = 0$. Vektor $\overrightarrow{BC}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{BA}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v záporném směru, tomu odpovídá násobení komplexní jednotkou $-\mathrm{i}$, bod C je proto obrazem komplexního čísla c, pro něž platí

$$c - b = -\mathrm{i}(0 - b)\,, \quad \text{neboli} \quad c = b + \mathrm{i}b\,.$$

Podobně vektor $\overrightarrow{AD_1}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{AB_1}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a vektor $\overrightarrow{CD_2}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{CB_2}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v záporném směru, odtud pro odpovídající čísla plyne

$$d_1 = \mathrm{i}b_1\,, \qquad d_2 - c = -\mathrm{i}(b_2 - c)\,.$$

Do druhého vyjádření ještě dosadíme za c a dostáváme

$$d_2 = b + \mathrm{i}b - \mathrm{i}(b_2 - b - \mathrm{i}b) = 2\mathrm{i}b - \mathrm{i}b_2\,.$$

Protože BM je těžnice trojúhelníku BB_2B_1, je bod M střed strany B_1B_2, pro odpovídající komplexní číslo tedy platí

$$m = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\,.$$

Nyní najdeme komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{MB}$ a $\overrightarrow{D_1D_2}$

$$b - m = b - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2\,, \qquad d_2 - d_1 = 2\mathrm{i}b - \mathrm{i}b_2 - \mathrm{i}b_1\,.$$

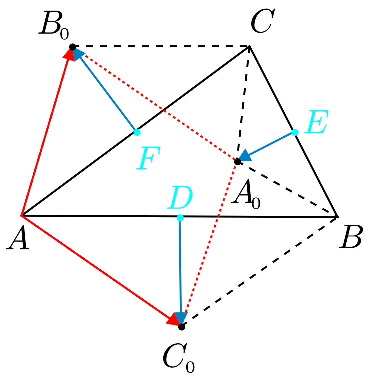
Podíl těchto dvou komplexních čísel je roven

$$\frac{d_2 - d_1}{b - m} = \frac{2\mathrm{i}b - \mathrm{i}b_2 - \mathrm{i}b_1}{b - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2} = 2\mathrm{i}\,,$$

což je číslo ryze imaginární, vektory $\overrightarrow{MB}$ a $\overrightarrow{D_1D_2}$ jsou tedy navzájem kolmé, což jsme měli dokázat. Navíc jsme zjistili, že $|D_1D_2| = 2|MB|$. □

[11] [tab–02], str. 47, úloha 4, řešení vlastní.

Úloha 2.11: *Je dán trojúhelník ABC. Nad stranami AB a AC vně a nad stranou BC dovnitř jsou jako nad základnami sestrojeny navzájem podobné rovnoramenné trojúhelníky BAC_0, ACB_0 a BCA_0. Dokažte, že čtyřúhelník $AC_0A_0B_0$ je rovnoběžník.*[12]



Řešení:
Nechť D, E, F jsou postupně středy stran AB, BC, CA, takže platí

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\,, \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.$$

Máme dokázat, že $AC_0A_0B_0$ je rovnoběžník, že tedy platí vektorová rovnost

$$\overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0} = \overrightarrow{AA_0}\,.$$

Nejprve vyjádříme potřebné vektory takto:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB_0} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB_0} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FB_0}\,,\\
\overrightarrow{AC_0} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC_0} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC_0}\,,\\
\overrightarrow{AA_0} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA_0} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{EA_0} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EA_0}\,.
\end{aligned}$$

Protože trojúhelníky BAC_0, ACB_0 a BCA_0 jsou rovnoramenné, jsou jejich těžnice z vrcholů A_0, B_0 a C_0 kolmé na příslušné základny (jsou to tedy zároveň výšky); navíc jsou tyto trojúhelníky podobné, a tedy poměry velikostí jejich stran a výšek jsou shodné:

$$\frac{|FB_0|}{|AC|} = \frac{|EA_0|}{|BC|} = \frac{|DC_0|}{|AB|} = k\,,$$

kde $k \in \mathbf{R}^+$. Odtud plyne, že vektor $\overrightarrow{FB_0}$ dostaneme vynásobením vektoru $\overrightarrow{AC}$ reálným číslem k a jeho otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, čemuž v Gaussově rovině odpovídá vynásobení komplexním číslem ki. Analogicky dostaneme vektory $\overrightarrow{DC_0}$, resp. $\overrightarrow{EA_0}$ z vektorů $\overrightarrow{AB}$, resp. $\overrightarrow{CB}$. Pro komplexní čísla odpovídající jednotlivým bodům a vektorům pak

[12] [lar–90], str. 385-387, úloha 8.3.5.

můžeme psát

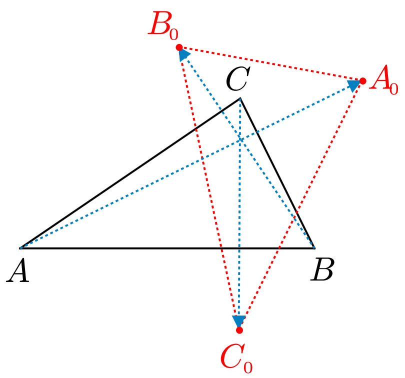
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB_0}:&\quad b_0 - a = \tfrac{1}{2}(c-a) + k\mathrm{i}(c-a)\,,\\ \overrightarrow{AC_0}:&\quad c_0 - a = \tfrac{1}{2}(b-a) - k\mathrm{i}(b-a)\,,\\ \overrightarrow{AA_0}:&\quad a_0 - a = \tfrac{1}{2}(b-a) + \tfrac{1}{2}(c-a) + k\mathrm{i}(c-b)\,.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$\overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0} = -a + \left(\frac{1}{2} - k\mathrm{i}\right) b + \left(\frac{1}{2} + k\mathrm{i}\right) c = \overrightarrow{AA_0}\,,$$

tedy $AC_0A_0B_0$ je skutečně rovnoběžník. □

Úloha 2.12: *Výšky trojúhelníku ABC prodloužíme za jejich paty až po takové body A_0, B_0, C_0, že $|AA_0| = \frac{k}{v_a}$, $|BB_0| = \frac{k}{v_b}$, $|CC_0| = \frac{k}{v_c}$, kde k je konstanta a v_a, v_b, v_c jsou standardní označení délek zmíněných výšek. Dokažte, že těžiště trojúhelníku $A_0B_0C_0$ splývá s těžištěm trojúhelníku ABC bez ohledu na hodnotu konstanty k.*[13]



Řešení:

Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \frac{1}{2}\cdot|BC|\,v_a = \frac{1}{2}\cdot|AC|\,v_b = \frac{1}{2}\cdot|AB|\,v_c\,,$$

odtud plyne

$$v_a = \frac{2S}{|BC|}\,,\qquad v_b = \frac{2S}{|AC|}\,,\qquad v_c = \frac{2S}{|AB|}\,.$$

Vyjdeme-li z podmínky v zadání a využijeme předchozího, dostaneme

$$|AA_0| = \frac{k}{v_a} = \frac{k}{2S}\cdot|BC| = q|BC|$$

při označení konstanty $q = \frac{k}{2S}$. Analogicky

$$|BB_0| = \frac{k}{v_b} = \frac{k}{2S}\cdot|AC| = q|AC|\,,\qquad |CC_0| = \frac{k}{v_c} = \frac{k}{2S}\cdot|AB| = q|AB|\,.$$

[13] [lar–90], str. 391-392, úloha 8.3.16.

Velikost vektoru $\overrightarrow{AA_0}$ je tudíž q-násobkem velikosti vektoru $\overrightarrow{BC}$ a zároveň vektor $\overrightarrow{AA_0}$ je kolmý na vektor $\overrightarrow{BC}$ (jde o prodlouženou výšku na tuto stranu). To znamená, že vektor $\overrightarrow{AA_0}$ vznikne otočením vektoru $\overrightarrow{CB}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru a jeho následným vynásobením reálným číslem q. V Gaussově rovině jde o vynásobení komplexním číslem $q\mathrm{i}$. Analogicky dostaneme vektory $\overrightarrow{BB_0}$ a $\overrightarrow{CC_0}$ vynásobením vektorů $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BA}$ týmž komplexním číslem $q\mathrm{i}$. Pro odpovídající komplexní čísla proto platí

$$a_0 - a = q\mathrm{i}(b-c) \quad \text{neboli} \quad a_0 = a + q\mathrm{i}(b-c)\,,$$

$$b_0 - b = q\mathrm{i}(c-a) \quad \text{neboli} \quad b_0 = b + q\mathrm{i}(c-a)\,,$$

$$c_0 - c = q\mathrm{i}(a-b) \quad \text{neboli} \quad c_0 = c + q\mathrm{i}(a-b)\,.$$

Zatímco komplexní číslo odpovídající těžišti T trojúhelníku ABC má obecné vyjádření

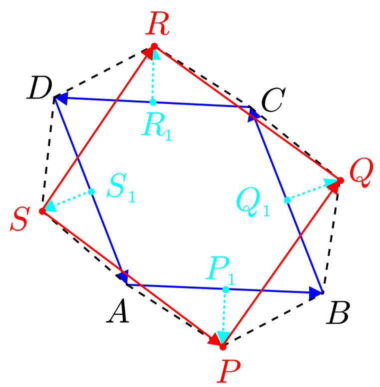
$$t = \frac{1}{3}(a+b+c)\,,$$

podle téhož vzorce pro komplexní číslo odpovídající těžišti T_0 trojúhelníku $A_0B_0C_0$ z odvozených rovností vychází

$$t_0 = \frac{1}{3}(a+b+c+q\mathrm{i}(b-c+c-a+a-b)) = \frac{1}{3}(a+b+c) = t\,.$$

Těžiště trojúhelníku $A_0B_0C_0$ tedy opravdu splývá s těžištěm trojúhelníku ABC. $\square$

Úloha 2.13: *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Vně nad jeho stranami jsou sestrojeny čtyři navzájem podobné rovnoramenné trojúhelníky APB, BQC, CRD, DSA, jejichž základny jsou strany čtyřúhelníku $ABCD$. Ukažte, že pokud $PQRS$ je pravoúhelník, pak je $ABCD$ kosočtverec s výjimkou situace, kdy $ABCD$ je rovnoběžník a čtyři sestrojené trojúhelníky jsou pravoúhlé.*[14]



[14] [bech–95], str. 48, úloha 4, řešení pozměněno; v situaci vyloučené na konci zadání je $PQRS$ nutně čtverec, viz úloha 2.8.

Řešení:
Nejprve zavedeme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ a $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$, pro které zřejmě platí

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o},$$

a nechť a, b, c, d jsou komplexní čísla odpovídající po řadě těmto vektorům v Gaussově rovině. Dále označme P_1, Q_1, R_1, S_1 po řadě středy stran AB, BC, CD, DA. Protože APB, BQC, CRD, DSA jsou rovnoramenné trojúhelníky se základnami tvořenými stranami čtyřúhelníku $ABCD$, jsou body P_1, Q_1, R_1, S_1 také patami výšek vedených z vrcholů P, Q, R, S. Označme ještě vektory $\vec{p} = \overrightarrow{P_1P}$, $\vec{q} = \overrightarrow{Q_1Q}$, $\vec{r} = \overrightarrow{R_1R}$ a $\vec{s} = \overrightarrow{S_1S}$ a p, q, r, s jim odpovídající komplexní čísla. Kladné číslo λ nechť značí poměr mezi výškou a základnou v rovnoramenných trojúhelnících APB, BQC, CRD, DSA (tento poměr musí být ve všech trojúhelnících stejný, neboť tyto trojúhelníky jsou dle zadání podobné). Vektor $\vec{p}$ pak dostaneme jako λ-násobek vektoru $\vec{a}$ otočeného o úhel $\frac{\pi}{2}$ v záporném směru, a tedy v řeči komplexních čísel jako $-\lambda\mathrm{i}$-násobek komplexního čísla a. Analogicky pak dostaneme i čísla q, r, s:

$$p = -\lambda\mathrm{i}a\,, \qquad q = -\lambda\mathrm{i}b\,, \qquad r = -\lambda\mathrm{i}c\,, \qquad s = -\lambda\mathrm{i}d\,.$$

Protože $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o}$, je také (díky posledním čtyřem rovnostem)

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \vec{s} = \vec{o}\,.$$

Předpokládejme podle zadání úlohy, že $PQRS$ je pravoúhelník. Nejprve využijeme v tomto rovnoběžníku vektorů $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{SR}$. Vyjádřeme je následovně:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1B} + \overrightarrow{BQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q} = -\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{q},$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SS_1} + \overrightarrow{S_1D} + \overrightarrow{DR_1} + \overrightarrow{R_1R} = -\vec{s} - \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{r}.$$

Po dosazení do rovnosti $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ dostaneme

$$-\vec{p} + \vec{q} + \vec{s} - \vec{r} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{o}\,,$$

odtud s přihlédnutím k $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o}$ plyne

$$\vec{p} + \vec{r} = \vec{q} + \vec{s}\,.$$

Přejdeme-li v této rovnosti od vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ ke komplexním číslům a, b, c, d odpovídajícím vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, dostaneme

$$\lambda\mathrm{i}a + \lambda\mathrm{i}c = \lambda\mathrm{i}b + \lambda\mathrm{i}d\,, \quad \text{neboli} \quad a + c = b + d\,,$$

což spolu s rovností $a + b + c + d = 0$ pak znamená, že $a + c = b + d = 0$, neboli že $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{o}$. Máme tedy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, a tím docházíme k prvnímu závěru, že totiž

$ABCD$ je rovnoběžník[15].
Nyní ještě vyjádřeme třetí vektor $\overrightarrow{SP}$ podobně, jako jsme dříve vyjádřili vektory $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{SR}$:

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SS_1} + \overrightarrow{S_1A} + \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{P_1P} = -\vec{s} + \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{p}\,.$$

Protože $PQRS$ je dle předpokladu pravoúhelník, je vektor $\overrightarrow{SR}$ reálným k-násobkem vektoru $\overrightarrow{SP}$ otočeného o úhel $\frac{\pi}{2}$, takže pro odpovídající komplexní čísla platí

$$k\mathrm{i}\left(-s + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}a + p\right) = -s - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c + r\,.$$

Do této rovnosti dosadíme za p, r, s a upravíme:

$$k\mathrm{i}\left(\lambda\mathrm{i}d + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}a - \lambda\mathrm{i}a\right) = \lambda\mathrm{i}d - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c - \lambda\mathrm{i}c\,,$$

$$-k\lambda d + \frac{1}{2}k\mathrm{i}d + \frac{1}{2}k\mathrm{i}a + k\lambda a = \lambda\mathrm{i}d - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c - \lambda\mathrm{i}c\,.$$

Protože, jak jsme ukázali výše, platí $c = -a$, lze poslední rovnost dále upravit takto:

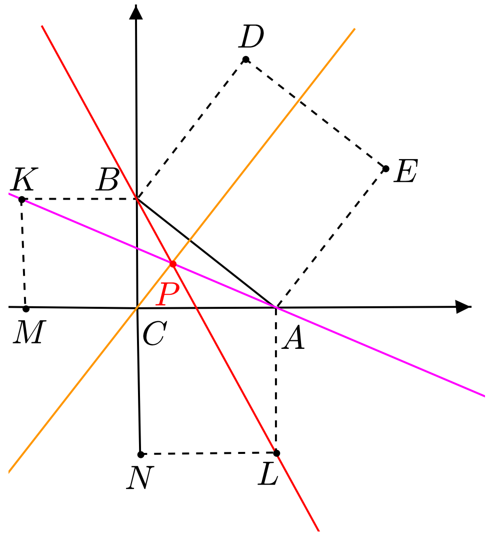
$$d\left(-k\lambda + \frac{1}{2}k\mathrm{i} - \lambda\mathrm{i} + \frac{1}{2}\right) = a\left(-\frac{1}{2}k\mathrm{i} - k\lambda + \frac{1}{2} + \lambda\mathrm{i}\right)\,,$$

$$d\left(\frac{1}{2} - k\lambda + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}k - \lambda\right)\right) = a\left(\frac{1}{2} - k\lambda + \mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}k + \lambda\right)\right)\,.$$

V odvozené rovnosti jsou komplexní koeficienty u čísel a, d (odpovídajících vektorům $\vec{a}$ a $\vec{d}$) komplexně sdružená čísla, která zapíšeme jako $z = u + v\mathrm{i}$ a $\overline{z} = u - v\mathrm{i}$. Za předpokladu, že jejich absolutní hodnota je nenulová, z rovnosti $dz = a\overline{z}$ dostaneme $|d| = |a|$. Tehdy proto platí, že čtyřúhelník $ABCD$ (o kterém jsme dříve dokázali, že je rovnoběžníkem) má sousední strany téže délky, takže to je skutečně kosočtverec.
Zbývá posoudit, kdy nastane případ $z = \overline{z} = 0$. Rovnosti $u = \frac{1}{2} - k\lambda = 0$ a $v = \frac{1}{2}k - \lambda = 0$ platí, právě když $k = 1$ a $\lambda = \frac{1}{2}$. Podle významu čísla λ to znamená, že trojúhelníky APB, BQC, CRD, DSA jsou pravoúhlé, jak je uvedeno v závěru zadání úlohy. Rovnost $k = 1$ je pak vyjádřením toho, že $PQRS$ je čtverec. □

Úloha 2.14: *K pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C jsou vně jeho stran připsány čtverce $BAED$, $CBKM$ a $ACNL$. Dokažte, že přímky AK, BL a rovnoběžka s přímkou BD procházející bodem C se protínají v jednom bodě.*[16]

[15] Dodejme, že k takovému závěru jsme potřebovali pouze předpoklad, že $PQRS$ je rovnoběžník.
[16] [švr–01], str. 51, úloha 3, řešení vlastní.



Řešení:
Zvolíme-li polopřímky CA, CB za kladnou reálnou, resp. imaginární poloosu Gaussovy roviny, pak bodům A, B, C budou odpovídat po řadě komplexní čísla a, $b = b'\mathrm{i}$, $c = 0$, kde $a, b' \in \mathbf{R}^+$. Protože vektory $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{AL}$, resp. $\overrightarrow{BD}$ dostaneme otočením vektorů $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, resp. $\overrightarrow{BA}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ (v prvním případě v záporném směru, v dalších dvou případech v kladném směru), bodům K, L odpovídají komplexní čísla

$$k = -b' + b'\mathrm{i}\,, \qquad l = a - a\mathrm{i}\,,$$

zatímco vektoru $\overrightarrow{BD}$ odpovídá komplexní číslo

$$\overrightarrow{BD}: \quad \mathrm{i}(a - b) = \mathrm{i}(a - b'\mathrm{i}) = b' + a\mathrm{i}\,.$$

Nyní zapíšeme parametrické rovnice přímek AK, BL:

$$AK: \quad z = a + t(-b' + b'\mathrm{i} - a)\,, \quad t \in \mathbf{R}\,;$$

$$BL: \quad z = b'\mathrm{i} + s(a - a\mathrm{i} - b'\mathrm{i})\,, \quad s \in \mathbf{R}\,;$$

a najdeme jejich průsečík P. Porovnáním reálných a imaginárních částí obou stran rovnice

$$a + t(-b' + b'\mathrm{i} - a) = b'\mathrm{i} + s(a - a\mathrm{i} - b'\mathrm{i})$$

dostaneme pro neznámé $t, s \in \mathbf{R}$ soustavu

$$a - b't - at = as \qquad \text{a} \qquad b't = b' - as - b's\,,$$

kterou zapíšeme ve standardním tvaru

$$(a + b')t + as = a \qquad \text{a} \qquad b't + (a + b')s = b'\,.$$

Determinant této soustavy $(a+b')^2 - ab' = a^2 + ab' + b'^2$ je kladný (neboť $a, b' \in \mathbf{R}^+$), takže soustava má řešení

$$t = \frac{\det \begin{pmatrix} a & a \\ b' & a+b' \end{pmatrix}}{a^2 + ab' + b'^2} = \frac{a^2}{a^2 + ab' + b'^2}\,,$$

$$s = \frac{\det \begin{pmatrix} a+b' & a \\ b' & b' \end{pmatrix}}{a^2 + ab' + b'^2} = \frac{b'^2}{a^2 + ab' + b'^2}\,.$$

Průsečíku P proto odpovídá číslo

$$p = as + b't\mathrm{i} = \frac{ab'^2 + b'a^2\mathrm{i}}{a^2 + ab' + b'^2} = \frac{ab'}{a^2 + ab' + b'^2}(b' + a\mathrm{i})\,.$$

Vidíme, že komplexní číslo p, které odpovídá vektoru $\overrightarrow{CP}$, je reálným násobkem komplexního čísla $b' + a\mathrm{i}$, které odpovídá vektoru $\overrightarrow{BD}$ (viz výše). To znamená, že průsečík P přímek AK a BL leží i na přímce rovnoběžné s BD a procházející bodem C, a důkaz je tak hotov. $\square$

Kapitola 3

Otáčení o úhel $\frac{\pi}{3}$

V celé této kapitole budeme využívat označení komplexní jednotky

$$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

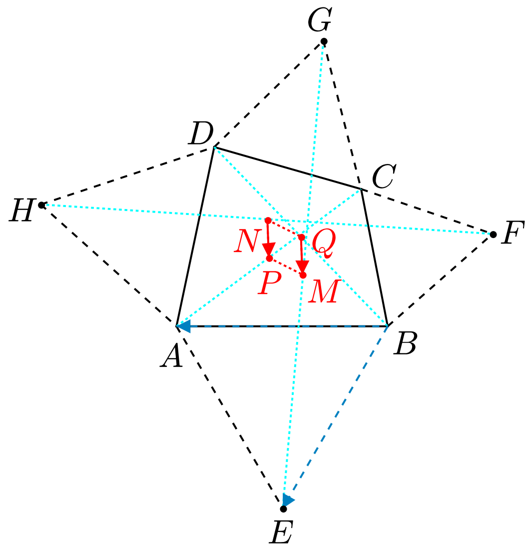
Násobení touto komplexní jednotkou ε nám poslouží k algebraickému popisu výsledků otáčení v rovině o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru. Podle Moivreovy věty je zřejmě $\varepsilon^3 = -1$ neboli $\varepsilon^3 + 1 = (\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1) = 0$, odtud vzhledem k $\varepsilon \neq -1$ plyne $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$. Pro komplexní jednotku ε tak dostáváme následující vlastnosti, které budeme dále často využívat:

$$\varepsilon^2 = \varepsilon - 1\,, \qquad \varepsilon^3 = -1\,, \qquad \varepsilon^4 = -\varepsilon\,, \qquad \varepsilon^5 = -\varepsilon^2 = 1 - \varepsilon\,, \qquad \varepsilon^6 = 1\,. \tag{3.1}$$

Otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ v záporném směru je pak algebraicky popsáno pomocí násobení komplexní jednotkou $-\varepsilon$, otočení o úhel $\frac{2\pi}{3}$ pomocí násobení komplexní jednotkou ε^2.

V této kapitole uvedeme 20 geometrických úloh, v jejichž řešení nějakým způsobem využíváme otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$, jde především o úlohy, ve kterých se vyskytují rovnostranné trojúhelníky. Dále jsou zde uvedeny úlohy, ve kterých se využívá otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ spolu s otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$, a konečně úlohy na otočení o úhel $\frac{2\pi}{3}$.

