EXEMPLES

DU

CALCUL LITTÉRAL

ET

DE L'ALGÈBRE

Cet ouvrage se trouve

à Paris:

à la Librairie de Bachelier (Successeur de M^me^ V^ve^ Courcier), Quai des Augustins, Nr. 55.

chez Heideloff et Campé, Libraires, Rue Vivienne, Nr. 16.

chez F. G. Levrault, Libraire, Rue de La Harpe, Nr. 81.

chez J. Albert Mercklein, Libraire, Rue des beaux Arts, Nr. 11, Faubourg St. Germain.

à Londres:

chez Black, Young et Young, Libraires de la cour, 2, Tavistock Street.

chez Treuttel et Würtz, et Richter, Libraires, 30, Soho Square.

à St. Pétersbourg:

chez Guill. Graeff, Libraire.

EXEMPLES,

FORMULES ET PROBLÈMES

DU

CALCUL LITTÉRAL

ET

DE L'ALGÈBRE.

PAR

MEIER HIRSCH,

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE, À BERLIN.

TRADUITS DE L'ALLEMAND SUR LA QUATRIÈME ÉDITION.

BERLIN, 1832.

CHEZ DUNCKER ET HUMBLOT.

PRÉFACE.

L'Auteur du recueil dont on donne ici la traduction, l'a destiné principalement à faciliter aux maîtres qui enseignent les éléments de l'algèbre, les moyens d'occuper leurs élèves de manière que tout en mettant en pratique ce qu'ils ont appris, ils s'affermissent toujours plus dans la théorie. C'est dans ce but que l'Auteur a rangé la grande quantité d'exemples et de problèmes qu'il a en partie empruntés, en partie composés et calculés lui-même, en paragraphes qui se suivent dans l'ordre qu'on a coutume d'observer en enseignant la théorie. Quant à l'arrangement des exemples il a eu égard à leur liaison et dépendance respective et aux difficultés qui arrêtent ordinairement les commençants. Enfin, il a ajouté les résultats sans indiquer nulle part la manière dont on y parvient. Seulement dans le dernier

§ intitulé *problèmes divers*, qui est destiné à une récapitulation générale, il a choisi à dessein une autre disposition.

Les nombreuses éditions de cet ouvrage et une traduction anglaise qui en a été faite à Londres, prouvent que non seulement en Allemagne, mais encore en Angleterre, on a reconnu le prix de ce recueil qui se distingue éminemment des autres ouvrages du même genre, en ce qu'il est beaucoup plus complet, et que le choix des exemples est fait avec plus de soin. C'est pourquoi on a cru faire une entreprise également utile pour le maître et l'élève, en publiant cette traduction française, qui n'est qu'une copie fidèle de l'original. Le seul changement qu'on ait jugé nécessaire et qui sera sans doute approuvé du public, consiste en ce qu'on a supprimé le § qui contient les éléments de l'analyse combinatoire, et enfin, qu'on a converti les poids, monnaies et mesures allemandes en poids, monnaies et mesures françaises.

TABLE DES MATIÈRES.

SECTION PREMIÈRE.

SECTION DEUXIÈME.

SECTION TROISIÈME.

SECTION PREMIÈRE,

CONTENANT

DES EXEMPLES POUR LES DIVERS PROCÉDÉS DU CALCUL.

I. *Fractions décimales.*

Qu'est-ce qu'une fraction décimale? Quel changement éprouve-t-elle lorsque la virgule est avancée ou reculée de quelques chiffres? — Comment peut-on convertir une fraction ordinaire en une fraction décimale? Comment se fait l'addition, la soustraction, la multiplication, la division des fractions décimales? — Qu'est-ce qu'on appelle une fraction décimale *périodique?* Quand une fraction ordinaire est convertie en une fraction décimale, combien de chiffres peut contenir tout au plus une période? — Quand il est permis de négliger dans les produits et quotiens les dernières décimales, on peut se servir de la multiplication et de la division abrégées. — En quoi consistent leurs avantages, et par quels moyens les obtient-on?

1) Addition.

1) 0,857
0,678
1,535

2) 1,007
2,346
3,353

3) 0,00076
13,795
13,79576

4) 12,0134
196,785
7,00006
215,79846

5) 0,90058
7,634
3,007956
11,542536

6) 7,345
8,26
37,534
19,0005
10,94
103,729
186,8085

7) 7,6
138,05934
15,4
10,76
0,3592176
1365,7
37,6483
0,005
1575,5318576

8) 19,3576
17,2340
7652,007
0,5
39,069534
7,83
5,69784
2,350006
7744,04598

9) 113,67849
76,859
9,7
5
152,6043
7,85976
9,437
8,65
7,94
391,72855

---

2) Soustraction.

1) 0,947
0,195
0,752

2) 9,567
3,078
6,489

3) 213,5734
87,6572
125,9162

4) $$\begin{array}{r} 54{,}763 \\ 0{,}921 \\ \hline 53{,}842 \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 73{,}5673 \\ 12{,}889 \\ \hline 60{,}6783 \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 385{,}76943 \\ 72{,}57 \\ \hline 313{,}19943 \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r} 27{,}003 \\ 7{,}6854 \\ \hline 19{,}3176 \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} 129{,}57 \\ 6{,}894356 \\ \hline 122{,}675644 \end{array}$$

9) $$\begin{array}{r} 0{,}975 \\ 0{,}483764 \\ \hline 0{,}491236 \end{array}$$

10) $$\begin{array}{r} 23{,}005 \\ 4{,}76943 \\ \hline 18{,}23557 \end{array}$$

11) $$\begin{array}{r} 96{,}5 \\ 0{,}000783 \\ \hline 96{,}499217 \end{array}$$

12) $$\begin{array}{r} 0{,}5 \\ 0{,}0003 \\ \hline 0{,}4997 \end{array}$$

---

3) Multiplication.

1) $3{,}57 \times 6 = 21{,}42$
2) $5{,}798 \times 18 = 104{,}364$
3) $0{,}5 \times 36000 = 18000$
4) $0{,}00563 \times 17 = 0{,}09571$
5) $0{,}0000054 \times 3785 = 0{,}020439$
6) $3{,}7 \times 2{,}6 = 9{,}62$
7) $5{,}78 \times 3{,}4 = 19{,}652$
8) $3{,}9765 \times 4{,}378 = 17{,}409117$
9) $32{,}76859 \times 13{,}0076 = 426{,}240711284$
10) $138{,}5 \times 7{,}695708 = 1065{,}855558$
11) $0{,}43 \times 0{,}65 = 0{,}2795$
12) $0{,}576 \times 0{,}3854 = 0{,}2219904$
13) $0{,}005 \times 0{,}017 = 0{,}000085$
14) $0{,}007853 \times 0{,}00476 = 0{,}00003738028$
15) $113{,}5 \times 0{,}072 = 8{,}172$
16) $0{,}372106 \times 0{,}0054 = 0{,}0020093724$

17) 0,137 × 0,00056 = 0,00007672

18) 0,376 × 0,0076894 = 0,0028912144

Multiplication abrégée.

```
1)      7,65340958
     ×     2,56307
    ──────────────
        1530681916
         382670479
          45920457
           2296022
             53573
    ──────────────
       19,61622447
```

```
2)       0,7653478
     ×      0,3576
    ──────────────
          22960434
           3826739
            535742
             45920
    ──────────────
        0,27368835
```

```
3)      8,56794323
     ×   0,5284765
    ──────────────
        4283971615
         171358864
          68543545
           3427177
            599755
             51407
              4283
    ──────────────
       4,527956646
```

```
4)    37,346859416
     ×  0,007003458
    ────────────────
       261428015912
          112040578
           14938743
            1867342
             298774
    ────────────────
     0,261557161349
```

```
5)        0,076934210834
     ×  0,000003057026
    ──────────────────────
              230802632502
               3846710541
                538539475
                  1538684
                   461605
    ──────────────────────
    0,000000235189882807
```

```
6)      15,7356783
     ×    2,564725
    ──────────────
         314713566
          78678391
           9441406
            629426
            141620
              3147
               786
    ──────────────
        40,3608342
```

4) Division.

1) 5,64 : 2 = 2,82
2) 7,5832 : 8 = 0,9479
3) 0,357642 : 6 = 0,059607
4) 0,32769414 : 18 = 0,01820523
5) 0,01765125 : 375 = 0,00004707
6) 75 : 16 = 4,6875
7) 731 : 8 = 91,375
8) 3,54 : 7 = 0,50571428.... (Période 571428)
9) 8,2356 : 17 = 0,484447.... (Pér. 4705882352941176)
10) 273,694 : 543 = 0,50404051...
11) 6938,57 : 276 = 25,13974637....
12) 0,000215 : 316 = 0,0000006803797...
13) 400 : 0,25 = 1600
14) 378 : 0,01 = 37800
15) 5640 : 0,0015 = 3760000
16) 183260 : 0,476 = 385000
17) 1 : 0,24 = 4,16666...
18) 2,53944 : 7,2 = 0,3527
19) 0,02382245 : 0,37 = 0,064385
20) 1114,869145005 : 0,385 = 2895,764013
21) 56,4 : 0,00015 = 376000
22) 10287,36 : 0,0036 = 2857600
23) 0,0001 : 0,02 = 0,005
24) 145,817 : 0,0563 = 2590
25) 374 : 2,4 = 155,833333...
26) 15,713 : 18,13 = 0,86668505...
27) 137,51634 : 27,65 = 4,97346618...
28) 0,5 : 76,91342 = 0,00650081...
29) 0,046 : 0,00762089 = 6,0360404...
30) 1 : 3,2561047 = 0,30711543...
31) 38076 : 137 = 277,92700729...

Division abrégée.

1)

```
            |3,716048
    7,632035|2,053804 ···
    7,432096|
     199939
     185802
      14137
      11148
       2989
       2972
         17
         14
          3
```

2)

```
             |15,314865
    2,0000000|0,13059209···
    1,5314865|
      4685135
      4594459
        90676
        76574
        14102
        13782
          320
          306
           14
           13
            1
```

3)

```
             |0,3547808
    10,926954|30,79917 ···
    10,643424|
       283530
       248346
        35184
        31930
         3254
         3192
           62
           35
           27
           24
            3
```

4)

```
              |0,0035843297
    3,00000000|836,97659 ···
    2,86746376|
      13253624
      10752989
       2500635
       2150597
        350038
        322588
         27450
         25090
          2360
          2150
           210
           179
            31
            31
```

5) Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales.

1) $\frac{1}{2} = 0{,}5$

2) $\frac{3}{4} = 0{,}75$

3) $\frac{13}{16} = 0{,}8125$

4) $\frac{17}{20} = 0{,}85$

5) $\frac{3}{40} = 0{,}075$

6) $\frac{17}{125} = 0{,}136$

7) $\frac{7}{800} = 0{,}00875$

8) $\frac{372}{1250} = 0{,}2976$

9) $\frac{11}{16000} = 0{,}0006875$

10) $\frac{15}{1280} = 0{,}01171875$

11) $\frac{347}{25600} = 0{,}0135546875$

12) $\frac{1}{10000} = 0{,}0001$

13) $\frac{3476}{15625} = 0{,}222464$

14) $\frac{1}{2048000} = 0{,}00000048828125$

15) $\frac{2}{3} = 0{,}666666\cdots$

16) $\frac{3}{7} = 0{,}4285714\cdots$ (Période 428571)

17) $\frac{15}{17} = 0{,}88235\cdots$ (Période 8823529411764705)

18) $\frac{3}{35} = 0{,}0857142857\cdots$ (Période 857142)

19) $\frac{17}{19} = 0{,}894736842105263157\cdots$

20) $\frac{19}{1365} = 0{,}0139194139\cdots$

21) $\frac{706}{5907} = 0{,}1195192144\cdots$

22) $\frac{1}{679} = 0{,}0014727540\cdots$

23) $\frac{1}{8076934} = 0{,}0000001238\cdots$

24) $\frac{13}{569437} = 0{,}0000228295\cdots$

25) $\frac{130}{2769135} = 0{,}0000469460\cdots$

26) $\frac{17}{30000} = 0{,}00056666\cdots$

27) $\frac{47}{71000000} = 0{,}0000006619\cdots$

---

1) Quelle partie de l'année est un jour; l'année étant supposée de 365 jours 6 heures?
Rép. 0,0027378507....