Úloha 3.1: *Rovnostranné trojúhelníky s vrcholy E, F, G, H jsou sestrojeny vně nad stranami libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ (viz obr.). Nechť M, N, P, Q jsou po řadě středy úseček EG, HF, AC, BD. Jaký je typ čtyřúhelníku $PMQN$?*[1]



Řešení:
Nejprve najdeme komplexní čísla odpovídající bodům E, F, G, H. Protože trojúhelník BAE je rovnostranný, je vektor $\overrightarrow{BE}$ otočením vektoru $\overrightarrow{BA}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, čemuž v komplexní rovině odpovídá násobení komplexní jednotkou ε. Analogicky to platí pro další trojúhelníky:

$$e - b = \varepsilon(a - b) \quad \Rightarrow \quad e = b + \varepsilon(a - b)\,, \qquad f - c = \varepsilon(b - c) \quad \Rightarrow \quad f = c + \varepsilon(b - c)\,,$$

$$g - d = \varepsilon(c - d) \quad \Rightarrow \quad g = d + \varepsilon(c - d)\,, \qquad h - a = \varepsilon(d - a) \quad \Rightarrow \quad h = a + \varepsilon(d - a)\,.$$

Nyní najdeme komplexní čísla odpovídající středům M, N, P, Q:

$$m = \frac{1}{2}(e+g) = \frac{1}{2}(b+d+\varepsilon(a-b+c-d))\,, \qquad n = \frac{1}{2}(h+f) = \frac{1}{2}(a+c+\varepsilon(-a+b-c+d))\,,$$

$$p = \frac{1}{2}(a+c)\,, \qquad q = \frac{1}{2}(b+d)\,.$$

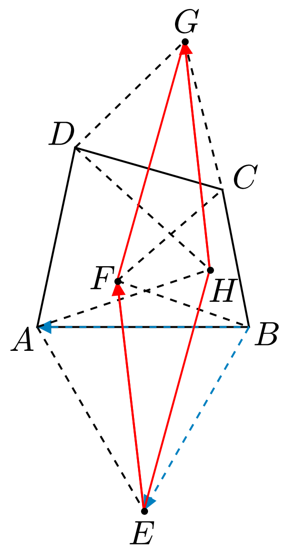
Pro komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{QM}$ a $\overrightarrow{NP}$ tudíž platí

$$\overrightarrow{QM}: \quad m - q = \frac{1}{2}\varepsilon(a - b + c - d)\,, \qquad \overrightarrow{NP}: \quad p - n = \frac{1}{2}\varepsilon(a - b + c - d)\,.$$

Odtud již vidíme, že $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{NP}$, a tedy $PMQN$ je rovnoběžník (případně zdegenerovaný v úsečku či bod). □

[1] [eng–97], str. 300, úloha 35.

Úloha 3.2: *Rovnostranné trojúhelníky BAE, BCF, DCG, DAH jsou sestrojeny nad stranami libovolného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ tak, že první a třetí leží vně tohoto čtyřúhelníku, zatímco druhý a čtvrtý nikoliv (viz obr.). Dokažte, že čtyřúhelník $EHGF$ je rovnoběžník, který může zdegenerovat v úsečku. Kdy se tak stane?*[2]



Řešení:
Nejprve najdeme komplexní čísla odpovídající bodům E, F, G, H. Protože trojúhelník BAE je rovnostranný, je vektor $\overrightarrow{BE}$ otočením vektoru $\overrightarrow{BA}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, čemuž v komplexní rovině odpovídá násobení komplexní jednotkou ε. Analogicky to platí pro ostatní trojúhelníky:

$$e - b = \varepsilon(a - b) \quad \Rightarrow \quad e = b + \varepsilon(a - b)\,, \qquad f - b = \varepsilon(c - b) \quad \Rightarrow \quad f = b + \varepsilon(c - b)\,,$$

$$g - d = \varepsilon(c - d) \quad \Rightarrow \quad g = d + \varepsilon(c - d)\,, \qquad h - d = \varepsilon(a - d) \quad \Rightarrow \quad h = d + \varepsilon(a - d)\,.$$

Pro komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{EF}$ a $\overrightarrow{HG}$ tudíž platí

$$\overrightarrow{EF}: \quad f - e = b + \varepsilon(c - b) - b - \varepsilon(a - b) = \varepsilon(-a + c)\,,$$

$$\overrightarrow{HG}: \quad g - h = d + \varepsilon(c - d) - d - \varepsilon(a - d) = \varepsilon(-a + c)\,.$$

Odtud již vidíme, že $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, a tedy $EHGF$ je rovnoběžník.

Rovnoběžník $EHGF$ přitom zdegeneruje na úsečku právě tehdy, když zdegeneruje na úsečku trojúhelník EHG (pak zdegeneruje taky trojúhelník EFG), což nastane, když jsou body E, H, G kolineární. To v řeči komplexních čísel znamená právě to, že podíl čísel $\frac{g-h}{e-h}$ je číslo reálné. Protože

$$g - h = \varepsilon(c - a) \qquad \text{a} \qquad e - h = b - d + \varepsilon(d - b) = (\varepsilon - 1)(d - b) = \varepsilon^2(d - b)\,,$$

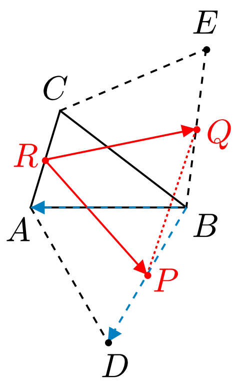
[2] [yag–75], str. 39, úloha 24a, řešení vlastní. Závěrečnou otázku jsme doplnili sami.

dostáváme ekvivalentní podmínku

$$\frac{g-h}{e-h} = \frac{\varepsilon(c-a)}{\varepsilon^2(d-b)} = \frac{(c-a)}{\varepsilon(d-b)} \in \mathbf{R}\,.$$

Rovnost $c-a = k\varepsilon(d-b)$ bude splněna pro nějaké $k \in \mathbf{R}$ právě tehdy, když vektor $\overrightarrow{AC}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{BD}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ a jeho následným vynásobením nějakým reálným číslem k. Rovnoběžník $EHGF$ tedy zdegeneruje právě tehdy, když úhel mezi vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BD}$ úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$ bude roven $\frac{\pi}{3}$. $\square$

Úloha 3.3: *Rovnostranné trojúhelníky BAD a CBE jsou sestrojeny vně nad stranami AB a BC daného trojúhelníku ABC. Dokažte, že středy úseček BD, BE a AC jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*[3]



Řešení:
Nejprve najdeme komplexní čísla příslušná bodům D a E. Protože trojúhelník BAD je rovnostranný, je vektor $\overrightarrow{BD}$ otočením vektoru $\overrightarrow{BA}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, čemuž odpovídá násobení komplexní jednotkou ε. Analogicky to platí i pro trojúhelník CBE:

$$d-b = \varepsilon(a-b) \quad \Rightarrow \quad d = b + \varepsilon(a-b)\,,$$

$$e-c = \varepsilon(b-c) \quad \Rightarrow \quad e = c + \varepsilon(b-c)\,.$$

Označme po řadě P, Q, R středy úseček BD, BE, AC, pro odpovídající komplexní čísla pak máme

$$p = \frac{1}{2}(b+d) = b + \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{2}\varepsilon b\,, \qquad q = \frac{1}{2}(b+e) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\varepsilon b - \frac{1}{2}\varepsilon c\,,$$

$$r = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\,.$$

[3] [eng–97], str. 300, úloha 37.

Vektorům dvou stran trojúhelníku PQR proto odpovídají čísla

$$\overrightarrow{RP}: \quad p-r=-\frac{1}{2}a+b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\varepsilon a-\frac{1}{2}\varepsilon b\,, \qquad \overrightarrow{RQ}: \quad q-r=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\varepsilon b-\frac{1}{2}\varepsilon c\,.$$

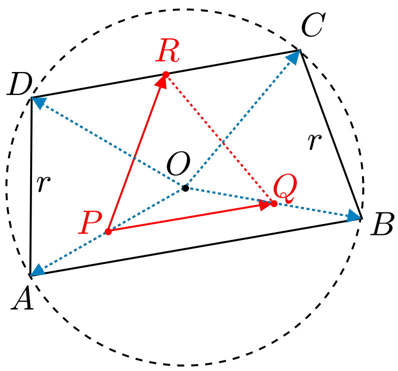
Trojúhelník PQR je rovnostranný, pokud vektory $\overrightarrow{RP}$ a $\overrightarrow{RQ}$ jsou stejně dlouhé a svírají úhel $\frac{\pi}{3}$, tj. vektor $\overrightarrow{RQ}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{RP}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru. V řeči komplexních čísel máme tak ověřit, že číslo $q-r$ je ε-násobkem čísla $p-r$. S využitím vlastností čísla ε dostáváme

$$\varepsilon(p-r)=-\frac{1}{2}\varepsilon a+\varepsilon b-\frac{1}{2}\varepsilon c+\frac{1}{2}\varepsilon^2 a-\frac{1}{2}\varepsilon^2 b=-\frac{1}{2}\varepsilon a+\varepsilon b-\frac{1}{2}\varepsilon c+\frac{1}{2}\varepsilon a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\varepsilon b+\frac{1}{2}b=$$

$$=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\varepsilon b-\frac{1}{2}\varepsilon c=q-r\,,$$

a tedy trojúhelník PQR je skutečně rovnostranný. □

Úloha 3.4: *Lichoběžník $ABCD$ je vepsán do kružnice k se středem O a poloměrem r shodným s délkami ramen BC a DA. Ukažte, že středy poloměrů OA, OB a střed strany CD jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*[4]



Řešení:
Buď O počátek komplexní roviny, čili obraz čísla 0. Trojúhelníky ODA a OBC jsou podle zadání rovnostranné, proto vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ dostaneme otočením po řadě vektorů $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, čemuž algebraicky odpovídá vynásobení komplexní jednotkou ε. Můžeme tedy psát $a=\varepsilon d$, $c=\varepsilon b$. Označme středy poloměrů OA, OB po řadě P, Q a střed strany CD označme R, pro odpovídající komplexní čísla platí

$$p=\frac{1}{2}\varepsilon d\,, \qquad q=\frac{1}{2}b\,, \qquad r=\frac{1}{2}\varepsilon b+\frac{1}{2}d\,.$$

Vektorům stran trojúhelníku PQR tak odpovídají komplexní čísla

$$\overrightarrow{PQ}: \quad q-p=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\varepsilon d\,, \qquad \overrightarrow{PR}: \quad q-r=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}\varepsilon d\,.$$

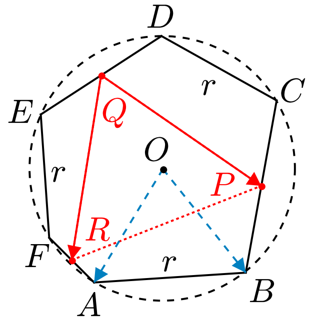
[4] [eng–97], str. 300, úloha 33.

Trojúhelník PQR je rovnostranný, je-li vektor $\overrightarrow{PR}$ otočením vektoru $\overrightarrow{PQ}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, v řeči komplexních čísel je-li $r-p$ ε-násobkem $q-p$. S využitím vlastností čísla ε dostáváme

$$\varepsilon(q-p) = \frac{1}{2}\varepsilon b - \frac{1}{2}\varepsilon^2 d = \frac{1}{2}\varepsilon b - \frac{1}{2}\varepsilon d + \frac{1}{2}d = r - p\,,$$

a tedy trojúhelník PQR je skutečně rovnostranný. □

Úloha 3.5: *Nechť $ABCDEF$ je šestiúhelník vepsaný do kružnice se středem O a poloměrem r. Dokažte, že když platí $|AB| = |CD| = |EF| = r$, tak středy P, Q, R stran BC, DE, FA jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*[5]



Řešení:
Zvolme střed O kružnice opsané zadanému šestiúhelníku za počátek komplexní roviny, čili obraz čísla 0. Protože $|AB| = |CD| = |EF| = r$, jsou trojúhelníky ABO, CDO a EFO rovnostranné. To však znamená, že bod B dostaneme otočením bodu A kolem bodu O o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, čemuž v komplexní rovině odpovídá vynásobení komplexní jednotkou ε. Analogicky dostaneme body D a F otočením C a E. Vyjádříme to rovnostmi

$$b = \varepsilon a\,, \qquad d = \varepsilon c\,, \qquad f = \varepsilon e\,.$$

Odtud pro komplexní čísla odpovídající středům P, Q, R máme

$$p = \frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{2}(c+\varepsilon a)\,, \qquad q = \frac{1}{2}(e+d) = \frac{1}{2}(e+\varepsilon c)\,, \qquad r = \frac{1}{2}(a+f) = \frac{1}{2}(a+\varepsilon e)\,.$$

Trojúhelník PQR je rovnostranný, je-li bod P otočením bodu R kolem bodu Q o úhel $\frac{\pi}{3}$. V řeči komplexních čísel to znamená ukázat, že platí $p - q = \varepsilon(r-q)$. Podle předchozích rovností mají čísla $p-q$ a $r-q$ odpovídající vektorům $\overrightarrow{QP}$ a $\overrightarrow{QR}$ tvar:

$$\overrightarrow{QP}: \quad p - q = \frac{1}{2}(c-e) + \frac{1}{2}\varepsilon(a-c)\,, \qquad \overrightarrow{QR}: \quad r - q = \frac{1}{2}(a-e) + \frac{1}{2}\varepsilon(e-c)\,.$$

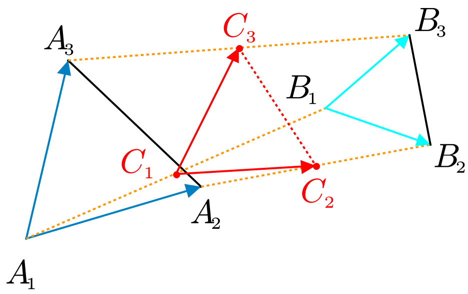
Ukažme s využitím vlastností čísla ε, že opravdu platí $p - q = \varepsilon(r-q)$:

$$\varepsilon(r-q) = \frac{1}{2}(\varepsilon a - \varepsilon e + \varepsilon^2 e - \varepsilon^2 c) = \frac{1}{2}(\varepsilon a - \varepsilon e + \varepsilon e - e - \varepsilon c + c) = \frac{1}{2}(c-e) + \frac{1}{2}\varepsilon(a-c) = p - q\,.$$

Trojúhelník PQR je tedy skutečně rovnostranný. □

[5] [lar–90], str. 398, úloha 8.4.8.

Úloha 3.6: *Nechť $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ jsou dva rovnostranné trojúhelníky. Dokažte, že středy C_i úseček A_iB_i jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*[6]



Řešení:
Protože trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ jsou podle zadání rovnostranné, je vektor $\overrightarrow{A_1A_3}$ otočením vektoru $\overrightarrow{A_1A_2}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$, podobně pak vektor $\overrightarrow{B_1B_3}$ je otočením vektor $\overrightarrow{B_1B_2}$. Pro odpovídající komplexní čísla tedy platí:

$$a_3 = a_1 + \varepsilon(a_2 - a_1)\,, \qquad b_3 = b_1 + \varepsilon(b_2 - b_1)\,.$$

Pro čísla odpovídající středům C_i pak dostáváme

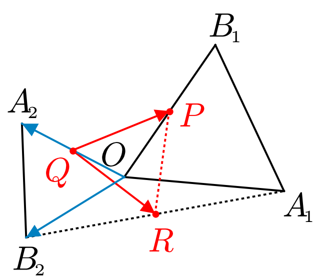
$$c_1 = \frac{1}{2}(a_1+b_1)\,, \qquad c_2 = \frac{1}{2}(a_2+b_2)\,, \qquad c_3 = \frac{1}{2}(a_3+b_3) = \frac{1}{2}(a_1+b_1)+\varepsilon\frac{1}{2}(a_2+b_2-a_1-b_1)\,.$$

Nyní vyjádříme čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{C_1C_2}$ a $\overrightarrow{C_1C_3}$:

$$c_2 - c_1 = \frac{1}{2}(b+d-a-c)\,, \qquad c_3 - c_1 = \frac{1}{2}\varepsilon(b+d-a-c)\,.$$

Vidíme, že $c_3 - c_1 = \varepsilon(c_2 - c_1)$, což znamená, že trojúhelník $C_1C_2C_3$ je rovnostranný. $\square$

Úloha 3.7: *Nechť OA_1B_1 a OA_2B_2 jsou rovnostranné trojúhelníky se společným vrcholem O. Ukažte, že středy úseček OB_1, OA_2 a A_1B_2 jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*[7]



[6] [eng–97], str. 297, úloha E13.
[7] [eng–97], str. 300, úloha 31.

Řešení:
Buď O počátek komplexní roviny, čili obraz čísla 0. Protože trojúhelníky OA_1B_1 a OA_2B_2 jsou rovnostranné, jsou vektory $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_2}$ otočením po řadě vektorů $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, čemuž v Gaussově rovině odpovídá násobení komplexní jednotkou ε. Pro odpovídající komplexní čísla pak platí $b_1 = \varepsilon a_1$, resp. $b_2 = \varepsilon a_2$.

Nyní vyjádříme komplexní čísla odpovídající středům P, Q, R úseček OB_1, OA_2, A_1B_2:

$$p = \frac{1}{2}\varepsilon a_1 \,, \qquad q = \frac{1}{2}a_2 \,, \qquad r = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon a_2 \,.$$

Vektorům stran QP, QR trojúhelníku PQR pak odpovídají komplexní čísla:

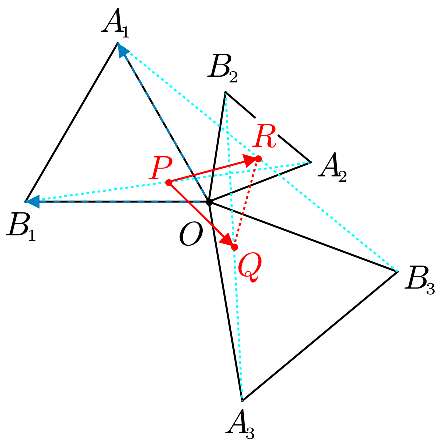
$$\overrightarrow{QP}: \quad p - q = \frac{1}{2}\varepsilon a_1 - \frac{1}{2}a_2 \,, \qquad \overrightarrow{QR}: \quad r - q = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon a_2 - \frac{1}{2}a_2 \,.$$

Trojúhelník PQR bude rovnostranný, jestliže vektor $\overrightarrow{QP}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{QR}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$. O tom se můžeme snadno přesvědčit násobením komplexní jednotkou ε s využitím jejích vlastností jako v předchozích úlohách. Skutečně platí

$$\varepsilon(r-q) = \frac{1}{2}\varepsilon a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a_2 - \frac{1}{2}\varepsilon a_2 = \frac{1}{2}\varepsilon a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon a_2 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}\varepsilon a_2 = \frac{1}{2}\varepsilon a_1 - \frac{1}{2}a_2 = p - q$$

a trojúhelník PQR je rovnostranný. □

Úloha 3.8: *Jsou dány rovnostranné trojúhelníky OA_1B_1, OA_2B_2 a OA_3B_3 se společným vrcholem O. Ukažte, že středy úseček B_1A_2, B_2A_3 a B_3A_1 jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*[8]



Řešení:
Buď O počátek komplexní roviny, čili obraz čísla 0. Protože trojúhelník OA_1B_1 je rovnostranný, je vektor $\overrightarrow{OB_1}$ otočením vektoru $\overrightarrow{OA_1}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$. Analogicky to platí i pro vektory stran trojúhelníků OA_2B_2 a OA_3B_3, a tedy pro odpovídající komplexní čísla máme

$$b_1 = \varepsilon a_1 \,, \qquad b_2 = \varepsilon a_2 \,, \qquad b_3 = \varepsilon a_3 \,.$$

[8] [eng–97], str. 300, úloha 39.

Nechť P, Q, R jsou po řadě středy úseček B_1A_2, B_2A_3, B_3A_1, pro odpovídající komplexní čísla tak dostáváme

$$p = \frac{1}{2}(b_1+a_2) = \frac{1}{2}(a_2+\varepsilon a_1)\,, \quad q = \frac{1}{2}(b_2+a_3) = \frac{1}{2}(a_3+\varepsilon a_2)\,, \quad r = \frac{1}{2}(b_3+a_1) = \frac{1}{2}(a_1+\varepsilon a_3)\,.$$

Nyní vyjádříme čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{PR}$ a ukážeme, že druhé z nich je ε-násobkem prvního, a tudíž vektor $\overrightarrow{PR}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{PQ}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru:

$$\overrightarrow{PQ}: \quad q-p = \frac{1}{2}(a_3 - a_2 - \varepsilon a_1 + \varepsilon a_2)\,, \qquad \overrightarrow{PR}: \quad r-p = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - \varepsilon a_1 + \varepsilon a_3)\,.$$

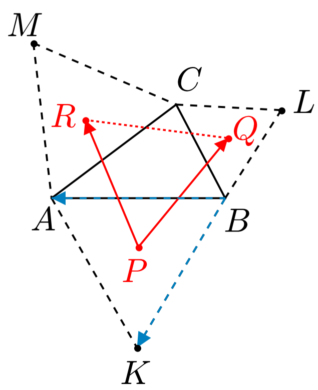
S využitím vlastností čísla ε dostáváme

$$\varepsilon(q-p) = \frac{1}{2}(\varepsilon a_3 - \varepsilon a_2 - \varepsilon^2 a_1 + \varepsilon^2 a_2) = \frac{1}{2}(\varepsilon a_3 - \varepsilon a_2 - \varepsilon a_1 + a_1 + \varepsilon a_2 - a_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - \varepsilon a_1 + \varepsilon a_3) = r - p\,.$$

Trojúhelník PQR je tedy skutečně rovnostranný. □

Úloha 3.9: *Rovnostranné trojúhelníky s vrcholy K, L, M jsou vně připsány stranám AB, BC, AC libovolného trojúhelníku ABC. Dokažte, že těžiště připsaných trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.*[9]



Řešení 1:
Komplexní čísla odpovídající bodům K, L, M vyjádříme jako výsledky otočení vhodného z vrcholů A, B, C kolem jiného vrcholu o úhel $\frac{\pi}{3}$, čili pomocí násobení komplexním číslem ε:

$$k = b + \varepsilon(a-b) = \varepsilon a + (1-\varepsilon)b\,, \qquad l = c + \varepsilon(b-c) = \varepsilon b + (1-\varepsilon)c\,,$$

$$m = a + \varepsilon(c-a) = \varepsilon c + (1-\varepsilon)a\,.$$

[9] [eng–97], str. 295, úloha E10; [lar–90], str. 396-397, úloha 8.4.4; [švr–00], str. 28, úloha 5. Výsledný trojúhelník se často nazývá *Napoleonův*.

Nyní označme těžiště trojúhelníků AKB, BLC, CMA po řadě P, Q, R a vyjádřeme odpovídající komplexní čísla

$$p = \frac{1}{3}(a+b+k) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}\varepsilon a + \frac{1-\varepsilon}{3}b = \frac{1+\varepsilon}{3}a + \frac{2-\varepsilon}{3}b\,,$$
$$q = \frac{1}{3}(b+c+l) = \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}\varepsilon b + \frac{1-\varepsilon}{3}c = \frac{1+\varepsilon}{3}b + \frac{2-\varepsilon}{3}c\,,$$
$$r = \frac{1}{3}(a+c+m) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}\varepsilon c + \frac{1-\varepsilon}{3}a = \frac{1+\varepsilon}{3}c + \frac{2-\varepsilon}{3}a\,.$$

Dále ukážeme, že body P, Q, R tvoří rovnostranný trojúhelník PQR. Najděme nejprve komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{PR}$. Podle předchozích rovností platí

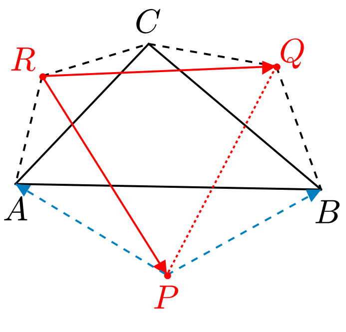
$$\overrightarrow{PQ}: \quad q-p = -\frac{1+\varepsilon}{3}a + \frac{-1+2\varepsilon}{3}b + \frac{2-\varepsilon}{3}c = \frac{(-1-\varepsilon)a + (-1+2\varepsilon)b + (2-\varepsilon)c}{3}\,,$$
$$\overrightarrow{PR}: \quad r-p = \frac{1-2\varepsilon}{3}a + \frac{-2+\varepsilon}{3}b + \frac{1+\varepsilon}{3}c = \frac{(1-2\varepsilon)a + (-2+\varepsilon)b + (1+\varepsilon)c}{3}\,.$$

Trojúhelník PQR je rovnostranný, vznikne-li bod R otočením bod Q kolem bodu P o úhel $\frac{\pi}{3}$, neboli když číslo $r-p$ je ε-násobkem čísla $q-p$:

$$\varepsilon(q-p) = \frac{1}{3}\big((-\varepsilon-\varepsilon^2)a + (-\varepsilon+2\varepsilon^2)b + (2\varepsilon-\varepsilon^2)c\big) =$$
$$= \frac{1}{3}\,((-\varepsilon-\varepsilon+1)a + (-\varepsilon+2\varepsilon-2)b + (2\varepsilon-\varepsilon+1)c) =$$
$$= \frac{1}{3}\,((1-2\varepsilon)a + (-2+\varepsilon)b + (1+\varepsilon)c) = r-p\,.$$

Tím je důkaz hotov.[10] $\square$

Řešení 2:
Všimněme si, že uvažovaná těžiště P, Q, R jsou hlavními vrcholy rovnoramenných trojúhelníků APB, BQC, CRA, které jsou připsány vně stranám trojúhelníku ABC a které mají při vrcholech P, Q, R úhel $\frac{2\pi}{3}$.



[10]Podobně by se dalo ukázat, že rovněž těžiště dovnitř připsaných rovnostranných trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.

Vektor $\overrightarrow{PA}$ vznikne tedy otočením vektoru $\overrightarrow{PB}$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$. V komplexní rovině toto otočení dostaneme vynásobením komplexní jednotkou ε^2, proto pro odpovídající komplexní čísla platí

$$a - p = \varepsilon^2(b - p), \quad \text{neboli} \quad p = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon^2 b - a)\,.$$

Podobně pro komplexní čísla odpovídající bodům Q a R dostaneme

$$q = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon^2 c - b) \quad \text{a} \quad r = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon^2 a - c)\,.$$

Trojúhelník PQR je rovnostranný, je-li vektor $\overrightarrow{RQ}$ otočením vektoru $\overrightarrow{RP}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru. Vyjádřeme proto komplexními čísly vektory $\overrightarrow{RQ}$ a $\overrightarrow{RP}$

$$\overrightarrow{RQ}: \quad q-r = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon^2 c - b - \varepsilon^2 a + c) = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}(-\varepsilon^2 a - b + (1+\varepsilon^2)c) = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}((1-\varepsilon)a - b + \varepsilon c)\,,$$

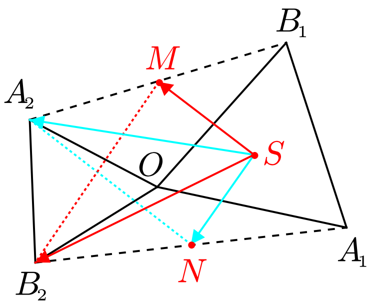
$$\overrightarrow{RP}: \quad p - r = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}((-1 - \varepsilon^2)a + \varepsilon^2 b + c)\,.$$

Nyní vynásobíme komplexní číslo $p - r$ komplexní jednotkou ε a dostaneme

$$\varepsilon(p - r) = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}((-\varepsilon - \varepsilon^3)a + \varepsilon^3 b + \varepsilon c) = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}((1 - \varepsilon)a - b + \varepsilon c) = q - r\,.$$

Trojúhelník PQR je tedy skutečně rovnostranný. □

Úloha 3.10: *Nechť OA_1B_1 a OA_2B_2 jsou rovnostranné trojúhelníky se společným vrcholem O, nechť S je těžiště trojúhelníku OA_1B_1 a M, N jsou po řadě středy úseček A_2B_1 a A_1B_2. Ukažte, že trojúhelníky SMB_2 a NSA_2 jsou navzájem podobné.*[11]



Řešení:
Buď O počátek komplexní roviny. Protože trojúhelníky OA_1B_1 a OA_2B_2 jsou rovnostranné, je vektor $\overrightarrow{OB_1}$ otočením vektoru $\overrightarrow{OA_1}$ a vektor $\overrightarrow{OB_2}$ otočením vektoru $\overrightarrow{OA_2}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$, platí tedy $b_1 = \varepsilon a_1$ a $b_2 = \varepsilon a_2$. Pro komplexní čísla, jejichž obrazy jsou těžiště S a středy M, N tak máme

$$s = \frac{1}{3}(a_1 + \varepsilon a_1)\,, \qquad m = \frac{1}{2}(a_2 + \varepsilon a_1)\,, \qquad n = \frac{1}{2}(a_1 + \varepsilon a_2)\,.$$

[11] [eng–97], str. 300, úloha 32.

Vyjádříme komplexními čísly vektory $\overrightarrow{SM}$ a $\overrightarrow{SB_2}$ v trojúhelníku SMB_2

$$\overrightarrow{SM}: \quad m-s=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}\varepsilon a_1-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}\varepsilon a_1=\frac{1}{6}(3a_2-2a_1+\varepsilon a_1)\,,$$

$$\overrightarrow{SB_2}: \quad b_2-s=\varepsilon a_2-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}\varepsilon a_1=\frac{1}{3}(-a_1-\varepsilon a_1+3\varepsilon a_2)\,.$$

Nyní ukážeme, že vektor $\overrightarrow{SB_2}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{SM}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru a vynásobením reálným číslem 2. To v řeči komplexních čísel ověříme takto:

$$2\varepsilon(m-s)=\frac{1}{3}(3a_2\varepsilon-2a_1\varepsilon+a_1\varepsilon^2)=\frac{1}{3}(3a_2\varepsilon-2a_1\varepsilon+a_1\varepsilon-a_1)=\frac{1}{3}(-a_1-\varepsilon a_1+3\varepsilon a_2)=b_2-s\,,$$

a tedy skutečně platí $|SB_2|=2|SM|$ a $|\sphericalangle MSB_2|=\frac{\pi}{3}$.
Podobně vyjádříme komplexními čísly vektory $\overrightarrow{SN}$ a $\overrightarrow{SA_2}$ v trojúhelníku NSA_2. Dostaneme

$$\overrightarrow{SN}: \quad n-s=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}\varepsilon a_2-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}\varepsilon a_1=\frac{1}{6}(a_1+3\varepsilon a_2-2\varepsilon a_1)\,,$$

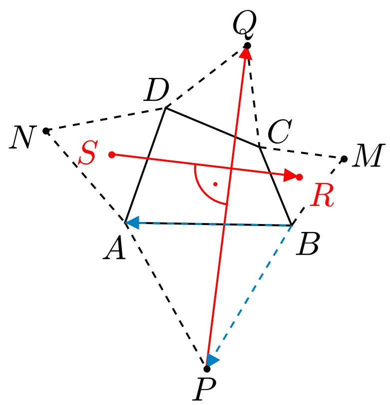
$$\overrightarrow{SA_2}: \quad a_2-s=a_2-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}\varepsilon a_1=\frac{1}{3}(-a_1+3a_2-\varepsilon a_1)\,,$$

a ukážeme, že vektor $\overrightarrow{SN}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{SA_2}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru a vynásobením reálným číslem $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\varepsilon(a_2-s)=\frac{1}{6}(-\varepsilon a_1+3\varepsilon a_2-\varepsilon^2 a_1)=\frac{1}{6}(-\varepsilon a_1+3\varepsilon a_2-\varepsilon a_1+a_1)=\frac{1}{6}(a_1+3\varepsilon a_2-2\varepsilon a_1)=n-s\,,$$

a tedy skutečně platí $|SA_2|=2|SN|$ a $|\sphericalangle NSA_2|=\frac{\pi}{3}$.
Z uvedených závěrů plyne, že trojúhelníky SMB_2 a NSA_2 jsou podobné. $\square$

Úloha 3.11: *Vně nad stranami konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky BAP, CBM, DCQ a ADN. Nechť R, S jsou po řadě těžiště trojúhelníků ADN, BCM. Dokažte, že úsečka PQ je kolmá na úsečku RS a zároveň platí $|PQ|=\sqrt{3}|RS|$.*[12]



[12] [eng–97], str. 301, úloha 42.

Řešení:
Naším úkolem je ukázat, že vektor $\overrightarrow{PQ}$ vznikne otočením vektoru $\overrightarrow{SR}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném či záporném směru a následným vynásobením reálným číslem $\sqrt{3}$. Máme tedy dokázat, že pro odpovídající komplexní čísla platí

$$q - p = \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\,(r - s)\ .$$

Protože je trojúhelník BAP rovnostranný, vznikne vektor $\overrightarrow{BP}$ otočením vektoru $\overrightarrow{BA}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$, jež je algebraicky charakterizováno násobením komplexní jednotkou ε. Platí tedy

$$p - b = \varepsilon\,(a - b)\ , \quad \text{neboli} \quad p = b + \varepsilon\,(a - b)\ .$$

Analogicky získáme vyjádření komplexních čísel odpovídajících vrcholům Q, M, N zbylých připsaných trojúhelníků:

$$q = d + \varepsilon\,(c - d)\,, \qquad m = c + \varepsilon\,(b - c)\,, \qquad n = a + \varepsilon\,(d - a)\ .$$

Těžiště R, S jsou pak obrazy komplexních čísel

$$r = \frac{1}{3}\,(b + c + m) = \frac{1}{3}\,(b + 2c + \varepsilon b - \varepsilon c)\ , \qquad s = \frac{1}{3}\,(a + d + n) = \frac{1}{3}\,(2a + d + \varepsilon d - \varepsilon a)\ .$$

Nyní vyjádříme komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{SR}$:

$$\overrightarrow{PQ}: \quad q - p = d - b + \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(c - d - a + b) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(-a - b + c + d) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,(-a + b + c - d)\ ,$$

$$\overrightarrow{SR}: \quad r - s = \frac{1}{3}\left(b + 2c - 2a - d + \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(b - c - d + a)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(-a + b + c - d) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6}\,(a + b - c - d)\ .$$

Odtud plyne

$$\mathrm{i}\sqrt{3}\,(r - s) = \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,(-a + b + c - d) + \frac{1}{2}\,(-a - b + c + d) = q - p\,.$$

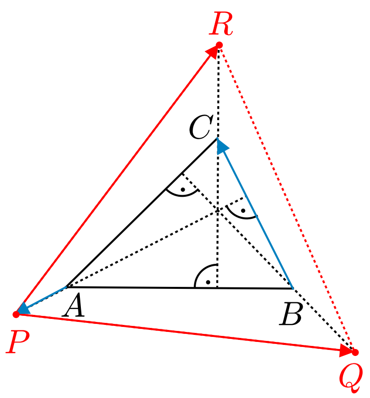
Tím je důkaz vztahů mezi směry a velikostmi úseček PQ a RS hotov. □

Úloha 3.12: *Na přímkách, na kterých leží výšky daného trojúhelníku ABC vedené z vrcholů A, B, C, jsou sestrojeny po řadě body P, Q, R tak, že platí*

$$\frac{|AP|}{|BC|} = \frac{|BQ|}{|CA|} = \frac{|CR|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

a přitom polopřímky AP, BQ, CR neprotínají přímky protějších stran trojúhelníka (viz obr.). Dokažte, že trojúhelník PQR je rovnostranný.[13]

[13][bud–71], str. 130.



Řešení:
Podle zadání je vektor $\overrightarrow{AP}$ kolmý na vektor $\overrightarrow{BC}$, polopřímka AP neprotíná stranu BC a pro velikosti těchto vektorů platí $|\overrightarrow{AP}| = \frac{\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{BC}|$. Vektor $\overrightarrow{AP}$ tedy vznikne otočením vektoru $\overrightarrow{BC}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu (tomu algebraicky odpovídá násobení komplexní jednotkou i) a následným vynásobením číslem $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Pro odpovídající komplexní čísla proto platí

$$p - a = \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}(c - b)\ , \quad \text{neboli} \quad p = a + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}(c - b)\ .$$

Analogicky dostaneme vyjádření komplexních čísel odpovídajících bodům Q, R:

$$q = b + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}(a - c)\ , \qquad r = c + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}(b - a)\ .$$

Nyní vyjádříme komplexními čísly vektory $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PQ} : q - p = b + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}a - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}c - a - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}c + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}b = \left(-1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a + \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)b + \left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)c\,,$$

$$\overrightarrow{PR} : r - p = c + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}b - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}a - a - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}c + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}b = \left(-1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a + \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)b + \left(1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)c\,.$$

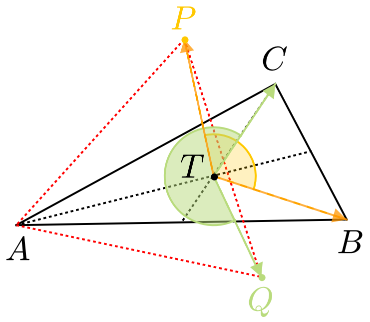
Trojúhelník PQR je rovnostranný, je-li vektor $\overrightarrow{PR}$ otočením vektoru $\overrightarrow{PQ}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$, tj. je-li komplexní číslo $r - p$ ε-násobkem čísla $q - p$. S využitím vlastností komplexní jednotky ε dostaneme

$$\varepsilon\,(q - p) = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(-1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a + \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)b + \left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)c\right) =$$

$$= \left(-1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a + \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)b + \left(1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)c = r - p\,.$$

Trojúhelník PQR je tedy skutečně rovnostranný. □

Úloha 3.13: *Nechť T je těžiště daného trojúhelníku ABC. Uvažujme dvě otočení kolem bodu T o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném, resp. záporném směru. Obraz vrcholu B v prvním otočení označme P, obraz vrcholu C v druhém otočení označme Q. Dokažte, že trojúhelník AQP je rovnostranný.*[14]



Řešení:
Jistě můžeme předpokládat, že těžišti T odpovídá v Gaussově rovině číslo $t = 0$, což pro komplexní čísla příslušná vrcholům A, B, C znamená rovnost

$$a + b + c = 0\,.$$

Vektor $\overrightarrow{TP}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{TB}$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném smyslu, v komplexní rovině tomuto otočení odpovídá násobení komplexní jednotkou ε^2. Pro odpovídající komplexní čísla tak platí

$$p - t = \varepsilon^2(b - t), \quad \text{neboli} \quad p = \varepsilon^2 b\,.$$

Podobně vektor $\overrightarrow{TQ}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{TC}$ o úhel $\frac{4\pi}{3}$ (tj. o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v záporném smyslu), tomuto otočení odpovídá násobení komplexní jednotkou ε^4, takže platí

$$q - t = \varepsilon^4(c - t), \quad \text{neboli} \quad q = \varepsilon^4 c\,.$$

Trojúhelník AQP je rovnostranný, jestliže vektor $\overrightarrow{AP}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{AQ}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, které je algebraicky charakterizováno násobením komplexní jednotkou ε. Vyjádříme proto komplexními čísly vektory $\overrightarrow{AP}$ a $\overrightarrow{AQ}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP}:&\quad p - a = \varepsilon^2 b - a = (\varepsilon - 1)b + b + c = \varepsilon b + c\,,\\ \overrightarrow{AQ}:&\quad q - a = \varepsilon^4 c - a = -\varepsilon c + b + c\,. \end{aligned}$$

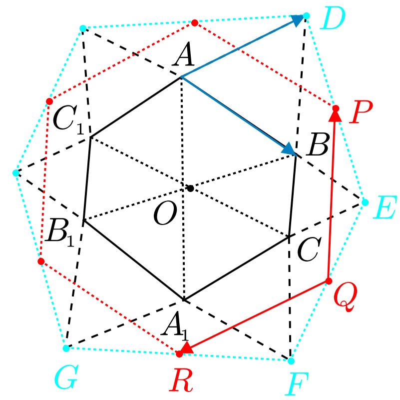
Nyní vynásobíme nalezené číslo $q - a$ komplexní jednotkou ε a dostaneme

$$\varepsilon(q - a) = -\varepsilon^2 c + \varepsilon b + \varepsilon c = (1 - \varepsilon)c + \varepsilon b + \varepsilon c = c + \varepsilon b = p - a\,.$$

Trojúhelník AQP je tedy skutečně rovnostranný. □

[14] [hon–01], str. 190-191, úloha 26.

Úloha 3.14: *Vně nad stranami středově symetrického konvexního šestiúhelníku sestrojíme rovnostranné trojúhelníky a jejich nové sousední vrcholy spojíme úsečkami (viz obr.). Ukažte, že středy těchto úseček tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku.*[15]



Řešení:
Umístěme daný šestiúhelník do Gaussovy roviny tak, aby jeho střed souměrnosti byl obrazem čísla 0. Pak protilehlým vrcholům budou odpovídat navzájem opačná komplexní čísla. Čísla odpovídající vrcholům zadaného šestiúhelníku $ABCA_1B_1C_1$ jsou tedy a, b, c, $a_1 = -a$, $b_1 = -b$, $c_1 = -c$. Nyní najdeme komplexní čísla odpovídající vrcholům D, E, F, G rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami AB, BC, CA_1 a A_1B_1 (viz obr.). Protože trojúhelník ABD je rovnostranný, vektor $\overrightarrow{AD}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{AB}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$, čemuž algebraicky odpovídá násobení komplexní jednotkou ε. Odtud vyjádříme komplexní číslo d a analogicky dostaneme vyjádření komplexních čísel e, f, g:

$$\varepsilon(b-a) = (d-a) \quad\Rightarrow\quad d = a+\varepsilon(b-a)\,, \qquad \varepsilon(c-b) = (e-b) \quad\Rightarrow\quad e = b+\varepsilon(c-b)\,,$$

$$\varepsilon(-a-c) = (f-c) \quad\Rightarrow\quad f = c+\varepsilon(-a-c)\,, \qquad \varepsilon(-b+a) = (g+a) \quad\Rightarrow\quad g = -a+\varepsilon(a-b)\,.$$

Nyní označíme po řadě P, Q, R středy úseček DE, EF a FG. Těmto středům odpovídají komplexní čísla

$$p = \frac{1}{2}(d+e) = \frac{1}{2}(a+b+\varepsilon(c-a))\,, \qquad q = \frac{1}{2}(e+f) = \frac{1}{2}(b+c+\varepsilon(-a-b))\,,$$

$$r = \frac{1}{2}(f+g) = \frac{1}{2}(c-a+\varepsilon(-c-b))\,.$$

Body P, Q, R jsou sousední vrcholy pravidelného šestiúhelníku, pokud vektory $\overrightarrow{QP}$ a $\overrightarrow{QR}$ jsou stejně dlouhé a svírají úhel $\frac{2\pi}{3}$. Jinak řečeno, vektor $\overrightarrow{QR}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{QP}$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$, čemuž algebraicky odpovídá násobení komplexní jednotkou ε^2. Nejprve vyjádříme komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{QP}$ a $\overrightarrow{QR}$

$$\overrightarrow{QP}: \quad p-q = \frac{1}{2}(a-c+\varepsilon(c+b))\,, \qquad \overrightarrow{QR}: \quad r-q = \frac{1}{2}(-a-b+\varepsilon(a-c))\,,$$

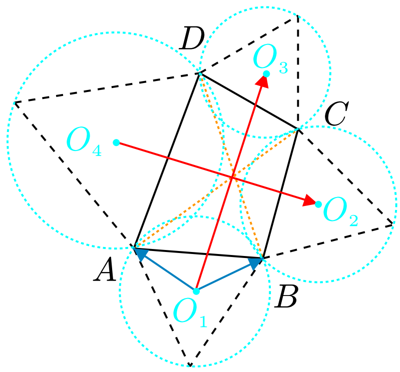
[15] [eng–97], str. 300, úloha 29; [tab–02], str. 47, úloha 5.

a nyní vynásobíme komplexní číslo $p-q$ číslem ε^2:

$$\varepsilon^2(p-q)=\frac{1}{2}(\varepsilon^2a-\varepsilon^2c+\varepsilon^3c+\varepsilon^3b)=\frac{1}{2}(\varepsilon a-a-\varepsilon c+c-c-b)=\frac{1}{2}(-a-b+\varepsilon(a-c))=r-q\,.$$

Odtud vidíme, že vektory $\overrightarrow{QR}$ a $\overrightarrow{QP}$ mají potřebnou vlastnost. Analogicky se to ukáže pro další dvojice vektorů sousedních stran zkoumaného šestiúhelníku, který je proto pravidelný. □

Úloha 3.15: *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, ve kterém platí $|AC|=|BD|$. Vně nad stranami tohoto čtyřúhelníku jsou sestrojeny čtyři rovnostranné trojúhelníky. Nechť O_1, O_2, O_3, O_4 jsou středy kružnic opsaných těmto trojúhelníkům po řadě se stranami AB, BC, CD, DA. Dokažte, že přímky O_1O_3 a O_2O_4 jsou navzájem kolmé.*[16]



Řešení:

Protože trojúhelník sestrojený nad stranou AB je podle zadání rovnostranný a O_1 je střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku, je jednak velikost úhlu AO_1B rovna $\frac{2\pi}{3}$ a obě úsečky O_1A, O_1B mají velikost rovnu poloměru kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Vektor $\overrightarrow{O_1A}$ proto dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{O_1B}$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném směru. Tomuto otočení v Gaussově rovině odpovídá násobení komplexní jednotkou ε^2, pro odpovídající komplexní čísla proto dostáváme

$$a-o_1=\varepsilon^2(b-o_1)\,,\qquad \text{odkud}\qquad o_1=\frac{1}{\varepsilon^2-1}(\varepsilon^2b-a)\,.$$

Analogicky dostaneme vyjádření pro komplexní čísla odpovídající středům O_2, O_3, O_4:

$$o_2=\frac{1}{\varepsilon^2-1}(\varepsilon^2c-b)\,,\qquad o_3=\frac{1}{\varepsilon^2-1}(\varepsilon^2d-c)\,,\qquad o_4=\frac{1}{\varepsilon^2-1}(\varepsilon^2a-d)\,.$$

Nyní vyjádříme komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{O_1O_3}$ a $\overrightarrow{O_4O_2}$:

$$\overrightarrow{O_1O_3}:\quad o_3-o_1=\frac{1}{\varepsilon^2-1}(\varepsilon^2d-c-\varepsilon^2b+a)=\frac{1}{\varepsilon^2-1}\left(\varepsilon^2(d-b)-(c-a)\right)\,,$$

[16] [rad–07], str. 3, úloha 6.

$$\overrightarrow{O_4O_2}: \quad o_2 - o_4 = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon^2 c - b - \varepsilon^2 a + d) = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}\left(\varepsilon^2(c-a) + (d-b)\right).$$

Podle zadání je $|AC| = |BD|$, tuto podmínku můžeme pomocí komplexních čísel $e = c - a$ a $f = d - b$ vyjádřit takto

$$|e| = |f|, \qquad \text{neboli} \qquad e\overline{e} = f\overline{f}. \tag{3.2}$$

Přímky O_1O_3 a O_2O_4 jsou navzájem kolmé právě tehdy, když podíl $\frac{o_2-o_4}{o_3-o_1}$ čísel odpovídajících vektorům $\overrightarrow{O_4O_2}$ a $\overrightarrow{O_1O_3}$ je číslo ryze imaginární. To nastane právě tehdy, když bude platit

$$\frac{o_2 - o_4}{o_3 - o_1} = -\overline{\frac{o_2 - o_4}{o_3 - o_1}}.$$

Do této rovnosti dosadíme a budeme ji dále ekvivalentně upravovat, přitom na pravé straně rovnosti využijeme toho, že $\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^3} = -\varepsilon$. Dostáváme

$$\frac{\varepsilon^2 e + f}{\varepsilon^2 f - e} = -\frac{\overline{\varepsilon^2}\overline{e} + \overline{f}}{\overline{\varepsilon^2}\overline{f} - \overline{e}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\varepsilon^2 e + f}{\varepsilon^2 f - e} = \frac{-\varepsilon\overline{e} + \overline{f}}{\varepsilon\overline{f} + \overline{e}} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left(\varepsilon^2 e + f\right)\left(\varepsilon\overline{f} + \overline{e}\right) = \left(\varepsilon^2 f - e\right)\left(-\varepsilon\overline{e} + \overline{f}\right) \qquad \Leftrightarrow$$

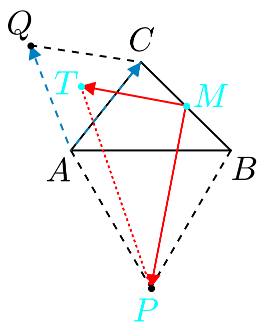
$$\varepsilon^3 e\overline{f} + \varepsilon^2 e\overline{e} + \varepsilon f\overline{f} + f\overline{e} = -\varepsilon^3 f\overline{e} + \varepsilon^2 f\overline{f} + \varepsilon e\overline{e} - e\overline{f} \qquad \Leftrightarrow$$

$$-e\overline{f} + \varepsilon^2|e|^2 + \varepsilon|f|^2 + f\overline{e} = f\overline{e} + \varepsilon^2|f|^2 + \varepsilon|e|^2 - e\overline{f} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon^2|e|^2 + \varepsilon|f|^2 = \varepsilon^2|f|^2 + \varepsilon|e|^2.$$

Poslední rovnost díky (3.2) platí a vzájemná kolmost přímek O_1O_3 a O_2O_4 je dokázána. □

Úloha 3.16: *Nechť PBA a QAC jsou rovnostranné trojúhelníky vně připsané stranám AB a AC daného trojúhelníku ABC. Bod M nechť je střed strany BC a T těžiště trojúhelníku QAC. Dokažte, že trojúhelník PMT má vnitřní úhly velikosti $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$.*[17]



[17][švr–01], str. 49, úloha 2, řešení vlastní.