2) Mais quelle partie sera-ce si l'année est composée, comme elle l'est en effet, de 365,2422453 jours? Rép.: 0,0027379034....

3) On divise en Allemagne la circonférence d'un cercle en 360 parties, nommées degrés; le degré en 60 minutes; la minute en 60 secondes; mais en France on la divise, aujourd'hui, en 400 degrés et on exprime les sousdivisions en décimales: combien donc un des degrés, une des minutes, et une des secondes allemands, contiennent-ils de degrés, de minutes et de secondes français? Rép.: si l'on désigne les degrés, minutes et secondes par $^{\circ}$ $'$ $''$, on a $1^{\circ} = 1^{\circ},111111$.. français; $1' = 0^{\circ},018518$.. françaises; $1'' = 0^{\circ},000308$.. françaises.

4) Combien $57^{\circ},9467$, divisés à la manière française, font-ils en degrés, minutes et secondes allemands? Rép.: $52^{\circ}\ 9'\ 7'',308$....

5) Combien $43^{\circ}\ 6'\ 20''$ degrés, d'après la division allemande, font-ils en degrés français? Rép.: $47^{\circ},895$...

6) Quelle est la quatrième proportionnelle des trois nombres 0,45; 0,8; 0,367? Rép.: 0,652444...

7) Un pouce cube de l'or le plus pur pèse environ 19,64 fois autant qu'un pouce cube d'eau distillée; un pouce cube de cuivre du Japon ne pèse qu'environ 9 fois autant; quelle sera la grosseur d'un

morceau de cuivre du Japon, pour qu'il ait le poids des $\frac{3}{4}$ d'un pouce cube de l'or mentionné? Rép.: 1,6366··· pouces cubes.

II. *Calcul littéral.*

Les progrès des mathématiques dans les derniers siècles, le nombre et la complication des propositions qui en ont résulté, d'un côté; et de l'autre, les bornes de notre esprit, nous ont fait de bonne heure un besoin de signes convenables pour rendre nos conceptions; d'un langage de signes plus court, plus expressif et plus précis que le langage ordinaire. Comment l'algèbre atteint-elle ce but? Quels signes emploie-t-elle pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division? Qu'est-ce que c'est qu'un agrégat de quantités? Que signifient les parenthèses et les crochets? Où en fait-on usage? Si on les supprimait, en résulterait-il des erreurs? Qu'est-ce que les coefficiens?

Qu'est-ce qu'on appelle une quantité positive et négative?

---

1) Addition.

a) Addition de quantités monomes.

1) $\begin{array}{r} a \\ a \\ \hline 2a \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 7a \\ 5a \\ \hline 12a \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 8f \\ f \\ \hline 9f \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} a \\ b \\ \hline a+b \end{array}$

5) $$\begin{array}{r} 7a \\ 10x \\ \hline 7a+10x \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} a \\ -a \\ \hline 0 \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r} 17a \\ -6a \\ \hline 11a \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} 5a \\ -9a \\ \hline -4a \end{array}$$

9) $$\begin{array}{r} -6a \\ 10a \\ \hline 4a \end{array}$$

10) $$\begin{array}{r} -3a \\ 2a \\ \hline -a \end{array}$$

11) $$\begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline a-b \end{array}$$

12) $$\begin{array}{r} 8a \\ -5b \\ \hline 8a-5b \end{array}$$

13) $$\begin{array}{r} -7a \\ b \\ \hline -7a+b \end{array}$$
ou $b-7a$

14) $$\begin{array}{r} -a \\ -a \\ \hline -2a \end{array}$$

15) $$\begin{array}{r} -3a \\ -8a \\ \hline -11a \end{array}$$

16) $$\begin{array}{r} -8a \\ -3b \\ \hline -8a-3b \end{array}$$
ou $-(8a+3b)$

17) $$\begin{array}{r} 3a \\ -5a \\ 8a \\ \hline 6a \end{array}$$

18) $$\begin{array}{r} -12b \\ -\ 4b \\ 13b \\ \hline -\ 3b \end{array}$$

19) $$\begin{array}{r} -6f \\ 9f \\ 13f \\ -\ 8f \\ \hline 8f \end{array}$$

20) $$\begin{array}{r} -7c \\ -5c \\ -3c \\ \hline -15c \end{array}$$

21) $$\begin{array}{r} 5d \\ 7d \\ d \\ -8d \\ \hline 5d \end{array}$$

22) $$\begin{array}{r} 8e \\ -4e \\ 7e \\ -11e \\ \hline 0 \end{array}$$

23) $$\begin{array}{r} 3g \\ 2h \\ -5g \\ 7h \\ -10g \\ \hline -12g+9h \end{array}$$
ou $9h-12g$

24) $$\begin{array}{r} 3a \\ -5a \\ 7a \\ 2b \\ -c \\ 4b \\ \hline 5a+6b-c \end{array}$$

b) Addition de quantités complexes.

1) $$\begin{array}{r} 7a-5c+3b \\ 2a-3c-7b \\ \hline 9a-8c-4b \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 5a+\ \ 4b-3c-\ \ 7d+8 \\ 3a-12b+7c-10d-4 \\ \hline 8a-\ \ 8b+4c-17d+4 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 12h-3c-7f+3g \\ -3h+8c-2f-9g+5x \\ \hline 9h+5c-9f-6g+5x \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} 16a-\ 5b+10c-\ \ 9d \\ 3a+18b-\ 5c-\ \ 7d+3e \\ -7a-\ 2b\qquad\ -\ \ 3d+5e-9h \\ 11a-\ 3b+\ 2c+\ \ 8d\qquad\ +7h \\ \hline 23a+\ 8b+\ 7c-11d+8e-2h \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 7x-6y+5z+3-g \\ -x-3y-8-g \\ -x+y-3z-1+7g \\ -2x+3y+3z-1-g \\ x+8y-5z+9+g \\ \hline 4x+3y+2+5g \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 8a+b \\ 2a-b+c \\ -3a+5b+2d \\ -6b-3c+3d \\ -5a+7c-2d \\ \hline 2a-b+5c+3d \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r} -a+3b-c-115d+6e-5f \\ 3a-2b-3c-d+27e \\ 5b-8c+3e-7f \\ -7a-6b+17c+9d-5e+11f \\ -3a-5c-2d+6e-9f+g \\ \hline -8a-109d+37e-10f+g \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} -7f+3a \\ 4f-2a \\ 3f-3a \\ +2a \\ \hline 0 \end{array}$$

Le maître fera bien de remplacer les lettres par des nombres déterminés, pour faire voir à son écolier l'exactitude des résultats. Cette méthode est surtout applicable dans les commencemens.

---

2) Soustraction.

a) Soustraction de quantités monomes.

1) $\begin{array}{r} a \\ a \\ \hline 0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 7a \\ 3a \\ \hline 4a \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 10f \\ 10f \\ \hline 0 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 5d \\ 11d \\ \hline -6d \end{array}$

5) $\begin{array}{r} 7a \\ 5b \\ \hline 7a-5b \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} a \\ -a \\ \hline 2a \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 8a \\ -a \\ \hline 9a \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 6a \\ -5a \\ \hline 11a \end{array}$

9) $\begin{array}{r} a \\ -4a \\ \hline 5a \end{array}$ 10) $\begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline a+b \end{array}$ 11) $\begin{array}{r} 3a \\ -2b \\ \hline 3a+2b \end{array}$ 12) $\begin{array}{r} -9a \\ 3a \\ \hline -12a \end{array}$

13) $\begin{array}{r} -7a \\ -7a \\ \hline 0 \end{array}$ 14) $\begin{array}{r} -19a \\ -20a \\ \hline a \end{array}$ 15) $\begin{array}{r} -6a \\ -5a \\ \hline -a \end{array}$ 16) $\begin{array}{r} -3a \\ -5b \\ \hline -3a+5b \end{array}$

ou $5b-3a$

17) $\begin{array}{r} -13 \\ 3 \\ \hline -16 \end{array}$ 18) $\begin{array}{r} -8 \\ -17 \\ \hline 9 \end{array}$ 19) $\begin{array}{r} 12 \\ -7 \\ \hline 19 \end{array}$ 20) $\begin{array}{r} -13 \\ -8 \\ \hline -5 \end{array}$

b) Soustraction de quantités complexes.

1) $\begin{array}{l} 3a-2b+6 \\ 2a-7b-3 \\ \hline a+5b+9 \end{array}$

2) $\begin{array}{l} 13a-2b+9c-3d \\ 8a-6b+9c-10d+12 \\ \hline 5a+4b+7d-12 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} -7f+3m-8x \\ -6f-5m-2x+3d+8 \\ \hline -f+8m-6x-3d-8 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} 2a-e-h-l \\ 9a-3e+4h-l-c \\ \hline -7a+2e-5h+c \end{array}$

5) $\begin{array}{l} -a-5b+7c-d \\ 4b-3c+2d+3k \\ \hline -a-9b+10c-3d-3k \end{array}$

6) $\begin{array}{l} 3h-2k \\ 9l-7-8k \\ \hline 3h-9l+6k+7 \end{array}$

7) $\begin{array}{l} -3a+b-8c+7e-5f+3h-7x-13y \\ k+2a-9c+8e+7f-7x-y-3l-k \\ \hline -5a+b+c-e-12f+3h-12y+3l \end{array}$

8) $\begin{array}{l} 5b-3a+203c+5 \\ -2b-8a+67c+7 \\ \hline 7b+5a+136c-2 \end{array}$

9) $\begin{array}{l} -14b+3c-27d+3-5g \\ 7a-5c-8d+3b-12+7g \\ \hline -7a-17b+8c-19d+15-12g \end{array}$

10) $\begin{array}{l} 6a+5-3b-5f-g-h \\ -2a-9b+8g-9h+7f-8 \\ \hline 8a+6b+13-12f-9g+8h \end{array}$

11) $\begin{array}{l} 3c-2l+5c \\ 8l+7c-4l \\ \hline c-6l \end{array}$

12) $\begin{array}{l} 3a-17b-10b+13a-2a \\ 6b-8a-b-2a+3d+9a-5h \\ \hline 15a-32b-3d+5h \end{array}$

13) $\begin{array}{l} 5c+3 \\ 2c-9-7c \\ \hline 10c+12 \end{array}$

14) $\begin{array}{l} 8a-5b-3c-7d+5e-8f+3g+17k \\ -2k+3c-5b+2d-4e-7f+9g-5k-l \\ \hline 8a-6c-9d+9e-f-6g+24k+l \end{array}$

15) $32a+3b-(5a+17b)=27a-14b$

16) $13a-(5c+3f-7a-5x+3a)=17a-5c-3f+5x$

17) $-8a+5b-3c-(7a-3b-2c)=-15a+8b-c$

18) $3a-5c+3d-(7a-5d+8c-2e)=8d+2e-4a-13c$

19) $37a-5f-(3a-2b-5c)-(6a-4b+3h)$
$=28a+6b-5f+5c-3h$

20) $a+b-(2a-3b)-(5a+7b)-(-13a+2b)=7a-5b$

21) $\frac{1}{2}a-\frac{5}{6}x-(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}x)-(3b+\frac{11}{4}x-\frac{2}{3}a)$
$=\frac{5}{12}a-\frac{37}{12}x-3b=\dfrac{5a}{12}-\dfrac{37x}{12}-3b$

---

3) Multiplication.

a) Multiplication de quantités monomes.