Řešení:
Protože bod Q dostaneme otočením bodu C kolem bodu A o úhel $\frac{\pi}{3}$, čemuž algebraicky odpovídá násobení komplexní jednotkou ε, přísluší bodu Q komplexní číslo

$$q = a + \varepsilon(c-a) = a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(c-a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{2}a\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}c\mathrm{i}\,.$$

Analogicky bodu P odpovídá číslo

$$p = b + \varepsilon(a-b) = b + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(a-b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}a\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}b\mathrm{i}\,.$$

Středu M a těžišti T tak přísluší čísla

$$m = \frac{1}{2}(b+c)\,, \qquad t = \frac{1}{3}(a+c+q) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{6}a\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{6}c\mathrm{i}\,.$$

Protože je dobře známo, že (pravoúhlý) trojúhelník s vnitřními úhly $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ má protilehlé strany v poměru $2 : \sqrt{3} : 1$, stačí ukázat, že vektor $\overrightarrow{MP}$ je $\sqrt{3}$-násobkem výsledku otočení vektoru $\overrightarrow{MT}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ (čili komplexní číslo $p-m$ je $\mathrm{i}\sqrt{3}$-násobkem čísla $t-m$). Najdeme proto komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{MP}$ a pak porovnáme $\mathrm{i}\sqrt{3}$-násobek prvního s druhým číslem

$$\overrightarrow{MT}: \quad t-m = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{6}a\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{6}c\mathrm{i}\,, \qquad \overrightarrow{MP}: \quad p-m = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}a\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}b\mathrm{i}\,,$$

$$\mathrm{i}\sqrt{3}(t-m) = \frac{\sqrt{3}}{2}a\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}b\mathrm{i} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c = p-m\,.$$

Tím je důkaz hotov. □

Úloha 3.17: *V dané rovině mějme bod P_0 a rovnostranný trojúhelník $A_1A_2A_3$. Položme $A_i = A_{i-3}$ pro každé $i \geq 4$. Sestrojíme posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2, \ldots$ tak, že bod P_{k+1} je obrazem bodu P_k v rotaci kolem bodu A_{k+1} o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v záporném směru, pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ukažte, že $P_{1986} = P_0$.*[18]

Řešení:
Protože je trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnostranný, vznikne vektor $\overrightarrow{A_1A_3}$ otočením vektoru $\overrightarrow{A_1A_2}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, jež je algebraicky charakterizováno násobením komplexní jednotkou ε. Pro odpovídající komplexní čísla a_i tedy platí

$$a_3 - a_1 = \varepsilon(a_2 - a_1)\,, \quad \text{neboli} \quad a_3 = a_1 - \varepsilon a_1 + \varepsilon a_2\,.$$

Bod P_1 podle zadání dostaneme otočením bodu P_0 kolem bodu A_1 o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v záporném směru, tedy otočením o úhel $\frac{4\pi}{3}$ v kladném směru, což odpovídá násobení komplexní jednotkou $\varepsilon^4 = -\varepsilon$. Pro číslo odpovídající bodu P_1 tedy dostaneme

$$p_1 - a_1 = \varepsilon^4(p_0 - a_1)\,, \quad \text{neboli} \quad p_1 = a_1 + \varepsilon a_1 - \varepsilon p_0\,.$$

[18] [eng–97], str. 301, úloha 44; [rad–07], str. 3, úloha 5.

Analogicky pro číslo p_2 odpovídající bodu P_2 platí

$$p_2 - a_2 = \varepsilon^4 (p_1 - a_2)\,,$$

odkud po dosazení za p_1 a využití vlastností čísla ε dostaneme

$$p_2 = a_2 + \varepsilon a_2 - \varepsilon p_1 = a_2 + \varepsilon a_2 - a_1\varepsilon - \varepsilon^2 a_1 + \varepsilon^2 p_0 =$$

$$= a_2 + \varepsilon a_2 - a_1\varepsilon - \varepsilon a_1 + a_1 + \varepsilon^2 p_0 - p_0 = a_1 + a_2 - p_0 - 2\varepsilon a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon p_0\,.$$

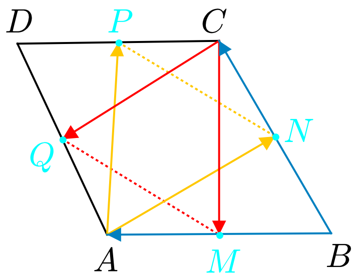
Pro číslo p_3 z podobného vyjádření $p_3 - a_3 = \varepsilon^4(p_2 - a_3)$ obdržíme

$$p_3 = a_3 + \varepsilon a_3 - \varepsilon p_2 = a_3 + \varepsilon a_3 - \varepsilon a_1 - \varepsilon a_2 + \varepsilon p_0 + 2\varepsilon^2 a_1 - \varepsilon^2 a_2 - \varepsilon^2 p_0 =$$

$$= a_3 + \varepsilon a_3 - \varepsilon a_1 - \varepsilon a_2 + \varepsilon p_0 + 2\varepsilon a_1 - 2a_1 - \varepsilon a_2 + a_2 - \varepsilon p_0 + p_0 = p_0\,.$$

Posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2 \dots$ má tedy periodu 3. Protože 1986 je číslo dělitelné třemi, je $P_{1986} = P_0$. □

Úloha 3.18: *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník a M, N, P, Q po řadě středy stran AB, BC, CD, DA. Dokažte, že pokud ANP a CQM jsou rovnostranné trojúhelníky, pak $ABCD$ je kosočtverec. Najděte rovněž jeho vnitřní úhly.*[19]



Řešení:
Středům stran M, N, P, Q odpovídají komplexní čísla

$$m = \frac{1}{2}(a+b)\,, \qquad n = \frac{1}{2}(b+c)\,, \qquad p = \frac{1}{2}(c+d)\,, \qquad q = \frac{1}{2}(d+a)\,.$$

Jsou-li trojúhelníky ANP a CQM rovnostranné, vznikne vektor $\overrightarrow{AP}$ a stejně tak i vektor $\overrightarrow{CM}$ otočením vektoru $\overrightarrow{AN}$, resp. vektoru $\overrightarrow{CQ}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ (kterému algebraicky odpovídá násobení komplexní jednotkou ε). Pro odpovídající komplexní čísla proto platí

$$m - c = \varepsilon(q - c)\,, \qquad p - a = \varepsilon(n - a)\,.$$

Dosazením za m, n, p, q odtud dostáváme dvě rovnosti, které vyjadřují zadanou podmínku, že totiž trojúhelníky ANP a CQM jsou rovnostranné:

$$a + b - 2c = \varepsilon(d + a - 2c)\,, \qquad c + d - 2a = \varepsilon(b + c - 2a)\,. \tag{3.3}$$

[19] [bech–04], str. 98, úloha 2, řešení pozměněno.

Sečtením obou těchto rovností obdržíme

$$b + d - a - c = \varepsilon(b + d - a - c)\,,$$

což znamená, že vektor daný číslem $b+d-a-c$ se otočením o úhel $\frac{\pi}{3}$ zobrazí sám na sebe, čili jde o vektor nulový, odtud $b-a = c-d$. To ovšem znamená, že $ABCD$ je rovnoběžník. Nyní budeme na první z rovností (3.3) aplikovat ekvivalentní úpravy (s využitím již dokázané rovnosti $c - d = b - a$) tak, abychom našli vztah mezi komplexními čísly odpovídajími vektorům $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$:

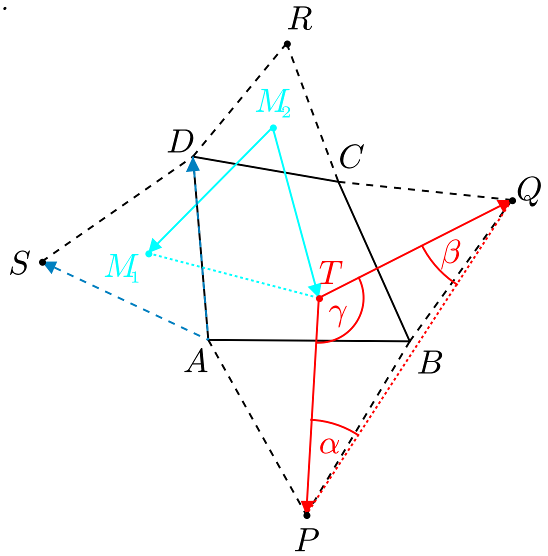
$$\begin{aligned}
a + b - 2c &= \varepsilon(d + a - 2c)\,,\\
(b - c) + (a - c) &= \varepsilon\left((a - c) + (d - c)\right)\,,\\
(b - c) + (a - b + b - c) &= \varepsilon\left((a - b + b - c) + (a - b)\right)\,,\\
2(b - c) + (a - b) &= 2\varepsilon(a - b) + \varepsilon(b - c)\,,\\
(1 - 2\varepsilon)(a - b) &= (2 - \varepsilon)(c - b)\,.
\end{aligned}$$

Odtud můžeme díky nerovnostem $c \neq b$ a $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$ psát (s využitím rovnosti $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$):

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{\varepsilon-2}{2\varepsilon-1} = \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon-1)}{\varepsilon(\varepsilon+1)} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon\,.$$

To však znamená, že $a - b = \varepsilon(c - b)$, a tedy úhel mezi vektory $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ je $\frac{\pi}{3}$ a tyto vektory mají stejnou délku. Zároveň $ABCD$ je rovnoběžník, a tedy $ABCD$ je kosočtverec. Úhel mezi vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$ je $\frac{2\pi}{3}$, takže vnitřní úhly kosočtverce mají velikost $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{2\pi}{3}$. $\square$

Úloha 3.19: *Rovnostranné trojúhelníky ADS, BAP, CBQ a DCR jsou sestrojeny vně nad stranami konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Nechť body M_1 a M_2 jsou těžiště trojúhelníků ADS a DCR a bod T je dán tak, že trojúhelník M_2M_1T je rovnostranný. Najděte úhly trojúhelníku PQT.*[20]



[20][eng–97], str. 300, úloha 34.

Řešení:

Nejprve najdeme komplexní čísla, které odpovídají bodům P, Q, R, S. Protože trojúhelník ADS je rovnostranný, je vektor $\overrightarrow{AS}$ otočením vektoru $\overrightarrow{AD}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$, čemuž algebraicky odpovídá násobení komplexní jednotkou ε. Analogicky to platí i pro další trojúhelníky:

$$s-a=\varepsilon(d-a)\,,\quad \text{tj.}\quad s=a+\varepsilon(d-a)\,;\qquad r-d=\varepsilon(c-d)\,,\quad \text{tj.}\quad r=d+\varepsilon(c-d)\,,$$

$$q-c=\varepsilon(b-c)\,,\quad \text{tj.}\quad q=c+\varepsilon(b-c)\,;\qquad p-b=\varepsilon(a-b)\,,\quad \text{tj.}\quad p=b+\varepsilon(a-b)\,.$$

Pro příslušná komplexní čísla těžišť M_1, M_2 tudíž platí

$$m_1=\frac{1}{3}(a+d+s)=\frac{1}{3}(2a+d+\varepsilon(d-a))\,,\qquad m_2=\frac{1}{3}(c+d+r)=\frac{1}{3}(2d+c+\varepsilon(c-d))\,.$$

Nyní najdeme komplexní číslo odpovídající bodu T. Je-li trojúhelník M_2M_1T rovnostranný, musí být vektor $\overrightarrow{M_2T}$ otočením vektoru $\overrightarrow{M_2M_1}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$, neboli

$$t-m_2=\varepsilon(m_1-m_2)\,.$$

Po dosazení za m_1, m_2 odtud dostaneme

$$t=m_2+\varepsilon(m_1-m_2)=\frac{1}{3}(2d+c+\varepsilon(c-d)+2a\varepsilon+d\varepsilon+\varepsilon^2(d-a)-2d\varepsilon-c\varepsilon-\varepsilon^2(c-d))=$$

$$=\frac{1}{3}(2d+c+\varepsilon c-\varepsilon d+2\varepsilon a+\varepsilon d+\varepsilon d-d-\varepsilon a+a-2\varepsilon d-\varepsilon c-\varepsilon c+c+\varepsilon d-d)=\frac{1}{3}(a+2c+\varepsilon a-\varepsilon c)\,.$$

V trojúhelníku PQT označme $\alpha=|\sphericalangle TPQ|$, $\beta=|\sphericalangle TQP|$ a $\gamma=|\sphericalangle PTQ|$ (viz obr.). Vyjádřeme čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{TP}$ a $\overrightarrow{TQ}$ a ukažme, že druhé z nich je ε^2-násobkem prvního:

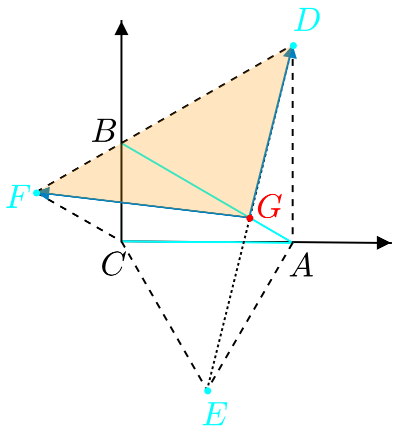
$$\overrightarrow{TP}:\quad p-t=b+\varepsilon a-\varepsilon b-\frac{1}{3}(a+2c+\varepsilon a-\varepsilon c)=\frac{1}{3}(-a+3b-2c+2\varepsilon a-3\varepsilon b+\varepsilon c)\,.$$

$$\overrightarrow{TQ}:\quad q-t=c+\varepsilon b-\varepsilon c-\frac{1}{3}(a+2c+\varepsilon a-\varepsilon c)=\frac{1}{3}(-a+c-\varepsilon a+3\varepsilon b-2\varepsilon c)\,,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(p-t)&=\frac{1}{3}(-\varepsilon^2 a+3\varepsilon^2 b-2\varepsilon^2 c+2\varepsilon^3 a-3\varepsilon^3 b+\varepsilon^3 c)=\\&=\frac{1}{3}(-\varepsilon a+a+3\varepsilon b-3b-2\varepsilon c+2c-2a+3b-c)=\\&=\frac{1}{3}(-a+c-\varepsilon a+3\varepsilon b-2\varepsilon c)=q-t\,.\end{aligned}$$

To znamená, že vektor $\overrightarrow{TQ}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{TP}$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$, tedy trojúhelník PQT je rovnoramenný a u hlavního vrcholu T má úhel $\gamma=\frac{2\pi}{3}$. Z toho plyne, že $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$. $\square$

Úloha 3.20: *Nechť ABC je trojúhelník, ve kterém úhel u vrcholu C je $\frac{\pi}{2}$, úhel u vrcholu A je $\alpha = \frac{\pi}{6}$ a délka strany AB je 1. Nechť D, E, F jsou vrcholy rovnostranných trojúhelníků sestrojených vně po řadě nad stranami AB, AC a BC. Nechť G je průsečík úseček DE a AB. Určete obsah trojúhelníku DFG.*[21]



Řešení:
Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB délky 1 a úhlem $\alpha = |\sphericalangle CAB| = \frac{\pi}{6}$. Užitím sinu a kosinu úhlu α dostáváme

$$|AC| = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad |BC| = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Zvolíme-li přímky AC, resp. BC za reálnou, resp. imaginární osu Gaussovy roviny, pak bodům A, B, C budou odpovídat komplexní čísla daná rovnostmi

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad b = \frac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad c = 0.$$

Nyní můžeme vyjádřit komplexní čísla odpovídající bodům D, E, F, jako výsledkům vhodných otočení vrcholů A, B, C o úhel $\frac{\pi}{3}$, pomocí násobení komplexní jednotkou ε:

$$d = b + \varepsilon(a - b), \qquad e = a + \varepsilon(c - a), \qquad f = c + \varepsilon(b - c).$$

Dosazením za čísla a, b, c a ε do těchto rovností dostaneme:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}, \qquad e = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{i}, \qquad f = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}.$$

Dále najdeme komplexní číslo odpovídající bodu G, který je průsečíkem přímek DE a AB. Rovnice těchto přímek mají tvar

$$DE:\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i} + t\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{7}{4}\mathrm{i}\right), t \in \mathbf{R}; \qquad AB:\ z = \frac{1}{2}\mathrm{i} + s\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right), s \in \mathbf{R}.$$

[21] [kwo–01], str. 17, úloha 5, řešení vlastní.

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + t\frac{\sqrt{3}}{4} = -s\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad 1 + \frac{7}{4}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s$$

s řešením $t = -\frac{1}{2}$, $s = -\frac{3}{4}$, takže hledané číslo g má hodnotu

$$g = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}\mathrm{i}\,.$$

Dále určíme komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{GD}$ a $\overrightarrow{GF}$

$$\overrightarrow{GD}: \quad d - g = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{7}{8}\mathrm{i}\,, \qquad \overrightarrow{GF}: \quad f - g = \frac{-5\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}\mathrm{i}\,.$$

Obsah trojúhelníku DFG můžeme určit jako jednu polovinu velikosti vektorového součinu vektorů $\overrightarrow{GD}$ a $\overrightarrow{GF}$:

$$S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{GD} \times \overrightarrow{GF}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\right| = \frac{9\sqrt{3}}{32}\,. \qquad \square$$

Kapitola 4

Otáčení o obecný úhel

V této kapitole uvedeme 13 geometrických úloh, které lze řešit s využitím otáčení o obecný (orientovaný) úhel φ. V první kapitole jsme popsali, jak takové otočení popsat algebraicky v případě, že jeho středem je počátek O Gaussovy roviny. V případě otočení ϱ o úhel φ s obecným středem S jsou komplexní čísla odpovídající bodům W a Z, kde W je obraz libovolného bodu Z, tedy $W = \varrho(Z)$, svázány rovnicí

$$w - s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(z - s)\,, \qquad \text{neboli} \qquad w = s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(z - s)\,,$$

kde s je komplexní číslo odpovídající středu S. K zápisu komplexní jednotky s argumentem φ jsme použili s výhodou exponenciální tvar

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,,$$

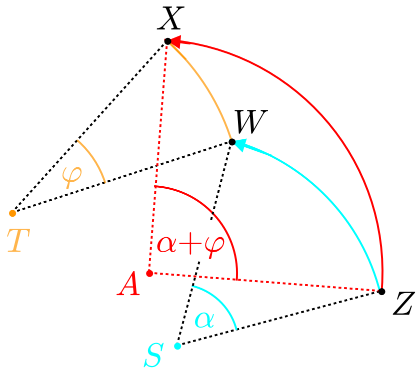
o kterém jsme stručně pojednali v kapitole 1. Budeme ho v této kapitole běžně používat. V případě otočení o (neorientovaný) úhel velikosti φ v záporném směru bude zápis příslušné rovnice vypadat takto

$$w = s + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}(z - s)$$

(neboť se jedná o otočení o orientovaný úhel $-\varphi$).

V některých úlohách budeme využívat otočení o obecný úhel φ spolu s otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$, resp. $\frac{\pi}{3}$. Budeme tedy nadále využívat výše zavedené označení komplexní jednotky $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$, zavedené v předchozí kapitole, a všech jejích vlastností.

Úloha 4.1: *Složíme-li dvě (obecná) otočení v téže rovině, bude výsledné zobrazení buď opět otočení, nebo posunutí. Dokažte.*[1]



Řešení:
Mějme dáno otočení ϱ_1 o orientovaný úhel $\alpha \in (0, 2\pi)$ kolem středu S a otočení ϱ_2 o orientovaný úhel $\varphi \in (0, 2\pi)$ kolem středu T. Pro libovolný bod Z dané roviny označme $W = \varrho_1(Z)$ a $X = \varrho_2(W)$. Pak pro odpovídající komplexní čísla platí

$$w = s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - s)\,, \qquad x = t + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(w - t)\,.$$

Složením obou otočení dostáváme zobrazení $X = \varrho_2 \circ \varrho_1(Z)$, pro něž podle předchozích rovností platí předpis

$$x = t + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - s) - t\right) = t\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) + s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)}z\,. \tag{4.1}$$

V případě, že $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)} = 1$, neboli $\alpha + \varphi = 2\pi$ (neboť $\alpha, \varphi \in (0, 2\pi)$), přejde rovnost (4.1) do tvaru

$$x = t\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) + s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - s\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)} + z = t\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) + s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - s + z = \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)(t - s) + z\,.$$

Vidíme, že tehdy je výsledné zobrazení $\varrho_2 \circ \varrho_1$ posunutí o vektor $\vec{u}$, jemuž odpovídá komplexní číslo

$$u = \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)(t - s)\,.$$

V případě $\alpha + \varphi \neq 2\pi$ upravíme (4.1) do tvaru

$$x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)}(z - a) + a$$

pro vhodné komplexní číslo a, které je řešením rovnice

$$t\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) + s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) = -a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)} + a\,.$$

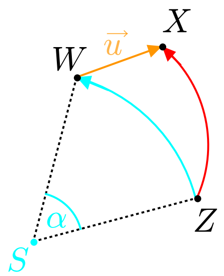
[1] Vlastní námět.

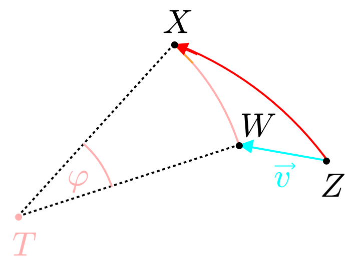
Výsledné zobrazení je tehdy otočení o orientovaný úhel $\alpha+\varphi$ se středem A s komplexní souřadnicí

$$a = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)}}t + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)}}s\,.$$

□

Úloha 4.2: *Složíme-li otočení a posunutí v téže rovině (ať už v jednom či druhém pořadí), bude výsledné zobrazení opět otočení. Dokažte.*[2]





Řešení:

1. Mějme dáno otočení ϱ_1 o orientovaný úhel $\alpha \in (0, 2\pi)$ kolem středu S a posunutí f o vektor $\vec{u}$. Pro libovolný bod Z dané roviny označme $W = \varrho_1(Z)$ a $X = f(W)$. Pak pro odpovídající komplexní čísla platí

   $$w = s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z-s)\,, \qquad x = w + u\,.$$

   Složením obou zobrazení v pořadí „otočení – posunutí“ dostáváme výsledné zobrazení $X = f\circ\varrho_1(Z)$, pro něž podle předchozích rovností platí předpis

   $$x = s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z-s) + u = s\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) + u + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z\,. \tag{4.2}$$

   Ukážeme, že zobrazení $f\circ\varrho_1$ je otočení o orientovaný úhel α kolem jistého středu A, když předpis (4.2) upravíme do tvaru

   $$x = f\circ\varrho_1(z) = a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z-a)\,.$$

   Porovnáním poslední rovnosti a předpisu (4.2) určíme komplexní číslo a odpovídající středu A výsledného otočení $f\circ\varrho_1$:

   $$s\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) + u = -a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + a\,, \qquad \text{odkud} \qquad a = s + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}u\,.$$

[2] Vlastní námět.

2. Nyní mějme dáno posunutí g o vektor $\vec{v}$ a otočení ϱ_2 o orientovaný úhel $\varphi \in (0, 2\pi)$ kolem středu T. Pro libovolný bod Z dané roviny označme $W = g(Z)$ a $X = \varrho_2(W)$. Pak pro odpovídající komplexní čísla platí

$$w = z + v\,, \qquad x = t + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(w - t)\,.$$

Složením obou zobrazení v pořadí „posunutí – otočení“ dostáváme výsledné zobrazení $X = \varrho_2 \circ g(Z)$, pro něž podle předchozích rovností platí

$$x = t + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(z + v - t) = t\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) + v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} z\,. \tag{4.3}$$

Ukážeme, že zobrazení $\varrho_2 \circ g$ je otočení o orientovaný úhel φ kolem jistého středu B, když předpis (4.3) upravíme do tvaru

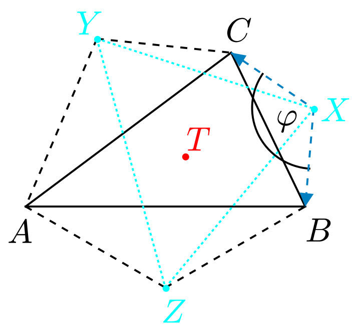
$$x = b + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - b)\,.$$

Komplexní číslo b odpovídající středu B určíme obdobně jako číslo a v první části řešení:

$$b = s + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} v\,.$$

Tím je důkaz hotov. □

Úloha 4.3: *Vně nad stranami trojúhelníku ABC jsou jako nad základnami sestrojeny tři navzájem podobné rovnoramenné trojúhelníky BCX, CAY, ABZ. Dokažte, že těžiště trojúhelníků ABC a XYZ splývají.*[3]



ŘEŠENÍ:
Nejprve najdeme komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině jsou body X, Y, Z. Protože trojúhelníky BCX, CAY, ABZ jsou navzájem podobné, mají u vrcholů X, Y, Z stejný úhel, který označíme φ. Protože navíc platí $|XB| = |XC|$, je vektor $\overrightarrow{XB}$ výsledkem

[3] [lar–90], str. 391, úloha 8.3.15.

otočení vektoru $\overrightarrow{XC}$ o úhel φ v kladném směru, což v Gaussově rovině odpovídá vynásobení komplexní jednotkou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Pro odpovídající komplexní čísla pak platí

$$b - x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(c - x)\,, \quad \text{neboli} \quad x = \frac{b - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}c}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,.$$

Analogická otočení najdeme i ve zbylých dvou trojúhelnících, odtud

$$c - y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(a - y)\,, \quad \text{neboli} \quad y = \frac{c - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}a}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,; \qquad a - z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(b - z)\,, \quad \text{neboli} \quad z = \frac{a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}b}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,.$$

Těžiště T trojúhelníku ABC je obrazem komplexního čísla

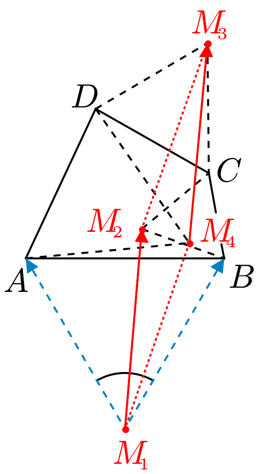
$$t = \frac{1}{3}(a + b + c)\,,$$

těžiště S trojúhelníku XYZ komplexního čísla

$$s = \frac{1}{3}(x + y + z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a + b + c - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(a + b + c)}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{1}{3}(a + b + c) = t\,.$$

Obě těžiště tedy skutečně splývají. □

Úloha 4.4: *Nad stranami libovolného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou jako nad základnami sestrojeny čtyři navzájem podobné rovnoramenné trojúhelníky ABM_1, BCM_2, CDM_3 a DAM_4, přitom první a třetí z nich směrem vně, druhý a čtvrtý směrem dovnitř čtyřúhelníku (viz obr.). Dokažte, že $M_1M_2M_3M_4$ je rovnoběžník.*[4]



[4]Jde o zobecnění úlohy 3.2, úloha 8.3.13 z [lar–90], str. 391, kde je uvažován pouze případ čtyř *rovnostranných* trojúhelníků.

Řešení:
Označme α úhel u vrcholů M_1, M_2, M_3, M_4 navzájem podobných rovnoramenných trojúhelníků ABM_1, BCM_2, CDM_3 a DAM_4. Nejprve najdeme komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině jsou body M_1, M_2, M_3, M_4. Protože $|M_1A| = |M_1B|$, je vektor $\overrightarrow{M_1A}$ otočením vektoru $\overrightarrow{M_1B}$ o úhel α v kladném směru, což v Gaussově rovině odpovídá vynásobení komplexní jednotkou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Analogická otočení najdeme v dalších trojúhelnících (viz obr.), pro odpovídající komplexní čísla tak dostaneme:

$$a - m_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(b - m_1)\,, \quad \text{neboli} \quad m_1 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}b - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}a\,,$$

$$c - m_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(d - m_3)\,, \quad \text{neboli} \quad m_3 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}d - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}c\,,$$

$$c - m_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(b - m_2)\,, \quad \text{neboli} \quad m_2 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}b - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}c\,,$$

$$a - m_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(d - m_4)\,, \quad \text{neboli} \quad m_4 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}d - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}a\,.$$

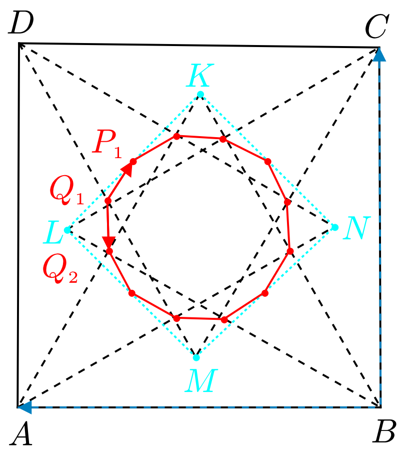
Nyní najdeme komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{M_1M_2}$ a $\overrightarrow{M_4M_3}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}: \quad m_2 - m_1 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}b - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}c - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}b + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}a = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}(a-c)\,,$$

$$\overrightarrow{M_4M_3}: \quad m_3 - m_4 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}d - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}c - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}d + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}a = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}(a-c)\,.$$

Odtud již vidíme, že $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, a proto $M_1M_2M_3M_4$ je skutečně rovnoběžník. $\square$

Úloha 4.5: *Rovnostranné trojúhelníky ABK, BCL, CDM, DAN jsou sestrojeny uvnitř čtverce $ABCD$. Dokažte, že středy čtyř úseček KL, LM, MN, NK a středy osmi úseček AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN tvoří vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku.*[5]



[5][eng–97], str. 301, úloha 45.

Řešení:
Protože $ABCD$ je podle zadání čtverec, je vektor $\overrightarrow{BC}$ výsledkem otočení vektoru $\overrightarrow{BA}$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ v záporném směru, což odpovídá vynásobení komplexní jednotkou $-\mathrm{i}$. Podobně vektor $\overrightarrow{AD}$ je výsledkem otočením vektoru $\overrightarrow{AB}$ o $\frac{\pi}{2}$ v kladném směru, což odpovídá vynásobení komplexní jednotkou i. Pro odpovídající komplexní čísla proto platí

$$c-b=-\mathrm{i}(a-b)\,,\quad \text{neboli}\quad c=-\mathrm{i}a+(1+\mathrm{i})b\,;\qquad d-a=\mathrm{i}(b-a)\,,\quad \text{neboli}\quad d=(1-\mathrm{i})a+\mathrm{i}b\,.$$

Označme komplexní jednotku

$$\omega=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\,.$$

Pak platí $\omega^6=-1$ a $\omega^3=\mathrm{i}$, odtud vzhledem k $\omega^3-\mathrm{i}=(\omega+\mathrm{i})(\omega^2-\mathrm{i}\omega-1)$ dostaneme $\omega^2=\mathrm{i}\omega+1$, $\omega^4=\mathrm{i}\omega$ a $\omega^5=\mathrm{i}\omega^2=-\omega+\mathrm{i}$.
Protože trojúhelník ABK je rovnostranný, je vektor $\overrightarrow{AK}$ otočením vektoru $\overrightarrow{AB}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$, což odpovídá násobení komplexní jednotkou ω^2. Analogické tvrzení platí pro trojúhelníky BCL a CDM, takže

$$k=a+\omega^2(b-a)\,,\qquad l=b+\omega^2(c-b)\,,\qquad m=c+\omega^2(d-c)\,.$$

Střed úsečky KL označíme P_1 a středy úseček DM, AK označíme po řadě Q_1, Q_2. Pro odpovídající komplexní čísla platí

$$p_1=\frac{1}{2}(k+l)=\frac{1}{2}(a+b+\omega^2(c-a))\,,$$

$$q_1=\frac{1}{2}(d+m)=\frac{1}{2}(c+d+\omega^2(d-c))\,,\qquad q_2=\frac{1}{2}(a+k)=\frac{1}{2}(2a+\omega^2(b-a))\,.$$

Nyní vyjádříme čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{Q_1P_1}$ a $\overrightarrow{Q_1Q_2}$

$$\overrightarrow{Q_1P_1}:\quad p_1-q_1=\frac{1}{2}(a+b+\omega^2(c-a)-c-d-\omega^2(d-c))=\frac{1}{2}(a+b+\mathrm{i}a-(1+\mathrm{i})b-(1-\mathrm{i})a-$$

$$-\mathrm{i}b+\omega^2(-a-2\mathrm{i}a+2(1+\mathrm{i})b-(1-\mathrm{i})a-\mathrm{i}b))=\frac{1}{2}(2\mathrm{i}a-2\mathrm{i}b+\omega^2(-2a+2b-\mathrm{i}a+\mathrm{i}b))=\frac{1}{2}(2\mathrm{i}a-2\mathrm{i}b-$$

$$-2\mathrm{i}\omega a+2\mathrm{i}\omega b+\omega a-\omega b-2a+2b-\mathrm{i}a+\mathrm{i}b)=\frac{1}{2}(-2a+2b+\mathrm{i}a-\mathrm{i}b+\omega(a-b-2\mathrm{i}a+2\mathrm{i}b))$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}:\quad q_2-q_1=\frac{1}{2}(2a+\omega^2(b-a)-c-d-\omega^2(d-c))=\frac{1}{2}(2a+\mathrm{i}a-(1+\mathrm{i})b-(1-\mathrm{i})a-\mathrm{i}b+$$

$$+\omega^2(-a+b-\mathrm{i}a+(1+\mathrm{i})b-(1-\mathrm{i})a-\mathrm{i}b))=\frac{1}{2}(a-b+2\mathrm{i}a-2\mathrm{i}b+\omega^2(-2a+2b))\,.$$

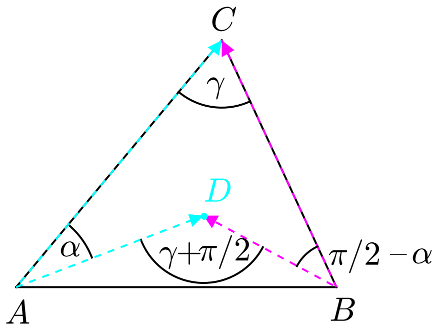
Abychom ověřili, že dvanáctiúhelník popsaný v zadání úlohy je pravidelný, stačí s ohledem na symetrii celé situace ukázat, že vektor $\overrightarrow{Q_1P_1}$ je výsledkem otočení vektoru $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ o úhel $\frac{5\pi}{6}$, což v komplexní rovině odpovídá násobení komplexní jednotkou ω^5:

$$\omega^5(q_2-q_1)=\frac{1}{2}\left(\omega^5(a-b+2\mathrm{i}a-2\mathrm{i}b)+\omega^7(-2a+2b)\right)=\frac{1}{2}((-\omega+\mathrm{i})(a-b+2\mathrm{i}a-2\mathrm{i}b)-$$

$$-\omega(-2a+2b)) = \frac{1}{2}(-\omega a + \mathrm{i}a + \omega b - \mathrm{i}b - 2\mathrm{i}\omega a - 2a + 2\mathrm{i}\omega b + 2b + 2\omega a - 2\omega b) =$$
$$= \frac{1}{2}(-2a + 2b + \mathrm{i}a - \mathrm{i}b + \omega(a - b - 2\mathrm{i}a + 2\mathrm{i}b)) = p_1 - q_1\,.$$

Tím je důkaz hotov. □

Úloha 4.6: *Bod D je vybrán uvnitř trojúhelníku ABC tak, že platí $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + \frac{\pi}{2}$ a $|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|$. Najděte poměr $p = \frac{|AB|\cdot|CD|}{|AC|\cdot|BD|}$.*[6]



Řešení:
Zvolme bod D za počátek komplexní roviny, odpovídá mu tedy komplexní číslo $d = 0$. Označme $|\sphericalangle CAD| = \alpha$ a $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Protože pro součet úhlů ve čtyřúhelníku $ACBD$ platí

$$\alpha + \gamma + |\sphericalangle DBC| + \left(2\pi - \gamma - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\,, \qquad \text{je} \qquad |\sphericalangle DBC| = \frac{\pi}{2} - \alpha\,.$$

Dále označíme s společnou hodnotu dvou poměrů, které se podle zadání rovnají:

$$s = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}\,.$$

Z obrázku vidíme, že vektor $\overrightarrow{AC}$ vznikne otočením vektoru $\overrightarrow{AD}$ o úhel α v kladném směru a jeho následným vynásobením reálným číslem s. Podobně vektor $\overrightarrow{BC}$ vznikne otočením vektoru $\overrightarrow{BD}$ o úhel $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ v záporném směru (čili o úhel $\alpha - \frac{\pi}{2}$) a jeho následným vynásobením reálným číslem s. Pro komplexní čísla odpovídající výše uvedeným dvojicím vektorů tedy platí

$$c - a = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(0 - a) = -s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a\,, \qquad \text{odtud} \qquad c = a - s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a\,,$$
$$c - b = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}(0 - b) = s\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}b\,, \qquad \text{odtud} \qquad c = b + s\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}b\,,$$

přitom jsme využili rovnosti $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Nyní vyjádříme součiny z hledaného poměru p

$$|AC|\cdot|BD| = |c-a|\cdot|b-0| = |s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a|\cdot|b| = s|a|\cdot|b|\,, \qquad |AB|\cdot|CD| = |b-a|\cdot|c-0| = |(a-b)c|\,.$$

[6] [eng–97], str. 300, úloha 38.

Všimněme si, že platí

$$(a-b)\,c = c\,(a-c+c-b) = c\left(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a + \mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}b\right) = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,(ac+\mathrm{i}bc) =$$

$$= s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(a\left(b+s\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}b\right)+\mathrm{i}b\left(a-s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a\right)\right) = sab\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\left(1+ise^{\mathrm{i}\alpha}\right)+\mathrm{i}\left(1-s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\right) = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}ab\,(1+\mathrm{i})\,.$$

Proto dostáváme

$$|AB|\cdot|CD| = |s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}ab\,(1+\mathrm{i})\,| = s|a|\cdot|b|\,\sqrt{2} = \sqrt{2}|AC|\cdot|BD|\,,$$

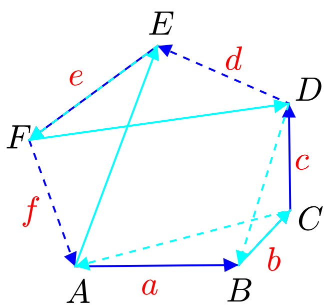
a tedy hledaný poměr p je roven $\sqrt{2}$. $\square$

Úloha 4.7: *Předpokládejme, že $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník, ve kterém platí*

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle EFA| = 2\pi \qquad a \qquad \frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{|CD|}{|DE|}\cdot\frac{|EF|}{|FA|} = 1\,.$$

Dokažte, že[7]

$$\frac{|BC|}{|CA|}\cdot\frac{|AE|}{|EF|}\cdot\frac{|FD|}{|DB|} = 1\,.$$



Řešení:
Nechť vektorům $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ odpovídají v Gaussově rovině (nenulová) komplexní čísla a, b, c, d, e, f. Součiny vystupující v zadání jsou absolutními hodnotami komplexních čísel

$$u = \frac{ace}{bdf}\,, \qquad v = \frac{b(-e-f)(-d-e)}{(-a-b)e(-b-c)} = \frac{b(e+f)(d+e)}{e(a+b)(b+c)}\,.$$

Z druhé podmínky v zadání plyne, že $|u| = 1$. Dále velikost úhlu mezi vektory odpovídajícími číslům a a b je roven $\pi - |\sphericalangle ABC|$, tento úhel je pak argument podílu $\frac{a}{b}$. Podobný význam mají argumenty podílů $\frac{c}{d}$ a $\frac{e}{f}$. Odtud spolu s první podmínkou ze zadání plyne, že

$$\arg u = (\pi - |\sphericalangle ABC|) + (\pi - |\sphericalangle CDE|) + (\pi - |\sphericalangle EFA|) = \pi\,.$$

[7] [ol–99], str. 17, úloha 4, řešení pozměněno.

Platí tedy $u = -1$, odkud plyne

$$ace + bdf = 0\,.$$

Naším úkolem je dokázat, že $|v| = 1$. Ukážeme, že taky platí $v = -1$, což lze po roznásobení vyjádřit rovností

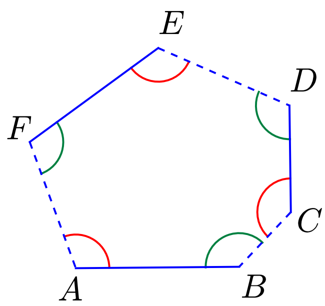
$$bde + be^2 + bdf + bef + abe + ace + b^2e + bce = 0\,.$$

Užitím předchozí odvozené rovnosti $ace + bdf = 0$ a po následném vykrácení nenulovým číslem be přejde dokazovaná rovnost do tvaru

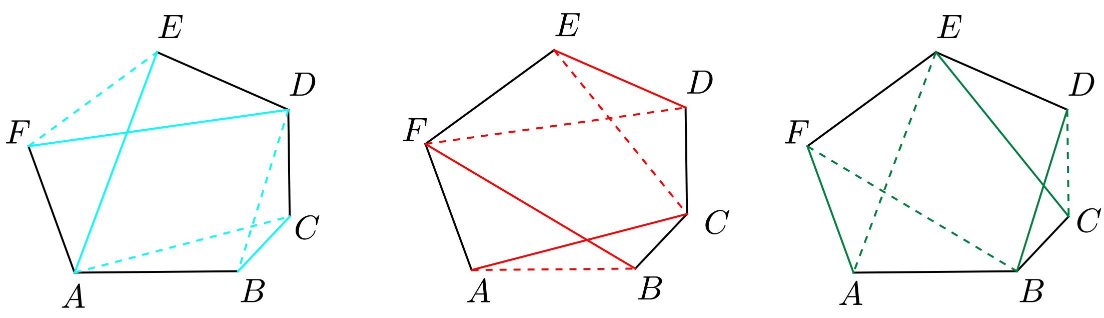
$$d + e + f + a + b + c = 0\,,$$

což ovšem platí, neboť součet šesti vektorů stran šestiúhelníku je nulový vektor. Rovnost $v = -1$ je tak dokázána. $\square$

Poznámka:



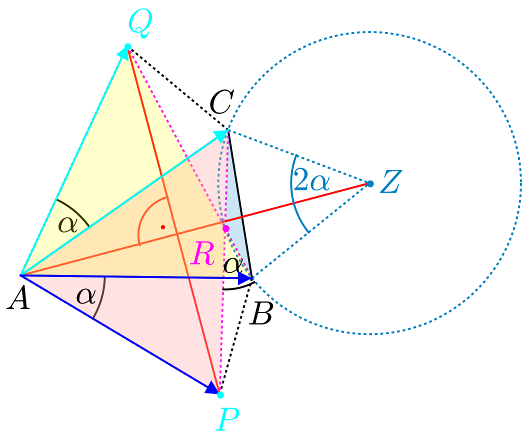
V uvažovaném konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ je podle první podmínky ze zadání součet úhlů u vrcholů B, D, F roven 2π. Protože součet všech úhlů v šestiúhelníku je 4π, je součet úhlů u vrcholů A, C, E roven taky 2π. Navíc strany šestiúhelníku vystupují v druhé podmínce ze zadání rovněž způsobem, který je pro trojice (B, D, F) a (A, C, E) symetrický (viz obr.), kde strany z čitatele resp. jmenovatele jsou vyznačeny plnou resp. přerušovanou čarou.