1) $a\times b=b\times a=ab=ba=a\cdot b=b\cdot a$

2) $a\times b\times c=abc=acb=bac=bca=cab=cba$

3) $-a\times b=-ab$

4) $a\times -b=-ab$

5) $-a\times -b=ab$

6) $6a\times 7b=42ab$

7) $17a\times\frac{3}{4}b=\frac{51}{4}ab=\dfrac{51ab}{4}$

8) $\dfrac{3a}{2}\times\dfrac{5f}{4}=\dfrac{15af}{8}=\frac{15}{8}af$

9) $-3a\times 14c=-42ac$

10) $7a\times -10b=-70ab$

11) $\frac{3}{8}a\times -\frac{2}{3}b=-\frac{1}{4}ab=-\dfrac{ab}{4}$

12) $a\times -7b=-7ab$

13) $-6a\times -11x=66ax$

14) $-\dfrac{5a}{4}\times -\dfrac{3b}{7}=\dfrac{15ab}{28}$

15) $ab\times cde=abcde$
16) $-5abc\times-7ade=35aabcde$
17) $-5bd\times 9bbdxy=-45bbbddxy$
18) $-\frac{1}{2}abd\times\frac{1}{4}cdef=-\frac{1}{8}abcddef$
19) $17ace\times 5=85ace$
20) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
21) $-\frac{3fh}{5cde}\times ag=-\frac{3afgh}{5cde}$
22) $\frac{1}{fgh}\times 4cd=\frac{4cd}{fgh}$
23) $\frac{5ac}{bde}\times-\frac{7bfg}{3ad}=-\frac{35cfg}{3dde}$
24) $-\frac{h}{2fg}\times-\frac{g}{3h}=\frac{1}{6f}$
25) $3ab\times 2cd\times dfg=6abcddfg$
26) $-\frac{a}{b}\times b\times-5df=5adf$
27) $-4ab\times-\frac{3cde}{2aab}\times-\frac{1}{5cf}=-\frac{6de}{5af}$
28) $-a\times-a\times-a\times-a=aaaa$
29) $\frac{2ac}{bg}\times-\frac{3bd}{4cfh}\times hf=-\frac{3ad}{2g}$
30) $\frac{1}{a}\times-\frac{3ac}{x}\times\frac{c}{x}=\frac{3cc}{xx}$
31) $\frac{2fg}{bdh}\times\frac{3xy}{7fz}\times-\frac{bc}{5d}=-\frac{6cgxy}{35ddhz}$

b) **Multiplication de quantités complexes.**

1) $(6a+3b-5f)\times 5g=30ag+15bg-25fg$
2) $(-2b+3c-g)\times-8h=16bh-24ch+8gh$
3) $(7ad-15bc-16acf)\times 10ab=70aabd-150abbc$
$-160aabcf$

4) $\left(\frac{5a}{b}-\frac{13c}{2d}-\frac{6h}{5bg}+7d\right)\times\frac{3a}{5d}=\frac{3aa}{bd}-\frac{39ac}{10dd}$
$-\frac{18ah}{25bdg}+\frac{21a}{5}$

5) $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$

6) $(a+b-c)(d-e)=ad+bd-cd-ae-be+ce$

7) $(2a-3b-8c-d+9e)\times(7f+2g-h)=14af$
$-21bf-56cf-7df+63ef+4ag-6bg-16cg$
$-2dg+18eg-2ah+3bh+8ch+dh-9eh$

8) $(7l-2m-9)\times(3l-11m)=21ll-83lm-27l$
$+22mm+99m$

9) $(2a+5b+3c-5e)\times(3a+10b+15f)=6aa$
$+35ab+9ac-15ae+50bb+30bc-50be$
$+30af+75bf+45cf-75ef$

10) $(a+b)\times(a-b)=aa-bb$

11) $(a+b)\times(a+b)=aa+2ab+bb$

12) $(a-b)\times(a-b)=aa-2ab+bb$

13) $(3a+5b-\frac{7}{2}c)\times(a-2b+9c)=3aa-ab+\frac{47}{2}ac$
$-10bb+52bc-\frac{63}{2}cc$

14) $(3c-5d+\frac{3}{4}g-\frac{5}{3}h)\times(\frac{2}{3}c-d+7g+\frac{1}{2}h)=2cc$
$-\frac{19}{3}cd+\frac{43}{2}cg+\frac{7}{18}ch+5dd-\frac{143}{4}dg-\frac{5}{6}dh+\frac{21}{4}gg$
$-\frac{271}{24}gh-\frac{5}{6}hb$

15) $(5ab+3ac-4bc)\times(7ab-18ac+2bc+d)$
$=35aabb-69aabc-18abbc+5abd-54aacc$
$+78abcc+3acd-8bbcc-4bcd$

16) $(13bcd+20bce-10bde)\times(4bc+3bd-12e)$
$=52bbccd+80bbcce+20bbcde+39bbcdd$
$-30bbdde-156bcde-240bcee+120bdee$

17) $(5aa-3ab+7bb)\times(3a-b)=15aaa-14aab$
$+24abb-7bbb$

18) $(a+b+c)\times(a+b-c)=aa+2ab+bb-cc$

19) $(3aaa + 35aab - 17abb - 13bbb) \times (3aa + 26ab - 57bb) = 9aaaaa + 183aaaab + 688aaabb - 2476aabbb + 631abbbb + 741bbbbb$

20) $(3a - b + 2c - 3d + 5e) \times (17a - 2b + 12c) = 51aa - 23ab + 70ac - 51ad + 85ae + 2bb - 16bc + 6bd - 10be + 24cc - 36cd + 60ce$

21) $(a + b + c + d) \times (a - b - c - d) = aa - bb - 2bc - 2bd - cc - 2cd - dd$

22) $(-2a + 3b - cc) \times (-3f - 7a + cc) = 6af - 9bf + 3ccf + 14aa - 21ab + 5acc + 3bcc - cccc$

23) $(\frac{3}{2}m - 5n - \frac{1}{3}pp) \times (\frac{1}{4}m - 2n + 6pp) = \frac{3}{8}mm - \frac{17}{4}mn + \frac{107}{12}mpp + 10nn - \frac{88}{3}npp - 2pppp$

24) $\left(\frac{5ff}{g} - \frac{7fg}{4h} + 3f\right) \times \left(\frac{7g}{f} + \frac{2f}{g}\right) = 35f - \frac{49gg}{4h} + 21g + \frac{10fff}{gg} - \frac{7ff}{2h} + \frac{6ff}{g}$

25) $\left(\frac{aa}{xx} - \frac{ab}{2xy} + \frac{bb}{yy}\right) \times \left(\frac{3aa}{xx} - \frac{2ab}{5xy} + \frac{bb}{yy}\right) = \frac{3aaaa}{xxxx} - \frac{19aaab}{10xxxy} + \frac{21aabb}{5xxyy} - \frac{9abbb}{10xyyy} + \frac{bbbb}{yyyy}$

---

4) Division.

a) Division de quantités monomes.

1) $a : b = \frac{a}{b}$

2) $-a : b = -\frac{a}{b}$

3) $a : -b = -\frac{a}{b}$

4) $-a : -b = \frac{a}{b}$

5) $5a : 3b = \frac{5a}{3b}$

6) $-16a : 8b = -\frac{2a}{b}$

7) $12a : -4b = -\frac{3a}{b}$

8) $-14a : -4b = \frac{7a}{2b}$

9) $abc : a = bc$ 10) $abc : ad = \frac{bc}{d}$

11) $8fmn : -2fgm = -\frac{4n}{g}$

12) $-12abcde : -8acd = \frac{3be}{2}$

13) $6abde : -2bf = -\frac{3ade}{f}$

14) $27aaabbcfg : -18abcghk = -\frac{3aabf}{2hk}$

15) $35abfgm : 5aabffgmn = \frac{7}{afn}$

16) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

17) $\frac{3afx}{bc} : \frac{2fxx}{5cde} = \frac{15ade}{2bx}$

18) $3fm : -\frac{3am}{5bg} = -\frac{5bfg}{a}$

19) $\frac{2ay}{5bcx} : 3ac = \frac{2y}{15bccx}$

20) $\frac{1}{7fggl} : \frac{1}{4fln} = \frac{4n}{7gg}$

21) $\frac{3}{4}ac : \frac{5}{6}abd = \frac{9c}{10bd}$

b) **Division de quantités complexes.**

1) $\left(3ac - 2ade - f + \frac{c}{d}\right) : 2a = \frac{3c}{2} - de - \frac{f}{2a} + \frac{c}{2ad}$

2) $(18acf - 6bdef - 2ad) : 3adf = \frac{6c}{d} - \frac{2be}{a} - \frac{2}{3f}$

3) $(8aa - 6ab + 4c + 1) : -2a = -4a + 3b - \frac{2c}{a} - \frac{1}{2a}$

4) $(12acfg - 4affg + 3fggh) : 4aabbfg = \frac{3c}{abb} - \frac{f}{abb} + \frac{3gh}{4aabb}$

5) $\left(\frac{a}{b}+\frac{fd}{2c}-3ac+7\right):\frac{3c}{d}=\frac{ad}{3bc}+\frac{fdd}{6cc}-ad+\frac{7d}{3c}$

6) $(ab - ac) : (b - c) = a$

7) $(ac - bc + ad - bd) : (a - b) = c + d$

8) $(4aa + 6ab - 4ax + 9bx - 15xx) : (2a + 3x) = 2a + 3b - 5x$

9) $(14af - 21bf + 7cf + 6ag - 9bg + 3cg) : (7f + 3g) = 2a - 3b + c$

10) $(4xxx + 4xx - 29x + 21) : (2x - 3) = 2xx + 5x - 7$

11) $(\frac{3}{2}xxx - \frac{5}{4}xx - 8x + 9) : (\frac{1}{2}x - 1) = 3xx + \frac{7}{2}x - 9$

12) $(aa + ab + 2ac - 2bb + 7bc - 3cc) : (a + 2b - c) = a - b + 3c$

13) $(12aa + 26ab - 36ac + 18ad - 10bb + 29bc - 6bd - 21cc + 9cd) : (6a - 2b + 3c) = 2a + 5b - 7c + 3d$

14) $(119cc - 200cd + 408ce - 113cf - 39dd + 72de + 37df - 96ef + 20ff) : (17c + 3d - 4f) = 7c - 13d + 24e - 5f$

15) $\left(3aa - \frac{7ab}{2} - \frac{21ac}{4} - \frac{5bb}{2} + \frac{83bc}{8} - \frac{3cc}{2}\right) : \left(3a - 5b + \frac{3c}{4}\right) = a + \frac{b}{2} - 2c$

16) $\left(2ff - \frac{55fh}{12} + \frac{29fx}{9} + \frac{21hh}{8} - \frac{15hx}{4} + \frac{xx}{3}\right) : \left(\frac{2f}{3} - \frac{3h}{4} + x\right) = 3f - \frac{7h}{2} + \frac{x}{3}$

17) $(30aab - 6aac + 75abb - 15abc) : (15ab - 3ac) = 2a + 5b$

18) $(36aab - 63abb + 20bbb) : (12ab - 5bb) = 3a - 4b$

19) $(72xxxx - 78xxxy - 10xxyy + 17xyyy + 3yyyy) : (6xx - 4xy - yy) = 12xx - 5xy - 3yy$

20) $(\frac{1}{3}xxxx - \frac{11}{12}xxx + \frac{41}{8}xx - \frac{23}{4}x + 6) : (\frac{2}{3}xx - \frac{5}{6}x + 1) = \frac{1}{2}xx - \frac{3}{4}x + 6$

21) $\left(\frac{15aa}{2} - \frac{113ab}{6} + 9ac + 2bb - bc\right) : \left(\frac{5a}{4} - 3b + \frac{3c}{2}\right) = 6a - \frac{2b}{3}$

22) $\left(-\frac{5xx}{9} + \frac{11xy}{3} - \frac{10xz}{3} + \frac{15yy}{4} + 25yz\right) : (-\frac{2}{3}x + 5y) = \frac{5x}{6} + \frac{3y}{4} + 5z$

23) $(18aa + 33ab + 42ac - 12ad - 30bb + 124bc + 8bd - 16cc - 32cd) : (6a + 15b - 2c - 4d) = 3a - 2b + 8c$

24) $(108aa - 33ac - 9ad - 9ae - 24ab + 10bc + 2bd + 2be - 5cc - cd - ce) : (12a - 5c - d - e) = 9a - 2b + c$

25) $\left(\frac{5}{2}xy + \frac{85}{9}yy - \frac{223}{54}yz - \frac{10}{9}yu - \frac{3}{4}xz + \frac{7}{18}zz + \frac{uz}{3}\right) : (\frac{3}{2}x + \frac{17}{3}y - \frac{7}{9}z - \frac{2}{3}u) = \frac{5}{3}y - \frac{1}{2}z$

26) $(-75aabfxx + 65aacxy + 60abxyy - 65axz + 180abfxxy - 156acxyy - 144bxyyy + 156xyz) : (15abfx - 12byy - 13acy + 13z) = -5ax + 12xy$

27) $\left(\frac{aa}{bc} - \frac{2a}{d} + \frac{ac}{be} + \frac{bc}{dd} - \frac{cc}{de}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{c} - \frac{b}{d} + \frac{c}{e}$

28) $\left(\frac{5aax}{b} - \frac{5aby}{c} + 5ad - ax + \frac{bby}{c} - bd\right) : \left(\frac{ax}{b} - \frac{by}{c} + d\right) = 5a - b$

29) $\left(\frac{aaxxx}{bd} + \frac{abxx}{ccd} - \frac{acxx}{dd} - \frac{bbx}{cdd} + \frac{aax}{bc} - \frac{a}{d}\right) : \left(\frac{ax}{c} - \frac{b}{d}\right) = \frac{acxx}{bd} + \frac{bx}{cd} + \frac{a}{b}$

30) $(aa - bb) : (a - b) = a + b$

31) $(aaaa - 9aabb - 6abcc - cccc) : (aa - 3ab - cc)$
$= aa + 3ab + cc$

32) $(aaaa - bbbb) : (a - b) = aaa + aab + abb$
$+ bbb$

33) $(32aaaaa + bbbbb) : (2a + b) = 16aaaa - 8aaab$
$+ 4aabb - 2abbb + bbbb$

34) $$\left(\frac{9aabb}{4cc} - \frac{25ffmm}{gg} + \frac{70dfm}{g} - 49dd\right)$$
$$: \left(\frac{3ab}{2c} + \frac{5fm}{g} - 7d\right) = \frac{3ab}{2c} - \frac{5fm}{g} + 7d$$

a) **Division partielle pour les cas où le dividende n'est pas un multiple du diviseur.**

1) $$1 : (1 - b) = 1 + \frac{b}{1 - b}$$
$$= 1 + b + \frac{bb}{1 - b}$$
$$= 1 + b + bb + \frac{bbb}{1 - b}$$
$$= 1 + b + bb + bbb + \frac{bbbb}{1 - b}$$
$$= 1 + b + bb + bbb + bbbb + \dots\dots$$

2) $$1 : (1 + b) = 1 - \frac{b}{1 + b}$$
$$= 1 - b + \frac{bb}{1 + b}$$
$$= 1 - b + bb - \frac{bbb}{1 + b}$$
$$= 1 - b + bb - bbb + \frac{bbbb}{1 + b}$$
$$= 1 - b + bb - bbb + bbbb - \dots\dots$$

$$3)\quad c:(a-b)=\frac{c}{a}+\frac{bc}{a(a-b)}$$
$$=\frac{c}{a}+\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{aa(a-b)}$$
$$=\frac{c}{a}+\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{aaa}+\frac{bbbc}{aaa(a-b)}$$
$$=\frac{c}{a}+\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{aaa}+\frac{bbbc}{aaaa}+\cdots$$

$$4)\quad c:(a+b)=\frac{c}{a}-\frac{bc}{a(a+b)}$$
$$=\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{aa(a+b)}$$
$$=\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{aaa}-\frac{bbbc}{aaa(a+b)}$$
$$=\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{aaa}-\frac{bbbc}{aaaa}+\cdots$$

$$5)\quad (1+x):(1-x)=1+\frac{2x}{1-x}$$
$$=1+2x+\frac{2xx}{1-x}$$
$$=1+2x+2xx+\frac{2xxx}{1-x}$$
$$=1+2x+2xx+2xxx+\cdots$$

III. *Calcul des puissances.*

Qu'est-ce qu'on appelle *puissance* dans le calcul? Qu'est-ce qui en est l'*exposant?* Quelle en est la *base?* — La quantité ou la valeur d'une puissance change-t-elle lorsque la base est mise à la place de l'exposant? — Comment s'opère la multiplication et la division de puissances à bases égales? Comment procède-t-on quand les bases sont différentes? — Si, dans une division, on rencontre des puissances avec l'exposant 0, ou même avec des exposans négatifs, qu'est-ce que signifient ces puissances? Les règles précédentes pour la multiplication et la division, sont-elles encore applicables à ces sortes de puissances? — L'exposant 1 peut être supprimé et réintroduit, s'il est nécessaire. — Peut-on effectuer l'addition et la soustraction indiquée sur les puissances, et quand? — Lorsque, dans une expression fractionnaire dont les deux termes sont des monomes, une puissance contenue dans le numérateur doit être transposée dans le dénominateur, et réciproquement, lorsqu'une puissance contenue dans le dénominateur doit être transposée dans le numérateur, quel changement doit s'opérer dans l'exposant de cette puissance?

---

1) Addition et Soustraction.

1) $ax^n + bx^n + cx^n + dx^n = (a+b+c+d)x^n$

2) $ax^n + bx^n - cx^n - dx^n = (a+b-c-d)x^n$

3) $10a^4 + 3a^4 + 6a^4 - a^4 - 5a^4 = 13a^4$

4) $3a^{-7} + 10a^{-7} - 5a^{-7} + a^2b = 8a^{-7} + a^2b$

5) $6^4 + 2\cdot8^3 + 3^2 - 19\cdot6^4 + 5\cdot8^3 = 7\cdot8^3 - 18\cdot6^4 + 3^2$

6) $16a^4b^3c^5 - 6a^4b^3c^5 + 7a^4b^3c^5 = 17a^4b^3c^5$

7) $\frac{5a^3}{b^4} - \frac{7a^3}{b^4} + \frac{11a^3}{b^4} + a^4 = \frac{9a^3}{b^4} + a^4$

8) $a^nb^m - 9a^m + 5a^nb^m + 6a^m + 10a^nb^m = 16a^nb^m - 3a^m$

9) $5a^{-3}b^2 + 7ab^2c - 3a^mb^{-5} - 12ab^2c + 6a^{-3}b^2$
$- 9a^3b^3 + b^{-x} - 8a^mb^{-5} - 3b^{-x} = 11a^{-3}b^2$
$- 5ab^2c - 11a^mb^{-5} - 9a^3b^3 - 2b^{-x}$

10) $3\cdot2^{-7} + 5^6 - 8\cdot2^{-7} + 3a^nb^{-m} - 13\cdot5^6 + 4a\cdot2^{-7}$
$+ ca^nb^{-m} = (4a-5)2^{-7} - 12\cdot5^6 + (c+3)a^nb^{-m}$

11) Pour l'add.
$$\left\{\begin{array}{l} 5a^4b + 3a^{-2}b^2c - 7ab \\ -6a^4b + 2a^{-2}b^2c + 17ab \\ 9a^4b - 8a^{-2}b^2c - 10ab \\ \hline 8a^4b - 3a^{-2}b^2c \end{array}\right.$$

12) Pour l'addition.
$$\left\{\begin{array}{l} 5a^mb^p + 3a^{-3}b^{m-1} - \dfrac{3a^3}{x^p} \\ -3ca^mb^p + 4g^2a^{-3}b^{m-1} - a + \dfrac{10a^3}{x^p} \\ a^mb^p + a + 3a^2b^2 - 2g^2a^{-3}b^{m-1} \\ \hline (6-3c)a^mb^p + (2g^2+3)a^{-3}b^{m-1} + \dfrac{7a^3}{x^p} + 3a^2b^2 \end{array}\right.$$

13) Pour l'addition.
$$\left\{\begin{array}{l} 9a^{-3}b^{-2}c^4 - \dfrac{7b}{a^3} \\ \dfrac{18b}{a^3} - 5a^nb^m + c^x - 3\cdot2^5 \\ 3a^nb^m - ha^{-3}b^{-2}c^4 + 3c^x - 5\cdot2^5 \\ \hline (9-h)\,a^{-3}b^{-2}c^4 - 2a^nb^m + \dfrac{11b}{a^3} + 4c^x - 8\cdot2^5 \end{array}\right.$$

14) Pour la soustract.
$$\left\{\begin{array}{l} 9a^mx^2 - 13 + 20ab^3x - 4b^mcx^2 \\ 3b^mcx^2 + 9a^mx^2 - 6 + 3ab^3x \\ \hline 17ab^3x - 7b^mcx^2 - 7 \end{array}\right.$$

15) Pour la soustract.
$$\left\{\begin{array}{l} 5a^4 - 7a^3b^2 - 3c^{-1}d^2 + 7d \\ 3a^4 - 15a^3b^2 - 7c^{-1}d^2 - 3a^2 \\ \hline 2a^4 + 8a^3b^2 + 4c^{-1}d^2 + 7d + 3a^2 \end{array}\right.$$

2) Multiplication.

a) Multiplication de quantités monomes.

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $a^{-m} \times a^n = a^{-m+n} = a^{n-m}$

3) $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$

4) $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$

5) $5a^3 \times a^7 \times 7a^5 \times 3a^6 = 105a^{21}$

6) $11a^{-2} \times 2a^{-5} \times 4a^6 \times 9a^7 = 792a^6$

7) $2a^{-3} \times 7a^{-9} \times -3a^6 = -42a^{-6} = -\dfrac{42}{a^6}$

8) $a^{-5}b \times a^{-7}d \times 10a = 10a^{-11}bd = \dfrac{10bd}{a^{11}}$

9) $3 \cdot 7^{-9} \times 7^{-2} \times 4 \cdot 7^8 = 12 \cdot 7^{-3} = \dfrac{12}{343}$

10) $-a^{p-q} \times -3a^{3q-2}f \times 5a^{p+7}cx = 15a^{2p+2q+5}fcx$

11) $5a^3b^{-4} \times 10a^2b^5c \times -3a^7 = -150a^{12}bc$

12) $-7a^{-1}b^4c^{-5} \times 3a^2b^{-5}c = -21ab^{-1}c^{-4} = -\dfrac{21a}{bc^4}$

13) $5a^3b^4 \times a^2b^8 \times 4acb^{-3} = 20a^6b^9c$

14) $h^4l^{11}x \times h^{-7}l^{-9} \times 3h^{-2}l^{-6}x^3 = 3h^{-5}l^{-4}x^4 = \dfrac{3x^4}{h^5l^4}$

15) $-13a^{-1}c^{-3} \times -4a^{-3}b^{-6}c^2 = 52a^{-4}b^{-6}c^{-1} = \dfrac{52}{a^4b^6c}$

16) $-\frac{5}{2}a^{-2}b^3c^{-m}d^{-1} \times \frac{2}{3}a^2b^{-3}c^{-2}d^4 = -\frac{5}{3}c^{-m-2}d^3$
$= -\dfrac{5d^3}{3c^{m+2}}$

17) $a^{-m}b^pc^q \times a^nb^{-r}c^s \times a^{n+m}b = a^{2n}b^{p-r+1}c^{q+s}$

18) $f^xg^{m-1}hd \times 2f^{m+3}h^{2-m} \times 4g^{2m+1}h^{m+2}d^3 =$
$8f^{x+m+3}g^{3m}h^5d^4$

19) $(a+y)^{-3}h^5l^4 \times (a+y)^{m+3}l^{-4}m \times (a+y)$
$= mh^5(a+y)^{m+1}$

20) $\dfrac{18a^{-5}b^3}{7c^{-2}d^{-6}} \times \dfrac{4a^6b^{-5}}{9c^3d^9} = \dfrac{72ab^{-2}}{63cd^3} = \dfrac{8a}{7cd^3b^2}$

21) $\dfrac{6a^4b^5c^{-7}}{11f^3dg^{-4}} \times \dfrac{3a^{-2}b^4c^{-1}}{5g^2f^6} = \dfrac{18a^2b^9c^{-8}}{55f^9dg^{-2}} = \dfrac{18a^2b^9g^2}{55f^9dc^8}$

22) $\dfrac{1}{3a^{-3}b^{-m}c} \times \dfrac{1}{4a^{-p}b} = \dfrac{1}{12a^{-p-3}b^{-m+1}c} = \dfrac{a^{p+3}b^{m-1}}{12c}$

23) $\dfrac{2a^{-m-3}b^{m+2}}{3x^{-5}y^{-n}z^p} \times \dfrac{6a^{-1}b^{-m}}{x^{-p}y^3} = \dfrac{12a^{-m-4}b^2}{3x^{-p-5}y^{-n+3}z^p}$
$= \dfrac{4b^2x^{p+5}y^{n-3}}{a^{m+4}z^p}$

24) $\dfrac{3a^{-5}b^2c^3f^4}{(a+b)^{-m}(c^2+x^2)} \times \dfrac{a^2b^{-5}c^{-2}f^{-4}}{(a+b)^{m-2}(c^2+x^2)^{-n+4}}$
$= \dfrac{3a^{-3}b^{-3}c}{(a+b)^{-2}(c^2+x^2)^{-n+5}} = \dfrac{3c(a+b)^2(c^2+x^2)^{n-5}}{a^3b^3}$

b) Multiplication de quantités complexes.