Proto vedle dokázané rovnosti (znázorněné modře na prvním obrázku) z předpokladů úlohy plynou ještě další dvě analogické rovnosti (znázorněné červeně a zeleně na druhém a třetím obrázku), dohromady tedy platí

$$\frac{|BC|}{|CA|}\cdot\frac{|AE|}{|EF|}\cdot\frac{|FD|}{|DB|}=\frac{|DE|}{|EC|}\cdot\frac{|CA|}{|AB|}\cdot\frac{|BF|}{|FD|}=\frac{|FA|}{|AE|}\cdot\frac{|EC|}{|CD|}\cdot\frac{|DB|}{|BF|}=1\,.$$

Úloha 4.8: *Nechť trojúhelník ABC s vnitřním úhlem α u vrcholu A splňuje alespoň jednu z podmínek $\alpha \neq \frac{2\pi}{3}$, $|AB| \neq |AC|$. Trojúhelníky PAB a QAC jsou sestrojeny vně nad stranami trojúhelníku ABC tak, že $|AP| = |AB|$, $|AQ| = |AC|$ a $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle CAQ| = \alpha$. Přímky BQ a CP se protínají v bodě R. Nechť Z je střed kružnice opsané trojúhelníku BCR. Dokažte, že přímky AZ a PQ jsou navzájem kolmé.*[8]



Řešení:
Trojúhelník ABC umístíme do Gaussovy roviny tak, že vrchol A bude ležet v počátku ($a = 0$) a úhel BAC bude kladně orientovaný. Dále označme komplexní jednotku

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq \pm 1\,.$$

Podle zadání platí $|AQ| = |AC|$ a $|\sphericalangle CAQ| = \alpha$, takže vektor $\overrightarrow{AQ}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{AC}$ o úhel α v kladném směru, čemuž odpovídá vynásobení komplexní jednotkou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Podobně ze zadání plyne, že vektor $\overrightarrow{AP}$ dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{AB}$ o úhel α v záporném směru, neboli o úhel $-\alpha$, čemuž v komplexní rovině odpovídá vynásobení komplexní jednotkou $\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}$. Odtud pro komplexní čísla p, q odpovídající bodům P, Q obdržíme

$$q - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(c-a)\,, \qquad p - a = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}(b-a)\,, \qquad \text{neboli} \qquad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}c\,, \qquad p = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}b\,.$$

Nyní ukážeme, že podmínka v první větě zadání nám zaručuje, že $p \neq q$ a má tedy smysl mluvit o přímce PQ. Předpokládejme, že $p = q$ neboli $b = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}c$, odtud plyne $|b| = |c|$,

[8] [gel–07], str. 211, úloha 601, řešení vlastní.

z čehož dále plyne $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} b$ (protože kladně orientovaný úhel BAC má velikost α rovnou argumentu komplexní jednotky $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$). Dohromady dostáváme $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\alpha} = 1$, neboli $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. To je spolu s $|b| = |c|$ v rozporu se zadáním, a tedy $p \neq q$.
Z obrázku vidíme, že trojúhelník ABQ dostaneme otočením trojúhelníku APC o úhel α v kladném směru kolem bodu A. To znamená, že úhel mezi přímkami PC a BQ je α. Protože úhel BRC má velikost $\pi - \alpha$ resp. α (podle toho, zda α je ostrý nebo tupý úhel), podle věty o obvodovém a středovém úhlu je $|\sphericalangle BZC| = 2\alpha$, přitom $|BZ| = |CZ|$. Bod B tedy dostaneme otočením bodu C kolem bodu Z o úhel 2α, čemuž v komplexní rovině odpovídá vynásobení komplexní jednotkou $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$. Pro komplexní číslo z odpovídající bodu Z to znamená, že

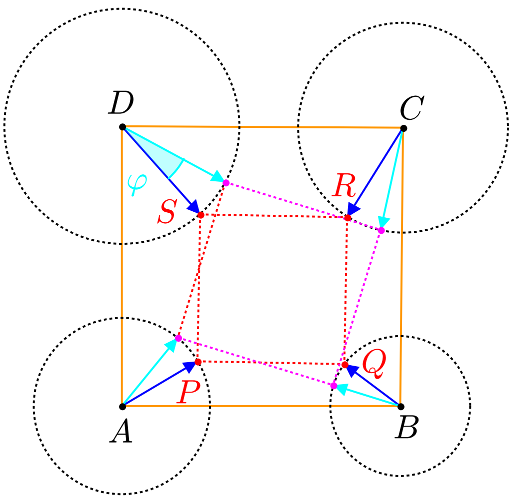
$$b - z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}(c - z)\,, \qquad \text{odtud} \qquad z = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} c - b}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} - 1}\,, \qquad \text{neboť} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq \pm 1\,.$$

Protože, jak jsme již dříve ukázali, $p \neq q$ neboli $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} c \neq b$, je $z \neq 0$ neboli $z \neq a$. Má tedy smysl mluvit i o přímce AZ.
Abychom ověřili, že úhel mezi přímkami AZ a PQ je pravý, ukážeme, že podíl komplexních čísel $q - p$ a $z - a$ je číslo ryze imaginární. Najděme tento podíl:

$$\frac{q-p}{z-a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} c - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} b}{\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} c - b}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} - 1} - 0} = \frac{\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} c - b}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}}{\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} c - b}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} - 1}} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = 2\mathrm{i}\sin\alpha\,,$$

což je skutečně číslo ryze imaginární. □

Úloha 4.9: *Středy A, B, C, D kružnic k_A, k_B, k_C, k_D jsou vrcholy čtverce. Po těchto kružnicích (obecně různých poloměrů) se pohybují v kladném směru body P, Q, R, S se stejnou stálou úhlovou rychlostí. Nechť v nějakém čase body P, Q, R, S tvoří vrcholy čtverce. Dokažte, že je tomu tak po celou dobu pohybu.*[9]



[9] [tab–02], str. 48, úloha 6, řešení vlastní.

Řešení:
Umístěme kružnice do komplexní roviny a označme a, b, c, d komplexní čísla odpovídající jejich středům A, B, C, D. Tyto body tvoří vrcholy čtverce právě tehdy, když pro odpovídající komplexní čísla platí následující dvě rovnosti

$$a - b = d - c\,, \qquad a - c = \mathrm{i}(d - b)\,. \tag{4.4}$$

První rovnost vyjadřuje, že $ABCD$ je rovnoběžník a druhá rovnost, že jeho úhlopříčky jsou shodné a navzájem kolmé. Nechť v nějakém čase t_0 body $P(t_0) = P_0$, $Q(t_0) = Q_0$, $R(t_0) = R_0$, $S(t_0) = S_0$ tvoří vrcholy čtverce a nechť v tomto čase vektorům $\overrightarrow{AP_0}$, $\overrightarrow{BQ_0}$, $\overrightarrow{CR_0}$, $\overrightarrow{DS_0}$ odpovídají komplexní čísla p, q, r, s. Pak bodům P_0, Q_0, R_0, S_0 odpovídají po řadě čísla $a+p$, $b+q$, $c+r$, $d+s$. Tyto body tvoří vrcholy čtverce, takže platí rovnosti (jak jsme vysvětlili výše):

$$(a + p) - (b + q) = (d + s) - (c + r)\,, \qquad (a + p) - (c + r) = \mathrm{i}(d + s) - \mathrm{i}(b + q)\,,$$

odkud užitím rovností (4.4) dostáváme

$$p - q = s - r\,, \qquad p - r = \mathrm{i}(s - q)\,. \tag{4.5}$$

Za libovolnou dobu $t - t_0$ se vektory $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{CR}$, $\overrightarrow{DS}$ pootočí o stejný úhel $\varphi = \omega(t - t_0)$ (protože body P, Q, R, S se pohybují po kružnicích stejnou úhlovou rychlostí ω), tomuto otočení odpovídá v komplexní rovině násobení komplexní jednotkou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Bodům $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $S(t)$ v libovolném čase t tak odpovídají komplexní čísla

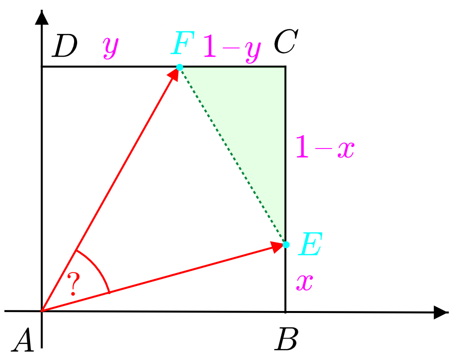
$$a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}p\,, \quad b + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}q\,, \quad c + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}r\,, \quad d + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}s\,.$$

Užitím rovností (4.4) a (4.5) dostáváme, že i pro tato komplexní čísla platí

$$(a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}p)-(b+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}q) = (d+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}s)-(c+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}r)\,, \qquad (a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}p)-(c+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}r) = \mathrm{i}(d+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}s)-\mathrm{i}(b+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}q)\,,$$

a tedy i body $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $S(t)$ v libovolném čase t tvoří vrcholy čtverce. □

Úloha 4.10: *Dva body E a F leží po řadě na stranách BC a CD čtverce $ABCD$ tak, že se obvod trojúhelníku ECF rovná dvojnásobku délky strany čtverce $ABCD$. Najděte velikost úhlu EAF.*[10]



[10] [tab–02], str. 46, úloha 2, řešení vlastní.

Řešení:
V rovině čtverce $ABCD$ zavedeme komplexní souřadnice tak, aby bod A splýval s počátkem komplexní roviny, strany AB, AD ležely po řadě na kladné reálné, resp. imaginární poloose a strana čtverce byla rovna 1 (viz obr.). Pak vrcholům A, B, C, D odpovídají po řadě komplexní čísla

$$a = 0\,, \qquad b = 1\,, \qquad c = 1 + \mathrm{i}\,, \qquad d = \mathrm{i}$$

a bodům E a F čísla

$$e = 1 + \mathrm{i}x \qquad \text{a} \qquad f = y + \mathrm{i}\,, \quad \text{kde} \quad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

přitom x, y označují délky úseků $|BE|$ a $|DF|$.
Podle zadání je obvod trojúhelníku ECF roven dvojnásobku délky strany čtverce $ABCD$, tedy číslu 2. Odtud užitím Pythagorovy věty pro trojúhelník ECF dostáváme

$$(1 - x) + (1 - y) + \sqrt{(1 - x)^2 + (1 - y)^2} = 2\,.$$

Umocněním a dalšími úpravami najdeme vztah vyjadřující závislost mezi x a y:

$$(1 - x)^2 + (1 - y)^2 = (x + y)^2\,, \qquad 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy\,,$$

$$2 - 2x - 2y - 2xy = 0\,, \qquad y = \frac{1 - x}{1 + x}\,.$$

Hledanou velikost φ úhlu EAF určíme jako argument komplexního čísla p rovného podílu čísel $f - a$ a $e - a$, neboť bod F dostaneme otočením bodu E kolem bodu A o úhel φ a vynásobením nějakým kladným reálným číslem, což dohromady odpovídá vynásobení komplexním číslem p. Zmíněný podíl p určíme takto:

$$p = \frac{f - a}{e - a} = \frac{f}{e} = \frac{y + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}x} = \frac{\frac{1-x}{1+x} + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}x} = \frac{1 - x + \mathrm{i} + \mathrm{i}x}{(1 + x)(1 + \mathrm{i}x)} =$$

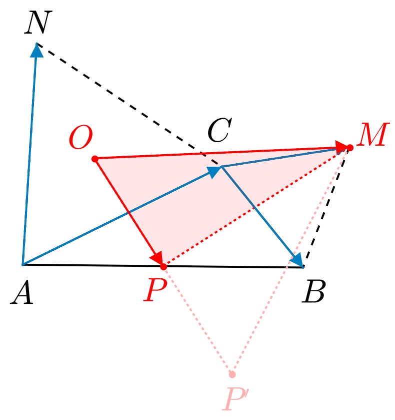
$$= \frac{1 - x + \mathrm{i} + \mathrm{i}x}{(1 + x) + \mathrm{i}(x + x^2)} \cdot \frac{(1 + x) - \mathrm{i}(x + x^2)}{(1 + x) - \mathrm{i}(x + x^2)} =$$

$$= \frac{1 + x - \mathrm{i}x - \mathrm{i}x^2 - x - x^2 + \mathrm{i}x^2 + \mathrm{i}x^3 + \mathrm{i} + \mathrm{i}x + x + x^2 + \mathrm{i}x + \mathrm{i}x^2 + x^2 + x^3}{1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4} =$$

$$= \frac{(1 + x + x^2 + x^3) + \mathrm{i}(1 + x + x^2 + x^3)}{1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4} = \frac{(1 + x + x^2 + x^3)}{1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4} \cdot (1 + \mathrm{i})\,.$$

Protože zlomek v posledním vyjádření je kladné reálné číslo, je hledaný úhel φ roven argumentu čísla $1 + \mathrm{i}$, tedy $\varphi = \frac{\pi}{4}$. $\square$

Úloha 4.11: *Rovnostranné trojúhelníky CBM a ACN jsou sestrojeny vně nad stranami BC a CA libovolně zvoleného trojúhelníku ABC. Nechť O je těžiště trojúhelníku ACN a P střed strany AB. Najděte vnitřní úhly trojúhelníku OPM.* [11]



Řešení:
Trojúhelníky CBM, resp. ACN jsou rovnostranné, proto jsou vektory $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ výsledky otočení po řadě vektorů $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, čemuž odpovídá v komplexní rovině násobení komplexní jednotkou $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$. Platí tedy

$$m = c + \varepsilon(b - c)\,, \qquad n = a + \varepsilon(c - a)\,.$$

Bod P je střed strany AB a bod O těžiště trojúhelníku ACN, pro odpovídající komplexní čísla proto platí

$$p = \frac{1}{2}(a + b)\,, \qquad o = \frac{1}{3}(a + c + n) = \frac{1}{3}(a + c + a + \varepsilon(c - a)) = \frac{1}{3}(2a + c - \varepsilon a + \varepsilon c)\,.$$

Protože se zajímáme o trojúhelník OPM, najdeme nyní komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{OM}$ a $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OM}: \quad m - o = \frac{1}{3}(3c + 3\varepsilon b - 3\varepsilon c - 2a - c + \varepsilon a - \varepsilon c) = \frac{1}{3}(-2a + 2c + \varepsilon a + 3\varepsilon b - 4\varepsilon c)\,,$$

$$\overrightarrow{OP}: \quad p - o = \frac{1}{6}(3a + 3b - 4a - 2c + 2\varepsilon a - 2\varepsilon c) = \frac{1}{6}(-a + 3b - 2c + 2\varepsilon a - 2\varepsilon c)\,.$$

Vynásobíme-li komplexní číslo $p - o$ komplexní jednotkou ε, obdržíme

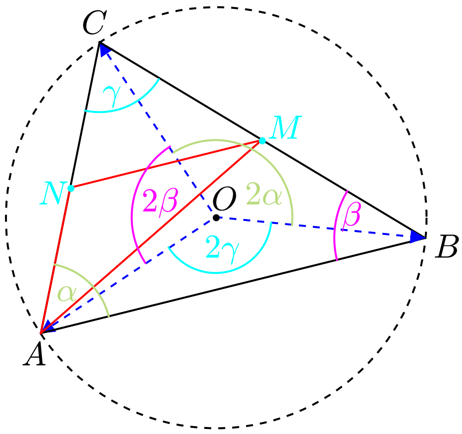
$$\varepsilon(p-o) = \frac{1}{6}(-\varepsilon a+3\varepsilon b-2\varepsilon c+2\varepsilon a-2a-2\varepsilon c+2c) = \frac{1}{6}(-2a+2c+\varepsilon a+3\varepsilon b-4\varepsilon c) = \frac{1}{2}(m-o)\,.$$

Z rovnosti $m - o = 2\varepsilon(p - o)$ vidíme, že vektor $\overrightarrow{OM}$ dostaneme, když vektor $\overrightarrow{OP}$ otočíme o úhel $\frac{\pi}{3}$ a pak ještě vynásobíme číslem 2 (čemuž dohromady odpovídá právě násobení komplexním číslem 2ε). Úhel MOP má tedy velikost $\frac{\pi}{3}$.

[11] [tab–02], str. 48, úloha 9, řešení vlastní.

Trojúhelník MOP je tedy „polovinou“ rovnostranného trojúhelníku MOP', kde P' je bod určený rovností $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OP}$. Hledané vnitřní úhly při vrcholech O, P, M jsou proto po řadě $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$. □

Úloha 4.12: *Nechť ABC je trojúhelník a M, N jsou po řadě středy stran BC, AC. Jestliže ortocentrum trojúhelníku ABC a těžiště trojúhelníku AMN splývají, jaké velikosti mají vnitřní úhly trojúhelníku ABC?*[12]



Řešení:
Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, zvolme jej za počátek komplexní roviny a měřítko zvolme tak, že kružnice opsaná trojúhelníku ABC je jednotková kružnice. Bodům M a N pak odpovídají komplexní čísla

$$m = \frac{1}{2}(b + c), \qquad n = \frac{1}{2}(a + c).$$

Ortocentrum V trojúhelníku ABC a těžiště T trojúhelníku AMN jsou jak známo obrazy komplexních čísel

$$v = a + b + c, \qquad t = \frac{1}{3}(a + m + n) = \frac{1}{6}(3a + b + 2c).$$

Podle zadání platí $V = T$, a tedy

$$3a + b + 2c = 6a + 6b + 6c, \quad \text{neboli} \quad 3a + 5b + 4c = 0.$$

Označme úhly při vrcholech A, B, C trojúhelníku ABC postupně α, β, γ (viz obr.). Podle věty o obvodových a středových úhlech mají úhly mezi vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ velikosti

$$|\sphericalangle AOB| = 2\gamma, \qquad |\sphericalangle BOC| = 2\alpha, \qquad |\sphericalangle AOC| = 2\beta.$$

[12] [bech–02], str. 21, úloha 3.

Protože O je střed kružnice opsané, platí $|OA| = |OB| = |OC|$ (neboli $|a| = |b| = |c|$). Vektor $\overrightarrow{OC}$ tedy dostaneme otočením vektoru $\overrightarrow{OA}$ o úhel 2β v záporném směru, platí tedy

$$c = a(\cos 2\beta - \mathrm{i}\sin 2\beta)$$

a tudíž podíl $\frac{c}{a}$ je komplexní jednotka tvaru

$$\frac{c}{a} = \cos 2\beta - \mathrm{i}\sin 2\beta\,.$$

Podobně vektor $\overrightarrow{OB}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{OA}$ kolem počátku o úhel 2γ v kladném směru a vektor $\overrightarrow{OB}$ je otočením vektoru $\overrightarrow{OC}$ kolem počátku o úhel 2α v záporném směru, proto platí

$$\frac{b}{a} = \cos 2\gamma + \mathrm{i}\sin 2\gamma\,, \qquad \frac{b}{c} = \cos 2\alpha - \mathrm{i}\sin 2\alpha\,.$$

Pokud tedy najdeme podíly čísel a, b, c, zjistíme i hledané úhly α, β, γ. Vyjdeme z odvozeného vztahu mezi komplexními čísly a, b, c:

$$3a + 5b + 4c = 0\,, \quad \text{odtud také} \quad 3\overline{a} + 5\overline{b} + 4\overline{c} = 0\,.$$

Vzhledem k tomu, že $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$, můžeme druhou rovnici zapsat jako

$$\frac{3}{a} + \frac{5}{b} + \frac{4}{c} = 0 \quad \text{neboli} \quad 3bc + 5ac + 4ab = 0\,.$$

Z první rovnice máme $b = -\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}c$, po dosazení do upravené druhé rovnice dostaneme

$$3c\left(-\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}c\right) + 5ac + 4a\left(-\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}c\right) = 0\,,$$

odtud po vynásobení 5 a roznásobení plyne

$$-12c^2 - 9ac + 25ac - 16ac - 12a^2 = 0\,, \quad \text{neboli} \quad c^2 + a^2 = 0\,,$$

a tedy

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = -1\,, \quad \text{odtud} \quad \frac{c}{a} = \cos 2\beta - \mathrm{i}\sin 2\beta = \pm\mathrm{i}\,.$$

Vybereme-li jednu ze dvou možných hodnot β (viz níže), další úhel γ pak najdeme tak, že rovnici $3a + 5b + 4c = 0$ vydělíme číslem a a pak dosadíme za $\frac{c}{a}$:

$$3 + 5\frac{b}{a} + 4\frac{c}{a} = 0\,, \quad \text{odtud} \quad \frac{b}{a} = \cos 2\gamma + \mathrm{i}\sin 2\gamma = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{c}{a}\,.$$

Zbývající úhel α nakonec určíme ze vztahu $\alpha = \pi - \beta - \gamma$. Úhly α, β, γ leží v intervalu $(0, \pi)$, a tedy $2\alpha, 2\beta, 2\gamma \in (0, 2\pi)$.

Je-li $\frac{c}{a} = -\mathrm{i}$, pak $2\beta = \frac{\pi}{2}$, odtud $\beta = \frac{\pi}{4}$. Po dosazení pak obdržíme

$$\frac{b}{a} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} = \cos 2\gamma + \mathrm{i}\sin 2\gamma\,, \quad \text{odtud}$$

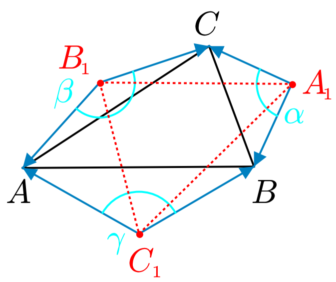
$$2\gamma = \pi - \mathrm{arctg}\frac{4}{3}\,, \quad \text{neboli} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4}{3} (\doteq 63^\circ)\,,$$

Pro úhel α tak máme $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4}{3} (\doteq 72^\circ)$.

V případě $\frac{c}{a} = \mathrm{i}$ je $2\beta = \frac{3\pi}{2}$, neboli $\beta = \frac{3\pi}{4}$. Protože těžiště T trojúhelníku AMN, které leží uvnitř tohoto trojúhelníku, tedy i uvnitř trojúhelníku ABC, má splývat s ortocentrem trojúhelníku ABC, musí být trojúhelník ABC ostroúhlý (ortocentrum tupoúhlého trojúhelníku leží mimo tento trojúhelník). Proto $\beta = \frac{3\pi}{4}$ není možné.

Vnitřní úhly trojúhelníku ABC jsou $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4}{3}$. □

Úloha 4.13: *Vně nad stranami libovolného trojúhelníku ABC sestrojíme rovnoramenné trojúhelníky CBA_1, ACB_1, BAC_1 s úhly při hlavních vrcholech A_1, B_1, C_1 po řadě α, β, γ. Dokažte, že pokud $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, pak tvar trojúhelníku $A_1B_1C_1$ nezávisí na tvaru původního trojúhelníku ABC a jeho vnitřní úhly mají velikost $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$.*[13]



Řešení:
Ze zadání plyne, že vektory $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{B_1C}$ a $\overrightarrow{C_1A}$ jsou otočením vektorů $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{B_1A}$ a $\overrightarrow{C_1B}$ o úhly α, β a γ v kladném směru. Pro odpovídající komplexní čísla proto platí

$$\begin{aligned} b - a_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(c - a_1)\,, & &\text{odtud} & b &= a_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(c - a_1)\,,\\ c - b_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(a - b_1)\,, & &\text{odtud} & c &= b_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(a - b_1)\,,\\ a - c_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}(b - c_1)\,, & &\text{odtud} & a &= c_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}(b - c_1)\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do třetí rovnosti za b z první rovnosti a následně za c z druhé rovnosti (geometrický význam tohoto postupu je, že nejprve otočíme bod A kolem bodu B_1 o úhel β a dostaneme bod C, ten následně otočíme kolem bodu A_1 o úhel α a dostaneme bod B, který pak otočíme kolem bodu C_1 o úhel γ a dostaneme opět bod A), dostaneme

$$a = c_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}c_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\left(a_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(c - a_1)\right) = c_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}c_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\left(a_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(b_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(a - b_1) - a_1\right)\right) =$$

$$= c_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}c_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}a_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}a_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}b_1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta+\gamma)}b_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta+\gamma)}a\,.$$

[13] [yag–75], str. 38, úloha 22b, řešení vlastní. Jedná se o zobecnění úlohy 3.9 o Napoleonově trojúhelníku, kterou dostaneme volbou $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}$.