1) $(a^2 - 3ab - 5b^2) \times 4a^2b = 4a^4b - 12a^3b^2$
$- 20a^2b^3$

2) $(2a^3b^5 - 5a^2c^6 + 9a^3b^2c^3) \times 3a^2bc^2 = 6a^5b^6c^2$
$- 15a^4bc^8 + 27a^5b^3c^5$

3) $\left(7h^{-5}l + \dfrac{2l^3}{h^4} - 3ah^{-3}l^2 + 7\right) \times -8h^4l^{-5}$
$= -56h^{-1}l^{-4} - 16l^{-2} + 24ahl^{-3} - 56h^4l^{-5}$
$= \dfrac{24ah}{l^3} - \dfrac{56}{hl^4} - \dfrac{56h^4}{l^5} - \dfrac{16}{l^2}$

4) $\left(a^3b^{-4}-cb^{-5}d^3f+\frac{3c^m}{k^3}\right)\times 2bc^{-2}d=2a^3b^{-3}c^{-2}d$
$-2b^{-4}c^{-1}d^4f+\frac{6bc^{m-2}d}{k^3}=\frac{2a^3d}{b^3c^2}-\frac{2d^4f}{b^4c}+\frac{6bc^{m-2}d}{k^3}$

5) $(a^{m-1}b^{2m+3}-6a^{3-m}b^p+ab^{-m})\times a^{3m+2}b^{m-1}$
$=a^{4m+1}b^{3m+2}-6a^{2m+5}b^{p+m-1}+\frac{a^{3m+3}}{b}$

6) $(a+b)\times(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

7) $(a-b)\times(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

8) $(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$

9) $(a^4-2b^3)\times(a-b)=a^5-2ab^3-a^4b+2b^4$

10) $(x^2-3x-7)\times(x-2)=x^3-5x^2-x+14$

11) $(3k^2-5kl+2l^2)\times(k^2-7kl)=3k^4-26k^3l$
$+37k^2l^2-14kl^3$

12) $(6f^2-17fl+3l^2)\times(f^5+4f^4l)=6f^7+7f^6l$
$-65f^5l^2+12f^4l^3$

13) $(4a^2-16ax+3x^2)\times(5a^3-2a^2x)=20a^5-88a^4x$
$+47a^3x^2-6a^2x^3$

14) $(a^2+a^4+a^6)\times(a^2-1)=a^8-a^2$

15) $(a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4)\times(a+2b)$
$=a^5+32b^5$

16) $(2a^4x^2-3b^4y^2)\times(2a^4x^2+3b^4y^2)=4a^8x^4-9b^8y^4$

17) $(7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3)\times(3a^4-4a^3b+16a^2b^2)$
$=21a^7-43a^6b+150a^5b^2-110a^4b^3+104a^3b^4$
$-32a^2b^5$

18) $(\frac{5}{2}x^2+3ax-\frac{7}{3}a^2)\times(2x^2-ax-\frac{1}{2}a^2)=5x^4$
$+\frac{7}{2}ax^3-\frac{107}{12}a^2x^2+\frac{5}{6}a^3x+\frac{7}{6}a^4$

19) $(a^6-3a^4b^2+5a^2b^4)\times(7a^4-4a^2b^2+b^4)$
$=7a^{10}-25a^8b^2+48a^6b^4-23a^4b^6+5a^2b^8$

20) $(a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5)$
$\times(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3) = a^8-8a^7b+28a^6b^2$
$-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$

21) $(a^2+az+z^2)\times(a^2-az+z^2) = a^4+a^2z^2+z^4$

22) $(15a^{-6}b^2-7a^{-5}b^4+6a^{-4}b^6)\times(8a^{-2}b^2-3a^{-1}b^4)$
$=120a^{-8}b^4-101a^{-7}b^6+69a^{-6}b^8-18a^{-5}b^{10}$

23) $(13a^{-5}b + 10a^{-2}b^2 - 4ab^3) \times (6a^{-3}b^2-18b^3$
$- 7a^3b^4) = 78a^{-8}b^3-174a^{-5}b^4-295a^{-2}b^5$
$+ 2ab^6 + 28a^4b^7$

24) $(3x^{-2}y^{-7}-2x^2y^{-5}+8x^6y^{-3})\times(2x^{-3}y^{-5}+6xy^{-3}$
$+12x^5y^{-1})=6x^{-5}y^{-12}+14x^{-1}y^{-10}+40x^3y^{-8}$
$+24x^7y^{-6}+96x^{11}y^{-4}$

25) $(5a^3b^3c^2 - 6a^4b^2c^5 + 7a^8b^5c^6) \times (2a^3b^3c^2$
$+3a^4b^2c^5 - 6a^7b^4c^3) = 10a^6b^6c^4+3a^7b^5c^7$
$+14a^{11}b^8c^8 - 18a^8b^4c^{10} + 21a^{12}b^7c^{11}$
$-30a^{10}b^7c^5 + 36a^{11}b^6c^8 - 42a^{15}b^9c^9$

26) $(14a^5c^2-6a^2bc^2+c^3)\times(14a^5c^2+6a^2bc^2-c^3)$
$=196a^{10}c^4-36a^4b^2c^4+12a^2bc^5-c^6$

27) $\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{2c^3d^4}{b^5}-\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)\times\left(\frac{a^2}{b^3}-\frac{2c^3d^4}{b^5}+\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)$
$=\frac{a^4}{b^6}-\frac{4c^6d^8}{b^{10}}+\frac{14c^5d^4}{a^4b^8}-\frac{49c^4}{4a^8b^6}$

28) $(a^m+b^p-2c^n)\times(2a^m-3b)=2a^{2m}+2a^mb^p$
$-4a^mc^n-3a^mb-3b^{p+1}+6bc^n$

29) $(2a^{3-2m}b^{n+3}+3a^{m+1}b^{n+2}+c^p)\times(a^{m-1}b^{1-2m}-ca^p)$
$=2a^{2-m}b^{n-2m+4}+3a^{2m}b^{n-2m+3}+a^{m-1}b^{1-2m}c^p$
$-2ca^{p-2m+3}b^{n+3}-3ca^{p+m+1}b^{n+2}-a^pc^{p+1}$

30) $(x^{-3p}+3a^mx^{-2p}-10a^{2m}x^{-p})\times(a^2x^q+5a^{m+2}x^{q+p}$
$-2a^{2m+2}x^{q+2p}) = a^2x^{q-3p}+8a^{m+2}x^{q-2p}$
$+3a^{2m+2}x^{q-p}-56a^{3m+2}x^q+20a^{4m+2}x^{q+p}$

31) $(3a^{4-3m}bc^{m-2}+17a^{-3}b^{m+1})\times(3a^{6m-2}b^{2m}c^{3-4m}-8)$
$= 9a^{3m+2}b^{2m+1}c^{1-3m}+51a^{6m-5}b^{3m+1}c^{3-4m}$
$- 24a^{4-3m}bc^{m-2} - 136a^{-3}b^{m+1}$

Les formules 6, 7, 8, b) contiennent des théorèmes importans; comment peut-on les énoncer?

---

3) Division.

a) Division de quantités monomes.

1) $a^m : a^n = a^{m-n}$

2) $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$

3) $a^{-m} : a^n = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$

4) $a^{-m} : a^{-n} = a^{n-m}$

5) $8a^{10} : 2a^4 = 4a^6$

6) $\frac{7}{3}a^3 : \frac{2}{5}a^7 = \frac{35}{6}a^{-4} = \frac{35}{6a^4}$

7) $\frac{14}{5}a^{-8} : -3a = -\frac{14}{15}a^{-9} = -\frac{14}{15a^9}$

8) $ca^{18} : da^{-6} = \frac{ca^{24}}{d}$

9) $6(a+b)^{-9} : 4(a+b)^{-5} = \frac{3}{2}(a+b)^{-4} = \frac{3}{2(a+b)^4}$

10) $\frac{5}{3}a^{-7}b^3c : \frac{1}{2}a^{-9}b^{-5}c^3f = \frac{10a^2b^8}{3c^2f}$

11) $(a+x)^2\,(a+y)^{-3} : (a+x)^{-4}\,(a+y)^{-7}$
$= (a+x)^6\,(a+y)^4$

12) $-3a^mb^n : -4a^pb^qc^r = \frac{3a^{m-p}b^{n-q}}{4c^r}$

13) $-\frac{5c^2a^{-m}b^n}{8} : 3cd^5a^pb^{-q} = -\frac{5cb^{n+q}}{24d^5a^{m+p}}$

14) $\frac{3a^3d}{2b^5} : \frac{b^3}{4a^2c^7} = \frac{6a^5c^7d}{b^8}$

15) $\frac{2c^3\,(1+z^2)^2}{d^7z^9} : \frac{5c^8f^3\,(1+z^2)^{-6}}{2d^9z^5} = \frac{4d^2\,(1+z^2)^8}{5c^5f^3z^4}$

16) $\frac{2x^{3n-5m}y^{2n-3}}{7a^mb^3c} : \frac{4x^{1-5m}}{3ab^{n-1}y^5} = \frac{3b^{n-4}y^{2n+2}x^{3n-1}}{14a^{m-1}c}$

b) Division de quantités complexes.

1) $(6a^3b^2 - 10a^2f + 7a^4bx) : 2a^2 = 3ab^2 - 5f + \frac{7}{2}a^2bx$

2) $(\frac{3}{4}a^2x^5 - \frac{7}{9}ax^3 + 3ab^2x) : \frac{2}{3}a^2x^3 = \frac{9}{8}x^2 - \frac{7}{6a} + \frac{9b^2}{2ax^2}$

3) $\left(\frac{3a^2b^6}{4} - \frac{5ac}{b^7} + 2a^3c^2 - \frac{2a^2c^3}{5b(a+y)^2}\right) : -\frac{2a^5b^2}{3c}$

$= -\frac{9b^4c}{8a^3} + \frac{15c^2}{2a^4b^9} - \frac{3c^3}{a^2b^2} + \frac{3c^3}{5a^3b^3\,(a+y)^2}$

4) $(bc^3 - c^3x) : (b - x) = c^3$

5) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b$

6) $(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3) : (a - b) = a^2 + 2ab + b^2$

7) $(3a^5 + 16a^4b - 33a^3b^2 + 14a^2b^3) : (a^2 + 7ab)$
$= 3a^3 - 5a^2b + 2ab^2$

8) $(a^7 - 6a^6b^3 + 14a^5b^6 - 12a^4b^9) : (a^3 - 2a^2b^3)$
$= a^4 - 4a^3b^3 + 6a^2b^6$

9) $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 - b^2) = a^2 - b^2$

10) $[a^2bx^8 - (a^3b - a^5)\,x^7 - 8a^6x^6 + 7a^7x^5]$
$: (a^2x^2 - a^3x) = bx^6 + a^3x^5 - 7a^4x^4$

11) $(-\,a^8b^4 + 15a^{11}b^5 - 48a^{14}b^6 - 20a^{17}b^7)$
$: (10a^9b^2 - a^6b) = a^2b^3 - 5a^5b^4 - 2a^8b^5$

12) $(a^8 - 16z^8) : (a^2 - 2z^2) = a^6 + 2a^4z^2 + 4a^2z^4 + 8z^6$

13) $$(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2) = a^2 - 5ab + 6b^2$$

14) $$(4c^4 - 9b^2c^2 + 6b^3c - b^4) : (2c^2 - 3bc + b^2) = 2c^2 + 3bc - b^2$$

15) $$(\tfrac{3}{4}x^5 - 4x^4 + \tfrac{77}{8}x^3 - \tfrac{43}{4}x^2 - \tfrac{33}{4}x + 27) : (\tfrac{1}{2}x^2 - x + 3) = \tfrac{3}{2}x^3 - 5x^2 + \tfrac{1}{4}x + 9$$

16) $$(-1 + a^3n^3) : (-1 + an) = 1 + an + a^2n^2$$

17) $$(3a^4b^{12} - 8a^7b^8 - \tfrac{51}{2}a^{10}b^6 + \tfrac{5}{4}a^{10}b^4 + \tfrac{17}{4}a^{13}b^2) : (\tfrac{3}{2}a^3b^5 - \tfrac{1}{4}a^6b) = 2ab^7 - 5a^4b^3 - 17a^7b$$

18) $$(5a^5b^3c^5 - 22a^4b^3c^6 + 5a^3b^3c^7 + 12a^2b^3c^8 - 7a^2b^2c^8 + 28ab^2c^9) : (a^2bc^2 - 4abc^3) = 5a^3b^2c^3 - 2a^2b^2c^4 - 3ab^2c^5 - 7bc^6$$

19) $$\left(\frac{a^7b^2}{5} - \frac{47a^6b^3}{40} + \frac{9a^5b^4}{2} - 12a^4b^5\right) : \left(\frac{2a^3b^2}{5} - \frac{3a^2b^3}{4} + 6ab^4\right) = \tfrac{1}{2}a^4 - 2a^3b$$

20) $$(-2a^{-8}x^5 + 17a^{-4}x^6 - 5x^7 - 24a^4x^8) : (2a^{-3}x^3 - 3ax^4) = -a^{-5}x^2 + 7a^{-1}x^3 + 8a^3x^4$$

21) $$\left(\frac{a^3c}{b^5} + \frac{a^4c}{b^4} - \frac{7a^5c}{b^3} - \frac{3a^6c}{b^2} + \frac{a^2c^3}{b^2} - \frac{2a^3c^3}{b} - a^4c^3\right) : \left(\frac{a}{b^3} + \frac{3a^2}{b^2} + c^2\right) = \frac{a^2c}{b^2} - \frac{2a^3c}{b} - a^4c$$

22) $$(a^3d^3 - 3a^2cd^3 + 3ac^2d^3 - c^3d^3 + a^2c^2d^2 - ac^3d^2) : (a^2d^2 - 2acd^2 + c^2d^2 + ac^2d) = ad - cd$$

23) $$(a^6 + 2a^3z^3 + z^6) : (a^2 - az + z^2) = a^4 + a^3z + az^3 + z^4$$

24) $$(\tfrac{1}{3} - 6z^2 + 27z^4) : (\tfrac{1}{3} + 2z + 3z^2) = 1 - 6z + 9z^2$$

25) $$(a^6 - 16a^3x^3 + 64x^6) : (a^2 - 4ax + 4x^2) = a^4 + 4a^3x + 12a^2x^2 + 16ax^3 + 16x^4$$

26) $$(a^{3m-2n}b^{2p}c - a^{2m+n-1}b^{1-p}c^n + a^{-n}b^{-1}c^m + a^{3m-n}b^{3p+2}c^n - a^{2m+2n-1}b^3c^{2n-1} + b^{p+1}c^{m+n-1}) : (a^{-n}b^{-p-1} + bc^{n-1}) = a^{3m-n}b^{3p+1}c - a^{2m+2n-1}b^2c^n + b^pc^m$$

27) $(a^{m+n}b^n - 4a^{m+n-1}b^{2n} - 27a^{m+n-2}b^{3n}$
$+ 42a^{m+n-3}b^{4n}) : (a^nb^n - 7a^{n-1}b^{2n})$
$= a^m + 3a^{m-1}b^n - 6a^{m-2}b^{2n}$

28) $(a^n - b^n):(a-b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots$
$\cdots + b^{n-1}$

c) Cas où le dividende n'est pas un multiple du diviseur.

1) $\dfrac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + ax^4 - \cdots$

2) $\dfrac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \cdots$

3) $\dfrac{a}{x+1} = \dfrac{a}{x} - \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{a}{x^3} - \dfrac{a}{x^4} + \cdots$

4) $\dfrac{a}{x-1} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{a}{x^3} + \dfrac{a}{x^4} + \cdots$

5) $\dfrac{a+x}{b+x} = \dfrac{a}{b} - \dfrac{a-b}{b^2}x + \dfrac{a-b}{b^3}x^2 - \dfrac{a-b}{b^4}x^3 + \cdots$

6) $\dfrac{a-x}{b-x} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a-b}{b^2}x + \dfrac{a-b}{b^3}x^2 + \dfrac{a-b}{b^4}x^3 + \cdots$

7) $\dfrac{x+a}{x-b} = 1 + \dfrac{a+b}{x} + \dfrac{b(a+b)}{x^2} + \dfrac{b^2(a+b)}{x^3} + \cdots$

---

4) Puissances de puissances.

1) $\left[\left((a^m)^n\right)^p\right]^q = a^{mnpq}$

2) $\left[\left((a^{-m})^{-n}\right)^p\right]^q = a^{mnpq}$

3) $\left[\left((a^{-m})^{-n}\right)^{-p}\right]^{-q} = a^{mnpq}$

4) $\left[\left((a^m)^{-n}\right)^{-p}\right]^{-q} = a^{-mnpq}$

5) $\left[(a^3\,bc^2)^5\right]^6 = a^{90}b^{30}c^{60}$

6) $(a^{-2}b^3c^{-5}f^6x^{-1})^{-3} = a^6b^{-9}c^{15}f^{-18}x^3$

7) $(a^mb^{-n}c^pd)^r = a^{mr}b^{-nr}c^{pr}d^r$

8) $(a^{3m-n}f^{2n-1}x^n)^{-3m} = a^{3mn-9mm}f^{3m-6mn}x^{-3mn}$

9) $\left[a^3(a+b)^2\right]^m = a^{3m}\,(a+b)^{2m}$

10) $\left(\frac{a^mb^nc^pd^{-q}}{f^ng^{-m}}\right)^{-r} = \frac{a^{-mr}b^{-nr}c^{-pr}d^{qr}}{f^{-nr}g^{mr}}$

11) $\left(\frac{a^4b^5}{c^3df}\right)^4 = \frac{a^{16}b^{20}}{c^{12}d^4f^4}$

12) $\left[\left(\frac{a^2b^3}{cd^5}\right)^{-1}\right]^{-2m} = \frac{a^{4m}b^{6m}}{c^{2m}d^{10m}} = \left(\frac{a^4b^6}{c^2d^{10}}\right)^m$

13) $(-a^2)^5 = -a^{10}$

14) $(-b^{-3})^4 = b^{-12}$

15) $\left[\left((-a)^3\right)^4\right]^5 = a^{60}$

16) $\left[(-a)^{-3}\right]^{-5} = -a^{15}$

17) $\left[(-a)^{-4}\right]^{-6} = a^{24}$

18) $(-a)^{2m} = a^{2m}$

19) $(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}$

20) $\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^3\right]^{-4} = \frac{b^{12}}{a^{12}}$

IV. *Extraction de racines et calcul des radicaux.*

Qu'est-ce que c'est qu'extraire la racine d'un nombre, et qu'est-ce qu'une *quantité radicale?* — Y a-t-il des nombres dont la racine ne puisse être exprimée, ni par des nombres entiers, ni par des fractions ordinaires? — Comment nomme-t-on une quantité qui ne peut s'exprimer, ni par des nombres entiers, ni par des fractions? — Que signifient les termes *commensurable* et *incommensurable?* — Les nombres irrationnels sont nécessairement incommensurables avec les nombres entiers et avec les fractions ordinaires. — Mais le sont-ils aussi entre eux? Quel exemple y a-t-il où ils ne le sont point? — Quelle réduction y a-t-il à faire dans l'addition et la soustraction des quantités radicales? — Une réduction peut-elle avoir lieu dans la multiplication et la division des quantités radicales? et quelle est cette réduction? — Comment faut-il opérer pour ramener au même degré des radicaux de degrés différens?

---

1) Racines carrées et cubiques de nombres.

a) Racines carrées.

1) $\sqrt{256} = 16$
2) $\sqrt{4096} = 64$
3) $\sqrt{61009} = 247$

4) $\sqrt{582169} = 763$

5) $\sqrt{956484} = 978$

6) $\sqrt{57198969} = 7563$

7) $\sqrt{68492176} = 8276$

8) $\sqrt{25836889} = 5083$

9) $\sqrt{236144689} = 15367$

10) $\sqrt{1607448649} = 40093$

11) $\sqrt{780811249} = 27943$

12) $\sqrt{1420913025} = 37695$

13) $\sqrt{285970396644} = 534762$

14) $\sqrt{41605800625} = 203975$

15) $\sqrt{48303584206084} = 6950078$

16) $\sqrt{12088868379025} = 3476905$

17) $\sqrt{5} = 2{,}23606\cdots$

18) $\sqrt{13} = 3{,}60555\cdots$

19) $\sqrt{22} = 4{,}69041\cdots$

20) $\sqrt{96} = 9{,}79795\cdots$

21) $\sqrt{153} = 12{,}36931\cdots$

22) $\sqrt{101} = 10{,}04987\cdots$

23) $\sqrt{7{,}65} = 2{,}76586\cdots$

24) $\sqrt{9{,}6} = 3{,}09838\cdots$

25) $\sqrt{15{,}2379} = 3{,}90357\cdots$

26) $\sqrt{0{,}056} = 0{,}23664\cdots$

27) $\sqrt{0{,}00789} = 0{,}08882\cdots$

28) $\sqrt{0{,}003} = 0{,}05477\cdots$

29) $\sqrt{0{,}014} = 0{,}11832\cdots$

30) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

31) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

32) $\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{8}{9}$
33) $\sqrt{\frac{256}{361}} = \frac{16}{19}$
34) $\sqrt{\frac{7}{4}} = 1{,}32287\ldots$
35) $\sqrt{\frac{14}{9}} = 1{,}24721\ldots$
36) $\sqrt{11\frac{11}{16}} = 3{,}41869\ldots$
37) $\sqrt{7\frac{13}{36}} = 2{,}71313\ldots$
38) $\sqrt{8\frac{15}{49}} = 2{,}88203\ldots$
39) $\sqrt{\frac{5}{3}} = 1{,}29099\ldots$
40) $\sqrt{\frac{7}{8}} = 0{,}93541\ldots$
41) $\sqrt{\frac{5}{12}} = 0{,}64549\ldots$
42) $\sqrt{\frac{1}{17}} = 0{,}24253\ldots$
43) $\sqrt{10\frac{3}{10}} = 3{,}20936\ldots$

b) Racines cubiques.