Podle zadání je $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, takže díky $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$ z poslední rovnosti získáme následující vztah mezi čísly a_1, b_1, c_1, který rovnou ekvivalentně upravíme

$$
\begin{aligned}
c_1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}c_1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}a_1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}a_1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}b_1-b_1=0 \quad &\Leftrightarrow\\
(c_1-b_1)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}(a_1-c_1)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}(b_1-a_1)=0 \quad &\Leftrightarrow\\
(b_1-a_1)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}-1)+(c_1-a_1)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma})=0 \quad &\Leftrightarrow\\
\frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}-1}\,. &
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Argument podílu $\frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}$ udává úhel při vrcholu A_1 v trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Vidíme přitom, že toto komplexní číslo je nezávislé na volbě trojúhelníku ABC. Abychom ověřili, že zmíněný úhel při vrcholu A_1 má velikost $\frac{\alpha}{2}$, ukážeme, že číslo

$$\frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}$$

je reálné a kladné. Platí

$$\frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}-1}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2}}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\gamma}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2}}}=$$

$$=\frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{2\mathrm{i}\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\,,$$

kde v poslední úpravě jsme využili rovnost $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\pi$. Získaný zlomek je skutečně kladný, neboť oba úhly $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ jsou z intervalu $(0,\frac{\pi}{2})$. Analogicky se dokážou tvrzení o úhlech $\frac{\beta}{2}$ a $\frac{\gamma}{2}$ při vrcholech B_1 a C_1. Dodejme ještě, že z provedeného výpočtu a jeho dvou analogií plyne úměra

$$|b_1-a_1|:|c_1-a_1|:|c_1-b_1|=\sin\frac{\gamma}{2}:\ \sin\frac{\beta}{2}:\ \sin\frac{\alpha}{2}\,,$$

která je vyjádřením sinové věty v trojúhelníku $A_1B_1C_1$. □

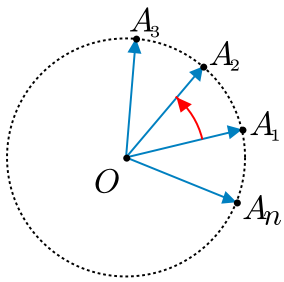
Kapitola 5

Pravidelné mnohoúhelníky

V této kapitole budeme řešit užitím komplexních čísel 13 úloh o pravidelných mnohoúhelnících. Motivace k zařazení tohoto námětu do práce o rovinných otočeních je skutečnost, že pokud bod O je středem pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$, pak v cyklické skupině vektorů

$$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_1}$$

je každý následující vektor výsledkem otočení předchozího vektoru o úhel rovný jedné n-tině plného úhlu 2π.



Zvolíme-li střed O za počátek komplexní roviny a zavedeme-li komplexní jednotku

$$\omega = \omega_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\,, \tag{5.1}$$

pak pro komplexní čísla a_k odpovídající vrcholům A_k bude v důsledku zmíněného otočení platit

$$a_2 = \omega a_1\,, \quad a_3 = \omega a_2\,, \quad \dots \quad a_n = \omega a_{n-1}\,, \quad a_1 = \omega a_n\,.$$

Vybereme-li navíc osy a měřítko komplexní roviny tak, aby platilo $a_1 = 1$, budou mít čísla a_k vyjádření

$$a_k = \omega^{k-1} = \cos\frac{2\pi(k-1)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi(k-1)}{n}\,, \quad (k = 1, \dots, n)\,. \tag{5.2}$$

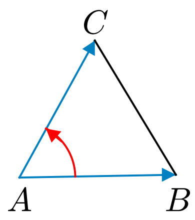
Jak je dobře známo, čísla $a_1, \dots, a_n$ jsou všechny (komplexní) hodnoty n-té odmocniny z čísla 1, tedy kořeny dvojčlenu $z^n - 1$, jehož rozklad na kořenové činitele má proto tvar

$$z^n - 1 = (z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_n)\,. \tag{5.3}$$

Ve všech řešených příkladech budeme předpokládat, že zkoumaný pravidelný mnohoúhelník má v komplexní rovině popsané umístění, takže jeho vrcholům A_k odpovídají komplexní jednotky a_k dané vzorci (5.2).

Úloha 5.1: *Dokažte, že pro komplexní čísla a, b, c odpovídající vrcholům libovolného rovnostranného trojúhelníku ABC v Gaussově rovině platí*[1]

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0\,.$$



Řešení:
Protože podle zadání je trojúhelník ABC rovnostranný, vrchol C dostaneme otočením vrcholu B kolem vrcholu A o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru. Jinak řečeno, vektor $\overrightarrow{AC}$ dostaneme zmíněným otočením vektoru $\overrightarrow{AB}$ (viz obr.). V komplexní rovině odpovídá tomuto otočení vynásobení odpovídajícího komplexního čísla $b - a$ komplexní jednotkou $\varepsilon = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, odtud

$$c - a = \varepsilon(b - a)\,.$$

Odtud pro číslo c užitím vlastností čísla ε dostáváme

$$c = a + \varepsilon b - \varepsilon a = (1 - \varepsilon)a + \varepsilon b = -\varepsilon^2 a + \varepsilon b\,.$$

Dosazením do výrazu $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ tak obdržíme

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = a^2+b^2+(\varepsilon^4a^2-2\varepsilon^3ab+\varepsilon^2b^2)-ab-(-\varepsilon^2ab+\varepsilon b^2)-(-\varepsilon^2a^2+\varepsilon ab) =$$

$$= a^2 + b^2 - \varepsilon a^2 + 2ab + \varepsilon b^2 - b^2 - ab + \varepsilon ab - ab - \varepsilon b^2 + \varepsilon a^2 - a^2 - \varepsilon ab = 0\,.$$

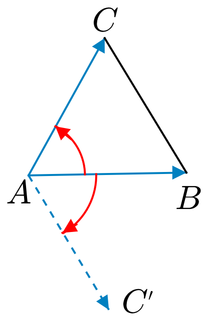
Tím je důkaz hotov. □

Úloha 5.2: *Dokažte, že tři navzájem různé body A, B, C tvoří rovnostranný trojúhelník právě tehdy, když pro komplexní čísla odpovídající těmto bodům platí*[2]

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0\,. \tag{5.4}$$

---

[1] [eng–97], str. 300, úloha 28.
[2] Analogie úlohy z [eng–97], str. 300, úloha 28, kde jde pouze o jednu implikaci.



Řešení:
Mnohočlen $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ z rovnosti (5.4) ze zadání úlohy dostaneme, když ve vzorci

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

položíme $x = c - a$ a $y = b - a$:

$$(c - a)^3 + (b - a)^3 = (c + b - 2a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\,. \tag{5.5}$$

Nyní řešení úlohy rozdělíme na dvě části. Nejprve předpokládejme, že $c + b - 2a \neq 0$. Pak je rovnost (5.4) ze zadání úlohy ekvivalentní s rovností

$$(c - a)^3 + (b - a)^3 = 0$$

(využili jsme přitom (5.5)). To je ovšem ekvivalentní s rovností

$$c - a = w(b - a)\,,$$

kde $w = \sqrt[3]{-1}$ (jde o jednu ze tří třetích odmocnin z -1), tj. w je jedno ze tří čísel ε, ε^3, ε^5. Poslední rovnost je tedy ekvivalentní s

$$c - a = \varepsilon(b - a)\,, \quad \text{nebo} \quad c - a = \varepsilon^3(b - a)\,, \quad \text{nebo} \quad c - a = \varepsilon^5(b - a)\,.$$

Užitím vlastností čísla ε dostáváme, že první z těchto rovností je ekvivalentní s tím, že ABC je rovnostranný trojúhelník popsaný v kladném směru, druhá rovnost ekvivalentní s $c - a = -(b - a)$ odporuje podmínce $c + b - 2a \neq 0$ a třetí rovnost je ekvivalentní s tím, že ABC je rovnostranný trojúhelník popsaný v záporném směru.

Nyní předpokládejme, že $c + b - 2a = 0$, neboli $a = \frac{1}{2}(b + c)$ (bod A je střed úsečky BC). Dosadíme-li do rovnosti (5.4) ze zadání úlohy $a = \frac{1}{2}(b + c)$, dostaneme

$$\frac{1}{4}(b^2 + 2bc + c^2) + b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(b + c)b - bc - \frac{1}{2}(b + c)c = 0\,,$$

$$\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}bc - bc - \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}c^2 = 0\,,$$

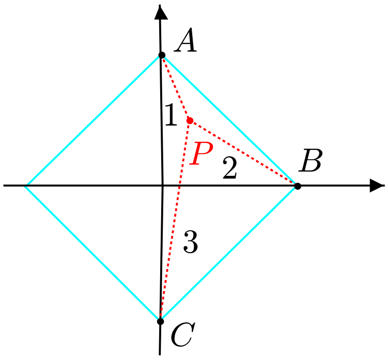
$$\frac{3}{4}b^2 - \frac{3}{2}bc + \frac{3}{4}c^2 = 0\,,$$

$$(b-c)^2 = 0\,, \qquad \text{neboli} \qquad b = c\,.$$

Protože $a = \frac{1}{2}(b+c)$, je rovnost (5.4) v tomto případě ekvivalentní s rovností $b = c = a$, což odporuje podmínce v zadání úlohy, že A, B, C jsou tři navzájem různé body.

Dohromady tak dostáváme, že rovnost (5.4) je ekvivalentní s tím, že body A, B, C tvoří rovnostranný trojúhelník (popsaný v kladném nebo záporném směru). □

Úloha 5.3: *Rozhodněte, zda uvnitř čtverce $ABCD$ může existovat bod P tak, že $|PA| = 1$, $|PB| = 2$, $|PC| = 3$. V kladném případě určete, jakou délku může mít strana takového čtverce.*[3]



Řešení:
Úlohu budeme řešit v Gaussově rovině, ve které vrcholům A, B, C čtverce odpovídají po řadě komplexní čísla $\mathrm{i}l$, l, $-\mathrm{i}l$, kde $l \in \mathbf{R}^+$, jak je to znázorněno na obrázku, a bodu P odpovídá komplexní číslo p. Strana čtverce pak má délku $a = \sqrt{2}l$. Z podmínky ze zadání $|PA| = 1$, $|PB| = 2$, $|PC| = 3$ pro odpovídající komplexní čísla plyne

$$|p - \mathrm{i}l| = 1\,, \qquad |p - l| = 2\,, \qquad |p + \mathrm{i}l| = 3\,. \tag{5.6}$$

Využitím rovnosti $|z|^2 = z\overline{z}$ pro libovolné $z \in \mathbf{C}$ dostaneme z předchozích tří rovnic po úpravě vztahy

$$p\overline{p} + \mathrm{i}l(p - \overline{p}) = 1 - l^2\,, \qquad p\overline{p} - l(p + \overline{p}) = 4 - l^2\,, \qquad p\overline{p} - \mathrm{i}l(p - \overline{p}) = 9 - l^2\,. \tag{5.7}$$

Sečtením první a třetí rovnice (po vydělení dvěma) dostaneme $p\overline{p} = 5 - l^2$, po dosazení do první a druhé rovnice pak obdržíme

$$5 - l^2 + \mathrm{i}l(p - \overline{p}) = 1 - l^2\,, \qquad \text{respektive} \qquad 5 - l^2 - l(p + \overline{p}) = 4 - l^2\,,$$

což po úpravě vede na

$$p - \overline{p} = \frac{4\mathrm{i}}{l}\,, \qquad p + \overline{p} = \frac{1}{l}\,.$$

[3] [neg–05], str. 14, úloha 25.

Sečtením obou rovnic dostaneme

$$p = \frac{1}{2l} + \frac{2\mathrm{i}}{l} = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2} + 2\mathrm{i}\right),$$

odtud pak

$$|p|^2 = p\overline{p} = \frac{1}{l^2}\left|\frac{1}{2} + 2\mathrm{i}\right|^2 = \frac{17}{4l^2}.$$

Dosazením do rovnice $p\overline{p} = 5 - l^2$ máme

$$5 - l^2 = \frac{17}{4l^2}, \tag{5.8}$$

neboli

$$4l^4 - 20l^2 + 17 = 0, \qquad \text{a odtud} \qquad 2l^2 = a^2 = 5 \pm 2\sqrt{2}, \qquad \text{neboli} \qquad a = \sqrt{5 \pm 2\sqrt{2}}.$$

Bod P leží uvnitř čtverce, a proto je úhel $\sphericalangle APC$ tupý, takže

$$|AC|^2 = 4l^2 > 3^2 + 1^2 = 10, \qquad \text{neboli} \qquad a = l\sqrt{2} > \sqrt{5},$$

čili možná hodnota délky strany a musí být

$$a = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

Z vyjádření $p = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2} + 2\mathrm{i}\right)$ plyne nejenom $p\overline{p} = \frac{17}{4l^2}$, ale také $p - \overline{p} = \frac{4}{l}\mathrm{i}$ a $p + \overline{p} = \frac{1}{l}$, takže vztahy (5.7) mají tvar

$$\frac{17}{4l^2} - 4 = 1 - l^2, \qquad \frac{17}{4l^2} - 1 = 4 - l^2, \qquad \frac{17}{4l^2} + 4 = 9 - l^2$$

a vedou na rovnici (5.8), které nalezené l vyhovuje. Proto platí nejen vztahy (5.7), ale i s nimi ekvivalentní rovnosti (5.6).

Zbývá vysvětlit, proč bod P, jemuž odpovídá komplexní číslo $p = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2} + 2\mathrm{i}\right)$ leží uvnitř nalezeného čtverce $ABCD$. Bod $P = [u, v]$ leží v prvním kvadrantu pod přímkou AB o rovnici $x + y = l$, když jeho kladné kartézské souřadnice $u = \frac{1}{2l}$ a $v = \frac{2}{l}$ splňují nerovnost $u + v < l$, tedy nerovnost

$$\frac{1}{2l} + \frac{2}{l} < l \qquad \text{neboli} \qquad 5 < 2l^2,$$

což jsme však již dříve zajistili výběrem kladného znaménka pod odmocninou ve vyjádření

$$a = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

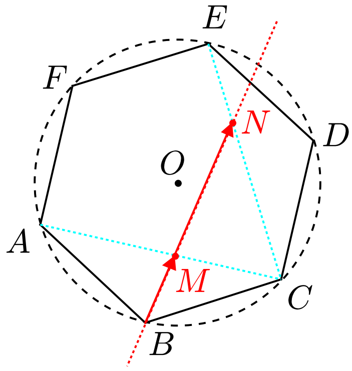
Jediná možná délka strany čtverce $ABCD$ je tedy dána posledním vzorcem a bod P požadovaných vlastností uvnitř takového čtverce skutečně existuje. □

Úloha 5.4: *Nechť $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník, v němž jsou body M, N zvoleny po řadě na úhlopříčkách AC, CE tak, že platí*

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = p.$$

Najděte hodnotu podílu p v případě, že jsou body M, N, B kolineární.[4]

[4] [kwo–01], str. 17, úloha 6, řešení vlastní.



Řešení:
Z podmínek v zadání plynou vektorové rovnosti

$$\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AC}\,, \qquad \overrightarrow{CN} = p\overrightarrow{CE}\,, \tag{5.9}$$

kde p je hledané reálné číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
Umístěme šestiúhelník v komplexní rovině tak, aby vrcholům odpovídaly komplexní čísla s vyjádřením (5.2), přičemž v případě šestiúhelníku $\omega = \varepsilon = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ a tedy

$$a = 1\,, \quad b = \varepsilon\,, \quad c = \varepsilon^2 = (\varepsilon - 1)\,, \quad d = \varepsilon^3 = -1\,, \quad e = \varepsilon^4 = -\varepsilon\,, \quad f = \varepsilon^5 = (1 - \varepsilon)\,.$$

Užitím vektorových rovností (5.9) pro odpovídající komplexní čísla a po dosazení z předchozích vztahů dostáváme

$$m - a = p(c - a)\,, \quad \text{odtud} \quad m = 1 + p((\varepsilon - 1) - 1) = 1 + \varepsilon p - 2p\,,$$

$$n - c = p(e - c)\,, \quad \text{odtud} \quad n = (\varepsilon - 1) + p(-\varepsilon - (\varepsilon - 1)) = -1 + p - 2\varepsilon p\,.$$

Komplexní čísla odpovídající vektorům $\overrightarrow{BM}$ a $\overrightarrow{BN}$ proto mají tvar

$$\overrightarrow{BM}: \quad m - b = 1 - \varepsilon + \varepsilon p - 2p\,, \qquad \overrightarrow{BN}: \quad n - b = -1 + p - 2\varepsilon p\,.$$

Body M, N, B jsou kolineární právě tehdy, když vektor $\overrightarrow{BM}$ je reálným násobkem vektoru $\overrightarrow{BN}$. Jinak řečeno, existuje reálné číslo k takové, že $m - b = k(n - b)$. Tak dostaneme podmínku kolinearity bodů M, N, B vyjádřenou rovností

$$1 - \varepsilon + \varepsilon p - 2p = k(-1 + p - 2\varepsilon p)\,.$$

Dosazením za ε dostaneme rovnici s komplexními koeficienty o dvou reálných neznámých k a p

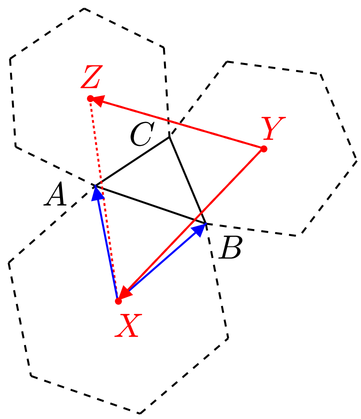
$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} + p\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - 2\right) = -k - \mathrm{i}\sqrt{3}kp\,.$$

Porovnáním reálných a ryze imaginárních částí dostáváme soustavu dvou rovnic

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p = k\,, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}p = -\sqrt{3}kp\,.$$

Dosadíme-li k z první rovnice do druhé, dostaneme po úpravě rovnici $3p^2 = 1$. Dohromady s podmínkou, že $p \in \langle 0, 1\rangle$, získáme výsledek $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

Úloha 5.5: *Nad každou stranou daného trojúhelníku ABC je vně sestrojen pravidelný n-úhelník. Najděte hodnotu čísla n, pro kterou středy takových tří n-úhelníků tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*[5]



Řešení:
Označme po řadě X, Y, Z středy zkoumaných pravidelných n-úhelníků po řadě nad stranami AB, BC, CA. V n-úhelníku sestrojeném nad stranou AB je vektor $\overrightarrow{XA}$ otočením vektoru $\overrightarrow{XB}$ o úhel $\frac{2\pi}{n}$ v kladném směru, takže pro odpovídající komplexní čísla platí

$$a - x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}(b - x)\,, \qquad \text{odtud} \qquad x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}b - a}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} - 1}\,,$$

analogicky pak pro čísla odpovídající bodům Y a Z dostáváme

$$y = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}c - b}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} - 1}\,, \qquad z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}a - c}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} - 1}\,.$$

Trojúhelník XYZ je rovnostranný právě tehdy, když vektor $\overrightarrow{YX}$ je výsledkem otočením vektoru $\overrightarrow{YZ}$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru, tomuto otočení v komplexní rovině odpovídá násobení komplexní jednotkou $\varepsilon = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Pro odpovídající komplexní čísla to znamená:

$$x - y = \varepsilon(z - y)\,, \qquad \text{neboli} \qquad x + (\varepsilon - 1)y - \varepsilon z = 0\,, \qquad \text{neboli} \qquad x + \varepsilon^2 y - \varepsilon z = 0\,.$$

Při poslední úpravě jsme využili rovnost $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ plynoucí z $\varepsilon^3 = -1$. Nyní dosadíme za x, y, z a podmínku s ohledem na $\varepsilon^3 = -1$ dále ekvivalentně upravíme

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}b - a) + \varepsilon^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}c - b) - \varepsilon(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}a - c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}(-\varepsilon a + b + \varepsilon^2 c) - a - \varepsilon^2 b + \varepsilon c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}(-\varepsilon a + b + \varepsilon^2 c) + \varepsilon^3 a - \varepsilon^2 b - \varepsilon^4 c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} - \varepsilon^2\right)(-\varepsilon a + b + \varepsilon^2 c) = 0\,.$$

[5] [bech–07], str. 171, úloha G.4.

Odtud již vidíme, že trojúhelník XYZ je rovnostranný právě tehdy, když $-\varepsilon a+b+\varepsilon^2 c=0$ nebo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}-\varepsilon^2=0$. Jak jsme výše ukázali, první podmínka $-\varepsilon a+b+\varepsilon^2 c=0$ je splněna, když trojúhelník ABC je rovnostranný (středy připsaných pravidelných n-úhelníků pak tvoří rovnostranný trojúhelník pro libovolné n), druhá podmínka $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}-\varepsilon^2=0$ je pak splněna, když $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$, tedy pro $n=3$. V druhé variantě (kdy výchozí trojúhelník ABC je jakýkoliv a $n=3$) se jedná o tzv. Napoleonův trojúhelník daného trojúhelníku ABC (viz úloha 3.9). □

Úloha 5.6: *Nechť $A_1A_2\dots A_n$ je pravidelný n-úhelník vepsaný do jednotkové kružnice. Dokažte, že*[6]

$$|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\cdot\dots\cdot|A_1A_n|=n\,.$$

Řešení:
Podle (5.2) při vhodném umístění v Gaussově rovině vrcholům A_k odpovídají komplexní čísla ω^{k-1}. Pak platí

$$|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\dots|A_1A_n|=|(1-\omega)(1-\omega^2)\dots(1-\omega^{n-1})|\,,$$

přitom pro každé komplexní číslo $z\neq 1$ máme

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\dots(z-\omega^{n-1})=\frac{1}{z-1}\cdot(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\dots(z-\omega^{n-1})=\frac{1}{z-1}\cdot(z^n-1)=$$
$$=z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1\,.$$

Ze spojitosti plyne, že odvozená rovnost obou krajních výrazů musí platit i pro $z=1$, z čehož dostaneme

$$|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\dots|A_1A_n|=|1^{n-1}+1^{n-2}+\dots+1|=n$$

a důkaz je hotov. □

Úloha 5.7: *Na kružnici opsané danému pravidelnému n-úhelníku $A_1\dots A_n$ je zvolen bod P. Dokažte, že součet $|PA_1|^2+\dots+|PA_n|^2$ je konstanta nezávislá na volbě bodu P.*[7]

Řešení:
Předpokládejme, že daný n-úhelník je umístěn v Gaussově rovině tak, že jeho vrcholům odpovídají komplexní čísla daná vztahy (5.2). Bod P na jednotkové kružnici je pak obrazem komplexního čísla p s vlastností $|p|=1$. Pro zkoumaný součet S ze zadání úlohy platí

$$S=\sum_{k=1}^{n}|PA_k|^2=\sum_{k=1}^{n}|p-a_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(p-a_k)(\overline{p}-\overline{a}_k)=\sum_{k=1}^{n}(p\overline{p}-a_k\overline{p}-p\overline{a}_k+a_k\overline{a}_k)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}p\overline{p}-(\sum_{k=1}^{n}a_k)\overline{a}-p\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k+\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{a}_k\,.$$

[6] [gel–07], str. 212, úloha 603.
[7] [lar–90], str. 394, úloha 8.4.2.