1) $\sqrt[3]{12167} = 23$
2) $\sqrt[3]{884736} = 96$
3) $\sqrt[3]{405224} = 74$
4) $\sqrt[3]{2460375} = 135$
5) $\sqrt[3]{11089567} = 223$
6) $\sqrt[3]{1191016} = 106$
7) $\sqrt[3]{17173512} = 258$
8) $\sqrt[3]{49836032} = 368$
9) $\sqrt[3]{40353607} = 343$
10) $\sqrt[3]{64481201} = 401$
11) $\sqrt[3]{8000000} = 200$

12) $\sqrt[3]{74088000} = 420$
13) $\sqrt[3]{318611987} = 683$
14) $\sqrt[3]{340068392} = 698$
15) $\sqrt[3]{6372783864} = 1854$
16) $\sqrt[3]{7256313856} = 1936$
17) $\sqrt[3]{111980168000} = 4820$
18) $\sqrt[3]{115145914625} = 4865$
19) $\sqrt[3]{18970074963} = 2667$
20) $\sqrt[3]{113028882875} = 4835$
21) $\sqrt[3]{8108486729} = 2009$
22) $\sqrt[3]{12} = 2{,}28942\cdots$
23) $\sqrt[3]{82} = 4{,}34448\cdots$
24) $\sqrt[3]{267} = 6{,}43927\cdots$
25) $\sqrt[3]{551} = 8{,}19817\cdots$
26) $\sqrt[3]{687} = 8{,}82373\cdots$
27) $\sqrt[3]{5{,}8} = 1{,}79670\cdots$
28) $\sqrt[3]{102{,}875} = 4{,}68565\cdots$
29) $\sqrt[3]{28{,}25} = 3{,}04559\cdots$
30) $\sqrt[3]{58230{,}605376} = 38{,}76$
31) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$
32) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$
33) $\sqrt[3]{\frac{343}{512}} = \frac{7}{8}$
34) $\sqrt[3]{\frac{729}{125}} = \frac{9}{5}$
35) $\sqrt[3]{465\frac{31}{64}} = 7\frac{3}{4}$

36) $\sqrt[3]{52034\tfrac{10}{27}} = 37\tfrac{1}{3}$

37) $\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} = 0{,}87358\ldots$

38) $\sqrt[3]{\tfrac{5}{6}} = 0{,}94103\ldots$

39) $\sqrt[3]{\tfrac{5}{14}} = 0{,}70949\ldots$

40) $\sqrt[3]{3\tfrac{4}{5}} = 1{,}56049\ldots$

41) $\sqrt[3]{15\tfrac{2}{3}} = 2{,}50222\ldots$

---

2) Racines de quantités littérales.

a) Racines de quantités monomes.

1) $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$

2) $\sqrt[m]{a^{-mn}} = a^{-n}$

3) $\sqrt[m]{a^{mn}b^{mp}c^{-mq}d^{-mr}} = a^n b^p c^{-q} d^{-r}$

4) $\sqrt[m]{\dfrac{a^{mn}b^{mp}}{c^{mq}d^{mr}f^{ms}}} = \dfrac{a^n b^p}{c^q d^r f^s}$

5) $\sqrt{9a^4b^2f^{-12}g^{-8n}} = 3a^2bf^{-6}g^{-4n}$

6) $\sqrt{\tfrac{4}{25}c^6x^{2m+4}y^{4p-8}} = \tfrac{2}{5}c^3x^{m+2}y^{2p-4}$

7) $\sqrt[4]{\dfrac{a^8b^{20}c^4}{(a+f)^4h^{12}z^{16}}} = \dfrac{a^2b^5c}{(a+f)h^3z^4}$

8) $\sqrt[3]{\dfrac{27u^9x^{12}(a^2+x^2)^{-6n}}{8b^{-3n}h^9}} = \dfrac{3b^nu^3x^4}{2h^3(a^2+x^2)^{2n}}$

9) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10}a^{-5}(a+b)^5(2+x)^{-10}}{32c^5d^{-15}}} = \dfrac{9d^3(a+b)}{2ac(2+x)^2}$

10) $\sqrt[9]{\left(2^{36}a^{45}b^{9} \times \frac{(a+b)^{27}}{a^{9}}\right)} = 2^{4}a^{4}b(a+b)^{3}$

11) $\sqrt{\left(\frac{a^{2}b^{2}c^{2}}{d^{4}} \times \frac{1}{a^{6}b^{8}f^{4}}\right)} = \frac{c}{a^{2}b^{3}d^{2}f^{2}}$

b) Racines carrées de quantités complexes.

1) $\sqrt{(a^{2} + 2ab + b^{2})} = a + b$

2) $\sqrt{(a^{2} - 2ab + b^{2})} = a - b$

3) $\sqrt{\left(a^{2} - ab + \frac{b^{2}}{4}\right)} = a - \frac{b}{2}$

4) $\sqrt{(x^{2} + 2x + 1)} = x + 1$

5) $\sqrt{(f^{6} + 6f^{3}x^{4} + 9x^{8})} = f^{3} + 3x^{4}$

6) $\sqrt{\left(\frac{9a^{8}}{4} + 2a^{4}n^{3} + \frac{4n^{6}}{9}\right)} = \frac{3a^{4}}{2} + \frac{2n^{3}}{3}$

7) $\sqrt{(\tfrac{25}{4}a^{2}b^{2} - \tfrac{5}{3}abc^{2} + \tfrac{1}{9}c^{4})} = \tfrac{5}{2}ab - \tfrac{1}{3}c^{2}$

8) $\sqrt{(x^{4} - ax^{3} + \tfrac{1}{4}a^{2}x^{2})} = x^{2} - \tfrac{1}{2}ax$

9) $\sqrt{(a^{2m} + 2a^{m}x^{n} + x^{2n})} = a^{m} + x^{n}$

10) $\sqrt{(a^{2m} - 4a^{m+n} + 4a^{2n})} = a^{m} - 2a^{n}$

11) $\sqrt{\left(\frac{a^{2}}{b^{2}} - \frac{4a}{3c} + \frac{4b^{2}}{9c^{2}}\right)} = \frac{a}{b} - \frac{2b}{3c}$

12) $\sqrt{(a^{2}+2ab+2ac+b^{2}+2bc+c^{2})} = a+b+c$

13) $\sqrt{\left(9x^{2} - 30ax - 3a^{2}x + 25a^{2} + 5a^{3} + \frac{a^{4}}{4}\right)}$
$= 3x - 5a - \frac{a^{2}}{2}$

14) $\sqrt{(4x^{4}+8ax^{3}+4a^{2}x^{2}+16b^{2}x^{2}+16ab^{2}x+16b^{4})}$
$= 2x^{2} + 2ax + 4b^{2}$

15) $\sqrt{(9a^{2} - 6ab + 30ac + 6ad + b^{2} - 10bc - 2bd}$
$\overline{+ 25c^{2} + 10cd + d^{2})} = 3a - b + 5c + d$

16) $\sqrt{(\frac{9}{4}+6x-17x^2-28x^3+49x^4)} = \frac{3}{2}+2x-7x^2$

17) $\sqrt{(9x^4-3ax^3+6bx^3+\frac{a^2x^2}{4}-abx^2+b^2x^2)}$

$$= 3x^2 - \frac{ax}{2} + bx$$

18) $\sqrt{(\frac{4}{9}a^2x^4-\frac{4}{3}abx^3z+\frac{8}{3}a^2bx^2z^2+b^2x^2z^2-4ab^2xz^3}$

$$+4a^2b^2z^4) = \frac{2}{3}ax^2 - bxz + 2abz^2$$

19) $\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{x^4+4ax^2+4a^2}} = \frac{a-b}{x^2+2a}$

20) $\sqrt{\frac{a^2x^2+2ab^2x^3+b^4x^4}{a^{2m}+2a^mx^n+x^{2n}}} = \frac{ax+b^2x^2}{a^m+x^n}$

21) $\sqrt{\Big(a^{2m}x^{2n} + 10ca^{2m-2}x^{2n+1} - 6a^{m+1}x^{n-1}}$

$$+ 25c^2a^{2m-4}x^{2n+2} - 30ca^{m-1}x^n + \frac{9a^2}{x^2}\Big)$$

$$= a^mx^n + 5ca^{m-2}x^{n+1} - \frac{3a}{x}$$

22) $\sqrt{\Big(\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^{6p}} - \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}} - \frac{2^8a^{m-1}b^xc}{d^{3p}}}$

$$+ a^{2n}b^{4n-2}d^6 + \frac{2^9}{3}a^nb^{x+2n-1}d^3 + \frac{2^{16}b^{2x}}{9}\Big)$$

$$= \frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} - a^nb^{2n-1}d^3 - \frac{2^8b^x}{3}$$

c) **Racines cubiques de quantités complexes.**

1) $\sqrt[3]{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)} = a+b$

2) $\sqrt[3]{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)} = a-b$

3) $\sqrt[3]{(x^3+6x^2+12x+8)} = x+2$

4) $\sqrt[3]{(8a^3-84a^2x+294ax^2-343x^3)} = 2a-7x$

5) $\sqrt[3]{(x^6-6cx^5+12c^2x^4-8c^3x^3)} = x^2-2cx$

6) $\sqrt[3]{(a^{3m} - 6a^{2m+1}x^n + 12a^{m+2}x^{2n} - 8a^3x^{3n})}$
$= a^m - 2ax^n$

7) $\sqrt[3]{(8-12x^{3n-1}+6x^{6n-2}-x^{9n-3})} = 2-x^{3n-1}$

8) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3c^3}{b^3}x^6-\frac{3a^2c}{b}x^5+\frac{3ab}{c}x^4-\frac{b^3}{c^3}x^3\right)}=\frac{ac}{b}x^2-\frac{b}{c}x$

9) $\sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{3a^2b^2}{2c^2}x^{-2} + \frac{3a^4b}{4c^4}x^{-4} + \frac{a^6}{8c^6}x^{-6}\right)} =$
$b + \frac{a^2}{2c^2}x^{-2} = b + \frac{a^2}{2c^2x^2}$

10) $\sqrt[3]{(a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3}$
$+ 3b^2c + 3bc^2 + c^3) = a + b + c$

11) $\sqrt[3]{(27z^6 - 54az^5 + 63a^2z^4 - 44a^3z^3 + 21a^4z^2}$
$- 6a^5z + a^6) = 3z^2 - 2az + a^2$

12) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3y^3}{b^6c^3}+\frac{3a^2cy^4}{b^4d}-\frac{3a^3y^2}{b^4c^2}+\frac{3ac^5y^5}{b^2d^2}-\frac{6a^2c^2y^3}{b^2d}\right.}$
$\left.+\frac{3a^3y}{b^2c}+\frac{c^9y^6}{d^3}-\frac{3ac^6y^4}{d^2}+\frac{3a^2c^3y^2}{d}-a^3\right)$
$=\frac{ay}{b^2c}+\frac{c^3y^2}{d}-a$

13) $\sqrt[3]{(8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2}$
$+ 108c^5x - 27c^6) = 2x^2 + 4cx - 3c^2$

14) $\sqrt[3]{[(a + b)^{6m}x^3 + 6ca^p(a + b)^{4m}x^2 + 12c^2a^{2p}}$
$\times (a+b)^{2m}x+8c^3a^{3p}] = (a+b)^{2m}x+2ca^p$

d) Racines carrées et cubiques de carrés et de cubes imparfaits.

1) $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\ldots$

2) $\sqrt{(a^2+x^2)}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\ldots$

3) $\sqrt{(1-x)} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\ldots$

$$4)\ \sqrt{(1+x)} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots$$

$$5)\ \sqrt[3]{(a^3-x^3)} = a-\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^6}{9a^5}-\frac{5x^9}{81a^8}-\frac{10x^{12}}{243a^{11}}-\cdots$$

$$6)\ \sqrt[3]{(a^3+x^3)} = a+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^6}{9a^5}+\frac{5x^9}{81a^8}-\frac{10x^{12}}{243a^{11}}+\cdots$$

$$7)\ \sqrt[3]{(1-x)} = 1-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}-\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}-\cdots$$

$$8)\ \sqrt[3]{(1+x)} = 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}+\cdots$$

Le maître fera bien de montrer par quelques exemples l'utilité de ces séries dans l'extraction des racines carrées et cubiques, en faisant $x=1$ et $a=2, 3, 4, 5$ etc. dans les formules 1, 2, 5, 6 et $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ etc. dans les formules 3, 4, 7, 8.