Přitom

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0\,,$$

neboť $\omega^n = 1$ a $\omega \neq 0$.[8] Stejně tak je i $\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k = 0$. S ohledem na $|p|^2 = 1$ a $|a_k|^2 = 1$ pro každé k tak dostáváme

$$S = \sum_{k=1}^{n} p\overline{p} + \sum_{k=1}^{n} a_k\overline{a}_k = \sum_{k=1}^{n} |p|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = n + n = 2n\,,$$

přičemž tato hodnota nezávisí na volbě bodu P, což jsme měli dokázat. □

Úloha 5.8: *Na jednotkové kružnici s vepsaným pravidelným n-úhelníkem $A_1A_2\ldots A_n$ je zvolen bod P. Dokažte, že $|PA_1|^4 + \cdots + |PA_n|^4$ je konstanta nezávislá na volbě bodu P.*[9]

Řešení:

Nechť vrcholům daného pravidelného n-úhelníku odpovídají komplexní čísla (5.2). Bod P na jednotkové kružnici je pak obrazem komplexního čísla p s vlastností $|p| = 1$. Pro zkoumaný součet S ze zadání úlohy platí

$$S = \sum_{k=1}^{n} |PA_k|^4 = \sum_{k=1}^{n} |p - a_k|^4 = \sum_{k=1}^{n} (p\overline{p} - a_k\overline{p} - p\overline{a}_k + a_k\overline{a}_k)^2\,,$$

a využijme toho, že $p\overline{p} = |p|^2 = 1$ a $a_k\overline{a}_k = |a_k|^2 = 1$ pro každé k:

$$S = \sum_{k=1}^{n} (2 - a_k\overline{p} - p\overline{a}_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (4 + a_k^2\overline{p}^2 + p^2\overline{a}_k^2 - 4a_k\overline{p} - 4p\overline{a}_k + 2a_k\overline{a}_k p\overline{p}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 4 + \overline{p}^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + p^2 \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k^2 - 4\overline{p} \sum_{k=1}^{n} a_k - 4p \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k + \sum_{k=1}^{n} 2\,.$$

Protože $a_1, \ldots, a_n$ jsou kořeny rovnice $z^n - 1 = 0$, platí podle Vietových vztahů rovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j = 0\,.$$

Odtud plyne, že také komplexně sdružené součty jsou nulové: $\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k = 0$ a $\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k^2 = 0$. Celkově pro náš součet dostaneme

$$S = 4n + 2n = 6n\,,$$

což je hodnota skutečně nezávislá na volbě bodu P. □

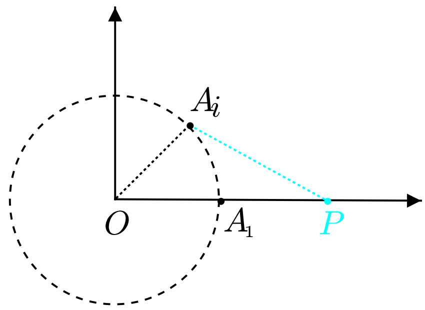
---

[8] Jinak lze rovnost $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ vysvětlit takto: Součet $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ je vektor, který splývá s vektorem, jenž je jeho otočením o úhel $\frac{2\pi}{n}$ (protože při tomto otočení přejde každý ze skupiny vektorů $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_1}$ ve vektor následující, jak jsme již uvedli výše). Jediný vektor s touto vlastností je vektor nulový.

[9] [lar–90], str. 397, úloha 8.4.6.

Úloha 5.9: *Nechť $A_1A_2\dots A_n$ je pravidelný n-úhelník vepsaný do kružnice s poloměrem r a středem O. Nechť P je libovolný bod na polopřímce OA_1 za bodem A_1. Dokažte, že*[10]

$$\prod_{k=1}^{n} |PA_k| = |OP|^n - r^n\,.$$



Řešení:
Uvažujme daný pravidelný n-úhelník v Gaussově rovině s počátkem v bodě O a za kladnou reálnou poloosu zvolme polopřímku OA_1. Pak komplexní čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ odpovídající vrcholům pravidelného n-úhelníku $A_1 \dots A_n$ jsou kořeny rovnice

$$z^n - r^n = 0\,,$$

přičemž $a_1 = r$, takže pro $k = 1, 2, \dots, n$ platí

$$a_k = r\left(\cos\frac{2\pi(k-1)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi(k-1)}{n}\right)$$

a podle věty o rozkladu polynomu na kořenové činitele pro každé $z \in \mathbf{C}$ máme rovnost

$$z^n - r^n = \prod_{k=1}^{n}(z - a_k)\,.$$

Protože bod P leží na kladné reálné poloose, odpovídá mu reálné číslo $p = |OP| > r$. Pak pro zkoumaný součin dostáváme

$$\prod_{k=1}^{n}|PA_k| = \prod_{k=1}^{n}|p - a_k| = |\prod_{k=1}^{n}(p - a_k)| = |p^n - r^n| = p^n - r^n = |OP|^n - r^n\,.$$

Tím je důkaz hotov. □

[10] [lar–90], str. 393, úloha 8.4.1.

Úloha 5.10: *Pomocí komplexních čísel vypočtěte délky stran a úhlopříček pravidelného pětiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice.*[11]

Řešení:

Vrcholy pravidelného pětiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice jsou obrazy kořenů $a_1, \dots, a_5$ rovnice $z^5 - 1 = 0$, přitom $a_1 = 1$ (viz (5.2)). Z rozkladu

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

plyne, že čísla a_2, a_3, a_4, a_5 jsou kořeny reciproké rovnice

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0\,,$$

kterou upravíme vydělením z^2 do tvaru

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0\,.$$

Užijeme substituce $w = z + \frac{1}{z}$, odtud $w^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$; pro w pak dostaneme kvadratickou rovnici

$$w^2 + w - 1 = 0\,, \quad \text{odtud} \quad w_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Délka strany pětiúhelníku je $|1 - a_2|$ a délka úhlopříčky $|a_2 - a_4| = |a_2 - \frac{1}{a_2}|$, stačí nám tedy najít pouze kořen a_2. Dosazením $w_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ do substituční rovnice $w = z + \frac{1}{z}$ dostaneme kvadratickou rovnici:

$$z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0\,, \quad \text{odtud} \quad a_{2,3} = \frac{-1 + \sqrt{5} + \pm\sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}\,,$$

a tedy

$$a_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\,.$$

Při označení délky strany d a délky úhlopříčky u dostaneme

$$d^2 = |a_2 - 1|^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\,, \quad \text{a tedy} \quad d = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}\,.$$

$$u^2 = \left|a_2 - \frac{1}{a_2}\right|^2 = \left|\mathrm{i}\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}\right|^2\,, \quad \text{a tedy} \quad u = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}\,,$$

což je hledaná délka strany a úhlopříčky. □

[11] Vlastní úloha.

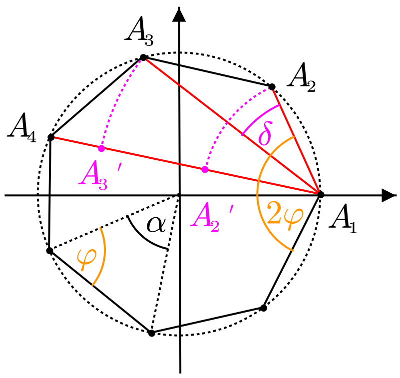
Úloha 5.11: *Nechť body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 v tomto pořadí rozdělují jednotkovou kružnici na pět stejných částí. Dokažte, že pro délky tětiv A_1A_2 a A_1A_3 platí $|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| = \sqrt{5}$.*[12]

Řešení:
S využitím výsledků předchozí úlohy, kde $|A_1A_2|$ je délka strany a $|A_1A_3|$ je délka úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5$, dostáváme:

$$|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} = \sqrt{5}\,. \quad \square$$

Úloha 5.12: *Nechť $A_1A_2 \ldots A_7$ je pravidelný sedmiúhelník. Dokažte, že*[13]

$$\frac{1}{|A_1A_2|} = \frac{1}{|A_1A_3|} + \frac{1}{|A_1A_4|}\,. \tag{5.10}$$



Řešení:
Sedmiúhelník umístíme v Gaussově rovině tak, aby vrcholům odpovídaly komplexní čísla dané rovnostmi (5.2). Označme $\alpha = |\sphericalangle A_iOA_{i+1}| = \frac{2\pi}{7}$. Dále označme $\varphi = |\sphericalangle OA_iA_{i+1}|$, pak zřejmě (pro součet úhlů v trojúhelníku OA_iA_{i+1}) platí $2\varphi + \alpha = \pi$, tedy $\varphi = \frac{5\pi}{14}$. Z obrázku je zřejmé, že $|\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}| = 2\varphi = \frac{5\pi}{7}$. Pro úhel $\delta = |\sphericalangle A_2A_1A_3|$ tedy platí $\delta = \frac{1}{5} \cdot 2\varphi = \frac{\pi}{7}$. Označme nyní komplexní jednotku

$$\mu = \cos\frac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\,,$$

pak zřejmě $\omega = \mu^2$, a tedy $a_2 = \omega = \mu^2\,, a_3 = \omega^2 = \mu^4\,, a_4 = \omega^3 = \mu^6$.

Výsledkem otočení vektoru $\overrightarrow{A_1A_3}$ o úhel δ je vektor $\overrightarrow{A_1A_3'}$, přitom bod A_3' je kolineární s body A_1 a A_4 a platí $|A_1A_3| = |A_1A_3'|$. Tomuto otočení odpovídá násobení komplexní jednotkou μ, odtud

$$a_3' - 1 = \mu(a_3 - 1)\,. \tag{5.11}$$

[12] [lar–90], str. 397, úloha 8.4.5.
[13] [rad–07], str. 3, úloha 1.

Analogicky výsledkem otočení vektoru $\overrightarrow{A_1A_2}$ o úhel 2δ je vektor $\overrightarrow{A_1A_2'}$, přitom bod A_2' je kolineární s body A_1 a A_4 a platí $|A_1A_2| = |A_1A_2'|$. Tomuto otočení odpovídá násobení komplexní jednotkou μ^2, odtud

$$a_1' - 1 = \mu^2(a_1 - 1)\,. \tag{5.12}$$

Rovnost (5.10) ze zadání úlohy je tedy ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{|A_1A_2'|} = \frac{1}{|A_1A_3'|} + \frac{1}{|A_1A_4|}\,,$$

což je ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{|a_2' - 1|} - \frac{1}{|a_3' - 1|} - \frac{1}{|a_4 - 1|} = 0\,.$$

Protože body A_2', A_3', A_4 jsou kolineární, je předchozí rovnost ekvivalentní s rovností

$$\left|\frac{1}{a_2' - 1} - \frac{1}{a_3' - 1} - \frac{1}{a_4 - 1}\right| = 0\,,$$

odtud, s využitím (5.11), (5.12) a následně toho, že $a_2 = \mu^2\,, a_3 = \mu^4\, a_4 = \mu^6$, dostáváme:

$$\frac{1}{\mu^2(a_2 - 1)} - \frac{1}{\mu(a_3 - 1)} - \frac{1}{(a_4 - 1)} = 0\,,$$

$$\frac{1}{\mu^2(\mu^2 - 1)} - \frac{1}{\mu(\mu^4 - 1)} - \frac{1}{(\mu^6 - 1)} = 0\,.$$

Po vykrácení $\mu^2 - 1 \neq 0$ a následném roznásobení a úpravách dostáváme

$$\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^3 + \mu} - \frac{1}{(\mu^4 + \mu^2 + 1)} = 0\,,$$

$$\mu^7 + \mu^5 + \mu^3 + \mu^5 + \mu^3 + \mu - \mu^6 - \mu^4 - \mu^2 - \mu^5 - \mu^3 = 0\,,$$

$$\mu^7 + \mu^5 + \mu^3 + \mu - \mu^6 - \mu^4 - \mu^2 = 0\,.$$

Protože $\mu^7 = -1$, je $\mu^8 = -\mu$, $\mu^{10} = -\mu^3$, $\mu^{12} = -\mu^5$, $\mu^{10} = -\mu^3$. S využitím těchto rovností dostáváme

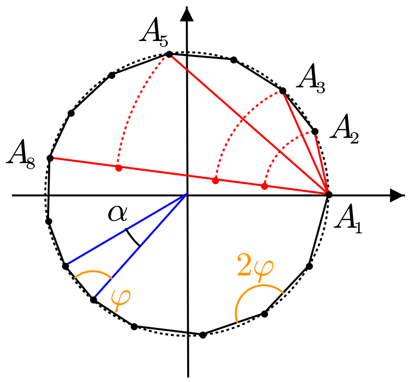
$$1 + \mu^2 + \mu^4 + \mu^6 + \mu^8 + \mu^{10} + \mu^{12} = 0\,,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0\,.$$

Protože $A_1 \ldots A_7$ je pravidelný sedmiúhelník se středem v počátku, je poslední rovnost splněna a důkaz je hotov. $\square$

Úloha 5.13: *Nechť $A_1A_2 \dots A_{15}$ je pravidelný patnáctiúhelník. Dokažte, že*[14]

$$\frac{1}{|A_1A_2|} = \frac{1}{|A_1A_3|} + \frac{1}{|A_1A_5|} + \frac{1}{|A_1A_8|}\,. \tag{5.13}$$



Řešení:
Patnáctiúhelník umístíme v Gaussově rovině tak, aby vrcholům odpovídaly komplexní čísla dané rovnostmi (5.2). Označme úhel $\alpha = |\sphericalangle A_iOA_{i+1}| = \frac{2\pi}{15}$. Dále označme úhel $\varphi = |\sphericalangle OA_iA_{i+1}|$, pak zřejmě (pro součet úhlů v trojúhelníku OA_iA_{i+1}) platí $2\varphi + \alpha = \pi$, tedy $\varphi = \frac{13\pi}{30}$. Z obrázku je zřejmé, že $|\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}| = 2\varphi = \frac{13\pi}{15}$. Pro úhel $\delta = |\sphericalangle A_2A_1A_3|$ tedy platí $\delta = \frac{1}{13} \cdot 2\varphi = \frac{\pi}{15}$. Označme nyní komplexní jednotku

$$\mu = \cos\frac{\pi}{15} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{15}\,.$$

Pak $a_2 = \omega = \mu^2\,, a_3 = \omega^2 = \mu^4\,, a_5 = \omega^4 = \mu^8\,, a_8 = \omega^7 = \mu^{14}$.

Výsledkem otočení vektoru $\overrightarrow{A_1A_5}$ o úhel 3δ je vektor $\overrightarrow{A_1A_5'}$, přitom bod A_5' je kolineární s body A_1 a A_8 a platí $|A_1A_5| = |A_1A_5'|$. Tomuto otočení odpovídá násobení komplexní jednotkou μ^3, odtud

$$a_5' - 1 = \mu^3(a_5 - 1)\,. \tag{5.14}$$

Analogicky výsledkem otočení vektorů $\overrightarrow{A_1A_3}$, resp. $\overrightarrow{A_1A_2}$ o úhel 5δ, resp. 6δ jsou vektory $\overrightarrow{A_1A_3'}$, resp. $\overrightarrow{A_1A_2'}$, přitom body A_3' a A_2' jsou kolineární s body A_1 a A_8 a platí $|A_1A_3| = |A_1A_3'|$, resp. $|A_1A_2| = |A_1A_2'|$. Tomuto otočení odpovídá násobení komplexní jednotkou μ^5, resp. μ^6, odtud

$$a_3' - 1 = \mu^5(a_3 - 1)\,, \qquad a_2' - 1 = \mu^6(a_2 - 1)\,. \tag{5.15}$$

Rovnost (5.13) ze zadání úlohy je tedy ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{|A_1A_2'|} = \frac{1}{|A_1A_3'|} + \frac{1}{|A_1A_5'|} + \frac{1}{|A_1A_8|}\,,$$

[14] [rad–07], str. 4, úloha 7.

což je ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{|a'_2-1|}-\frac{1}{|a'_3-1|}-\frac{1}{|a'_5-1|}-\frac{1}{|a_8-1|}=0\,.$$

Protože body A'_2, A'_3, A'_5, A_8 jsou kolineární, je předchozí rovnost ekvivalentní s rovností

$$\left|\frac{1}{a'_2-1}-\frac{1}{a'_3-1}-\frac{1}{a'_5-1}-\frac{1}{a_8-1}\right|=0\,,$$

odtud, s využitím (5.14), (5.15) a následně toho, že $a_2=\mu^2\,,a_3=\mu^4\,,a_5=\mu^8\,,a_8=\mu^{14}$, dostáváme:

$$\frac{1}{\mu^6(a_2-1)}-\frac{1}{\mu^5(a_3-1)}-\frac{1}{\mu^3(a_5-1)}-\frac{1}{(a_8-1)}=0\,,$$

$$\frac{1}{\mu^6(\mu^2-1)}-\frac{1}{\mu^5(\mu^4-1)}-\frac{1}{\mu^3(\mu^8-1)}-\frac{1}{(\mu^{14}-1)}=0\,.$$

Po roznásobení a úpravách dostáváme

$$\mu^5(\mu^4-1)\mu^3(\mu^8-1)(\mu^{14}-1)-\mu^6(\mu^2-1)\mu^3(\mu^8-1)(\mu^{14}-1)-\mu^6(\mu^2-1)\mu^5(\mu^4-1)(\mu^{14}-1)-$$
$$-\mu^6(\mu^2-1)\mu^5(\mu^4-1)\mu^3(\mu^8-1)=0\,,$$

$$\mu^8(\mu^{12}-\mu^4-\mu^8+1)(\mu^{14}-1)-\mu^9(\mu^{10}-\mu^2-\mu^8+1)(\mu^{14}-1)-\mu^{11}(\mu^6-\mu^2-\mu^4+1)(\mu^{14}-1)-$$
$$-\mu^{14}(\mu^6-\mu^2-\mu^4+1)(\mu^8-1)=0\,,$$

Po vykrácení $\mu^8\neq 0$ a dalších úpravách dostáváme

$$\mu^{26}-\mu^{18}-\mu^{22}+\mu^{14}-\mu^{12}+\mu^4+\mu^8-1-\mu(\mu^{24}-\mu^{16}-\mu^{22}+\mu^{14}-\mu^{10}+\mu^2+\mu^8-1)-$$
$$-\mu^3(\mu^{20}-\mu^{16}-\mu^{18}+\mu^{14}-\mu^6+\mu^2+\mu^4-1)-\mu^6(\mu^{14}-\mu^{10}-\mu^{12}+\mu^8-\mu^6+\mu^2+\mu^4-1)=0\,,$$
$$\mu^{26}-\mu^{18}-\mu^{22}+\mu^{14}-\mu^{12}+\mu^4+\mu^8-1-\mu^{25}+\mu^{17}+\mu^{23}-\mu^{15}+\mu^{11}-\mu^3-\mu^9+\mu)-$$
$$-\mu^{23}+\mu^{19}+\mu^{21}-\mu^{17}+\mu^9-\mu^5-\mu^7+\mu^3-\mu^{20}+\mu^{16}+\mu^{18}-\mu^{14}+\mu^{12}-\mu^8-\mu^{10}+\mu^6=0\,,$$
$$\mu^{26}-\mu^{25}-\mu^{22}+\mu^{21}-\mu^{20}+\mu^{19}+\mu^{16}-\mu^{15}+\mu^{11}-\mu^{10}-\mu^7+\mu^6-\mu^5+\mu^4+\mu-1=0\,,$$

Protože $\mu^{15}=-1$, dostáváme

$$-\mu^{11}+\mu^{10}+\mu^7-\mu^6+\mu^5-\mu^4-\mu+1+\mu^{11}-\mu^{10}-\mu^7+\mu^6-\mu^5+\mu^4+\mu-1=0\,,$$

$$0=0\,.$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

Závěr

Během přípravy rigorózní práce jsem musela vyhledat a zpracovat množství úloh z různých, někdy tuzemských, většinou však zahraničních zdrojů. Tím jsem si rozšířila vědomosti v oblasti komplexních čísel a vektorové algebry. Naučila jsem se účinně používat komplexních čísel při řešení geometrických úloh jako doplňkovou metodu k vektorové metodě (zpracované v mé dizertační práci), především tam, kde by vektorová metoda nebyla účinná nebo byla příliš zdlouhavá.

V této práci jsem se snažila ukázat, jak lze efektivně využívat geometrické interpretace komplexních čísel jakožto vektorů v rovině při řešení úloh na otáčení. Většina těchto řešení je výrazně jednodušších a úspornějších nežli řešení užitím metod syntetické geometrie. V zadání naprosté většiny uvedených geometrických úloh přitom není zmínka ani o vektorech, ani o komplexních číslech. Ta se tak stávají efektivní metodickým prostředkem geometrického výzkumu, doplňujícím vektorovou metodu. Žákům středních škol pak může tato práce účinně ukázat jedno ze zajímavých možností využití komplexních číslech, vyučovaných na středních školách.

U řady převzatých úloh bylo nutné upřesnit zadání a mnohdy doplnit nebo zcela přepracovat řešení. Některá zadání jsem zobecnila a některá řešení jsou zcela vlastní (odlišná od zdroje), na tyto přínosné prvky předložené práce upozorňuji v poznámkách pod čarou. Jsem si vědoma, že jsem nemohla projít veškeré zdroje k zadanému tématu, přesto však doufám, že předložená práce podává určitý systematický přehled úloh na zadané téma.

Věřím, že čtenáři práce, ať už současní učitelé matematiky nebo jejich budoucí kolegové, kteří se na své povolání teprve připravují, ocení četné ukázky využití komplexních čísel při otáčení v rovině, kterému je ve většině publikací věnována spíše jen stručná zmínka. Doufám, že z námětů této práce budou někteří čerpat inspiraci při přípravě vlastního vyučování či při práci s talentovanými žáky.

Literatura

[bud–71] Budinský, B.; Šmakal, S. *Vektory v geometrii;* Mladá Fronta: Praha, 1971.

[cal–10] Calda, E. *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla;* Prometheus: Praha, 2010, 4.vyd.

[eng–97] Engel, E. *Problem Solving Strategies;* Springer Verlag: New York, 1997.

[gel–07] Gelca, R.; Andreescu, T. *Putnam and Beyond;* Springer Science + Business Media: LLC New York, 2007.

[hon–01] Honsberger, R. *Mathematical Chestnuts from Around the World;* The Mathematical Association of America: USA, 2001.

[lar–90] Larson, L. C. *Metódy riešenia matematických problémov;* Alpha: Bratislava, 1990.

[rab–96] Ráb, M. *Komplexní čísla v elementární matematice;* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta: Brno, 1996.

[rad–07] Radovanovic, M. *Complex Numbers in Geometry;* http://www.imomath.com

[tab–02] Tabov, J. B.; Taylor, P. J. *Methods of Problem Solving;* Australian Mathematics Trust: Australia, 2002.

[yag–75] Yaglom, I. M. *Geometric transformations I.;* The Mathematical Association of America: USA, 1975.

Sbírky úloh

[bech–95] Becheanu, M.; Enescu, B. *Romanian Mathematical Competitions 1995;* GIL Publishing House: Zalau, 1995.

[bech–02] Becheanu, M. et al. *Romanian Mathematical Competitions 2002;* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation: Bucaresti, 2002.

[bech–04] Becheanu, M.; Gologan, R. *Romanian Mathematical Competitions 2004;* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation: Bucaresti, 2004.

[bech–07] Becheanu, M.; Enescu, B. *Balkan Mathematical Olympiads 1984–2006;* GIL Publishing House: Zalau, 2007.

[kwo–01] Ka-Keug Kwok; Tat-Wing Leung. *International Mathematical Olympiad: Preliminary Selection Contest (1998 - 2002);* Hong Kong Mathematical Society International Mathematical Olympiad: Hong Kong, 2001;

[neg–05] Negut, A. *Problems For the Mathematical Olympiads: From the first Team Selection Test to the IMO;* GIL Publishing House: Zalau, 2005.

[ol–99] *16th Iranian Mathematical Olympiad 1998-99.*

Články a příspěvky ve sbornících

[beč–88] Bečvář, J. *Teorie algeber.* In *Filozofické a vývojové problémy matematiky;* JČMF: Praha, 1988.

[švr–00] Švrček, J. *Čtverce a trojúhelníky připsané stranám trojúhelníku (I.část).* In *Makos 2000: Sborník materiálů z podzimní školy péče o talenty Jánské Lázně 4.-7. října 2000;* JČMF: Olomouc, 2000.

[švr–01] Švrček, J. *Čtverce a trojúhelníky připsané stranám trojúhelníku (II.část).* In *Makos 2001: Sborník příspěvků z mezinárodního workshopu Sloup v Čechách 10.-13. 10. 2001;* Univerzita J. E. Purkyně: Ústí nad Labem, 2001.