---

3) Calcul des radicaux.

a) Addition et soustraction.

$$1)\ b\sqrt[m]{a}+c\sqrt[m]{a}-d\sqrt[m]{a} = (b+c-d)\sqrt[m]{a}$$

$$2)\ 3\sqrt[6]{5}+17\sqrt[6]{5}-12\sqrt[6]{5}-7\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5}$$

$$3)\ 6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\tfrac{3}{4}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{5}{4}\sqrt{2}$$

$$4)\ 6\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}-2\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}+a\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}-\frac{2b}{c}\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}} = \left(4+a-\frac{2b}{c}\right)\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}$$

$$5)\ 5\sqrt[7]{9}-2\sqrt[5]{14}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[5]{14}-2\sqrt[7]{9}$$
$$= 3\sqrt[7]{9}-7\sqrt[5]{14}+\sqrt[3]{2}$$

6) Pour l'addition.
$$\left\{\begin{array}{l}
10\sqrt{2} + 5\sqrt[7]{8} - 7\sqrt[m]{5} + 2\sqrt[3]{a} \\
5\sqrt{2} + \sqrt[7]{8} + 4\sqrt[m]{5} - 3\sqrt[3]{a} \\
-3\sqrt{2} - 9\sqrt[7]{8} - 3\sqrt[m]{5} + \sqrt[3]{a} + \sqrt{ab} \\
\hline
12\sqrt{2} - 3\sqrt[7]{8} - 6\sqrt[m]{5} + \sqrt{ab}
\end{array}\right.$$

7) Pour l'addition.
$$\left\{\begin{array}{l}
13\sqrt[5]{12a^2bc} + 17\sqrt[m]{3} - 5\sqrt[n]{6} \\
7\sqrt[5]{12a^2bc} + 2\sqrt[n]{6} + 3\sqrt[m]{3} - 2a\sqrt{c} + \frac{1}{2}\sqrt[7]{9a} \\
-20\sqrt[5]{12a^2bc} + 9\sqrt[5]{12a^2bc} + \sqrt{c} - 3\sqrt[7]{9a} \\
\hline
20\sqrt[m]{3} - 3\sqrt[n]{6} + 9\sqrt[5]{12a^2bc} - (2a-1)\sqrt{c} - \frac{5}{2}\sqrt[7]{9a}
\end{array}\right.$$

8) Pour la soustract.
$$\left\{\begin{array}{l}
18\sqrt{7} - 5\sqrt{6} + 10\sqrt[4]{11} - 3\sqrt[3]{13} \\
6\sqrt{7} - 2\sqrt{6} + \frac{17}{2}\sqrt[4]{11} + 2\sqrt[3]{13} \\
\hline
12\sqrt{7} - 3\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt[4]{11} - 5\sqrt[3]{13}
\end{array}\right.$$

9) Pour la soustract.
$$\left\{\begin{array}{l}
16\sqrt[4]{6ab} - \sqrt[5]{9c^3} + 3\sqrt[m]{7a} - \sqrt{10} \\
-8\sqrt[5]{9c^3} - 5\sqrt[m]{7a} + 3\sqrt[4]{6ab} + 2\sqrt[4]{10} \\
\hline
13\sqrt[4]{6ab} + 7\sqrt[5]{9c^3} + 8\sqrt[m]{7a} - \sqrt{10} - 2\sqrt[4]{10}
\end{array}\right.$$

b) Réductions et transformations.

1) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

2) $2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} + 5\sqrt{72} - \sqrt{50} = 8\sqrt{2}$

3) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} = -13\sqrt{3}$

4) $8\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{29}{2}\sqrt{3} = \frac{29\sqrt{3}}{2}$

5) $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{28}{15}\sqrt{15}$

6) $7\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{128} = 8\sqrt[3]{2}$

7) $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} + \sqrt{28} + 2\sqrt{63} = 8\sqrt{7} - \sqrt[3]{3}$

8) $\sqrt[4]{32} + 2\sqrt[3]{40} = 2\sqrt[4]{2} + 4\sqrt[3]{5}$

9) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{6} = \sqrt{45} - \sqrt{8} + \sqrt{54}$

10) $5\sqrt[3]{7} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{875} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{48}$

11) $4\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt[5]{512} + \sqrt[3]{54} - \sqrt{\tfrac{25}{3}}$

12) $\sqrt{45c^3} - \sqrt{80c^3} + \sqrt{5a^2c} = (a - c)\sqrt{5c}$

13) $\sqrt{18a^5b^3} + \sqrt{50a^3b^3} = (3a^2b + 5ab)\sqrt{2ab}$

14) $\sqrt[3]{16a^3b} + \sqrt{4a^2b} - \sqrt{a^2b} - \sqrt[3]{54a^3b} = a\sqrt{b} - a\sqrt[3]{2b}$

15) $\sqrt[4]{2^{14}a^{13}b^5c} - \sqrt[4]{4 \cdot 5^4a^5b^9c^5} + \sqrt[4]{4 \cdot 6^4ab^5c}$

$$= (8a^3b - 5ab^2c + 6b)\sqrt[4]{4abc}$$

16) $\sqrt{\dfrac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\dfrac{a^2c^3}{bd^2}} - \sqrt{\dfrac{a^2cd^2}{be^2}} = \left(\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{ac}{d} - \dfrac{ad}{e}\right)\sqrt{\dfrac{c}{b}}$

17) $\sqrt[3]{\dfrac{27a^5x}{2b}} - \sqrt[3]{\dfrac{a^2x}{2b}} = (3a - 1)\sqrt[3]{\dfrac{a^2x}{2b}}$

18) $3b^2\sqrt{a^3c} + \dfrac{2}{c}\sqrt{a^5c^3} - c^4\sqrt{\dfrac{ac}{b^2}}$

$$= \left(3ab^2 + 2a^2 - \frac{c^4}{b}\right)\sqrt{ac}$$

19) $5a\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}} + b\sqrt[3]{\dfrac{b^2c^3}{a}} = \left(\dfrac{5a}{b} + \dfrac{bc}{a}\right)\sqrt[3]{a^2b^2}$

20) $\sqrt[3]{54a^{m+6}b^3} - \sqrt[3]{16a^{m-3}b^6} + \sqrt[3]{2a^{4m+9}} + \sqrt[3]{2c^3a^m}$

$$= \left(3a^2b - \frac{2b^2}{a} + a^{m+3} + c\right)\sqrt[3]{2a^m}$$

21) $\sqrt[m]{2^ma^{mp+3}b^{mn+5}} + \sqrt[m]{3^ma^{2m-mn+3}b^{m+5}}$

$$- \sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}} = (2a^pb^n + 3a^{2-n}b - c^2)\sqrt[m]{a^3b^5}$$

22) $\sqrt[6]{\dfrac{3 \cdot 2^3c^3f^4}{d^4g}} + \sqrt[6]{\dfrac{2^3g^{11}}{3^5c^3d^4f^2}} = \left(\dfrac{f}{d} + \dfrac{g^2}{3cd}\right)\sqrt[6]{\dfrac{3 \cdot 2^3c^3d^2}{f^2g}}$

23) $\sqrt[2n]{\dfrac{a^{6n+4}b^{2n-3}c^{2mn}}{d^{9n+5}f^2g^{p+2n-1}}} = \dfrac{a^3bc^m}{d^4g}\sqrt[2n]{\dfrac{a^4}{d^{n+5}f^2g^{p-1}b^3}}$

24) $\sqrt{(a^2c+a^2d)} = a\sqrt{(c+d)}$

25) $\sqrt[3]{(a^{6m}b-a^{7m}f^3)} = a^{2m}\sqrt[3]{(b-a^mf^3)}$

26) $\sqrt[7]{\left(\frac{a^{10}}{b^6c^6}+\frac{a^8}{b^5c^5}\right)} = \frac{a}{bc}\sqrt[7]{(a^3bc+ab^2c^2)}$

27) $\sqrt{\left(\frac{a^3b^2}{cd^2}-\frac{2a^2b^3}{c^2d}\right)} = \frac{ab}{cd}\sqrt{(ac-2bd)}$

28) $x\sqrt[3]{\left(\frac{8a^4}{27b^3}+\frac{16a^3}{27b^2}\right)} = \frac{2ax}{3b}\sqrt[3]{(a+2b)}$

29) $\sqrt{(3a^2c+6abc+3b^2c)} = (a+b)\sqrt{3c}$

30) $\sqrt{(4a^5b^2-20a^3b^3+25ab^4)} = (2a^2-5b)\sqrt{ab^2}$

31) $\sqrt{(2ax^2-4ax+2a)} = (x-1)\sqrt{2a}$

32) $\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{c^2d^2}} = \frac{a-2b}{cd}\sqrt{ab}$

33) $\sqrt{\frac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2+2ax+x^2}} = \frac{a-x}{a+x}\sqrt{x}$

34) $\sqrt{\frac{ac}{a^2bd-2ab^2d+b^3d}} = \frac{1}{a-b}\sqrt{\frac{ac}{bd}}$

35) $\sqrt{\frac{x^3+2x^2+x}{a^3+a^2b}} = \frac{x+1}{a}\sqrt{\frac{x}{a+b}}$

36) $\sqrt{\frac{a^3-a^2x-ax^2+x^3}{b^4c^3d}} = \frac{a-x}{b^2c}\sqrt{\frac{a+x}{bcd}}$

37) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{ac}{a^2-2ab+b^2}} = \frac{\sqrt{ac}}{a+b}$

38) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

39) $(x+1)\sqrt{\frac{f^2g}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2f^2g}{(x+1)(x-1)}} = \sqrt{\frac{(x+1)f^2g}{x-1}}$

40) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}} = \sqrt[mnpq]{a}$

41) $\sqrt[3]{(2\sqrt{5})} = \sqrt[6]{20}$

42) $\sqrt[m]{(a\sqrt[n]{b})} = \sqrt[mn]{a^n b}$

c) Multiplication.

1) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$

2) $a\sqrt[n]{x} \times b\sqrt[n]{y} \times c\sqrt[n]{z} = abc\sqrt[n]{xyz}$

3) $\sqrt[3]{4} \times 7\sqrt[3]{6} \times \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} = \frac{7}{2}\sqrt[3]{120}$

4) $4 \times 2\sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{72} = 8\sqrt{6}$

5) $5\sqrt{3} \times 7\sqrt{\frac{8}{3}} \times \sqrt{2} = 140$

6) $c\sqrt{a} \times d\sqrt{a} = acd$

7) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \times \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$

8) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{648000}$

9) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \times \sqrt[8]{3} = \sqrt[24]{\frac{256}{3}}$

10) $\sqrt[5]{4} \times \sqrt[10]{3} \times \sqrt[15]{6} = \sqrt[30]{3981312}$

11) $\sqrt[7]{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[14]{6} = \sqrt[42]{\frac{2}{27}}$

12) $a\sqrt[m]{x} \times b\sqrt[n]{y} \times c\sqrt[p]{z} = abc\sqrt[mnp]{x^{np}y^{mp}z^{mn}}$

13) $\sqrt[12]{\frac{a}{bc}} \times \sqrt[8]{\frac{a^m}{b}} = \sqrt[24]{\frac{a^{3m+2}}{b^5c^2}}$

14) $\frac{ac}{b^3d^5}\sqrt[3]{\frac{bcd}{e}} \times \sqrt[6]{\frac{b^{10}d^7e}{a^2c^5}} = \frac{1}{bd}\sqrt[6]{\frac{a^4c^3}{d^3e}}$

15) $(\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{10}) \times 2\sqrt{5} = 10+4\sqrt{35}+6\sqrt{50}$

16) $(\sqrt{6}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[4]{5}) \times \sqrt{3} = \sqrt{18}+\sqrt[6]{108}-2\sqrt[4]{45}$

17) $(3+\sqrt{5}) \times (2-\sqrt{5}) = 1-\sqrt{5}$

18) $(7+2\sqrt{6}) \times (9-5\sqrt{6}) = 3-17\sqrt{6}$

19) $(9-7\sqrt{13}) \times (5-6\sqrt{13}) = 591-89\sqrt{13}$

20) $(6+12\sqrt{7}) \times (3-5\sqrt{7}) = 6\sqrt{7}-402$

21) $(9\sqrt{12}+3) \times (5\sqrt{12}+8) = 564 + 87\sqrt{12}$

22) $(13-\sqrt{5}) \times (7+3\sqrt{5}) = 76 + 32\sqrt{5}$

23) $(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}) \times (\frac{1}{2}-7\sqrt{\frac{1}{2}}) = -8-\frac{37}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

24) $(-5-\sqrt{\frac{3}{4}}) \times (-5+\sqrt{\frac{3}{4}}) = 24\frac{1}{4}$

25) $(9+2\sqrt{10}) \times (9-2\sqrt{10}) = 41$

26) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times (2\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 1+\sqrt{6}$

27) $(5\sqrt{14}+3\sqrt{5}) \times (7\sqrt{14}-2\sqrt{5}) = 460+11\sqrt{70}$

28) $(2\sqrt{7}-5\sqrt{6}) \times \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}-2\sqrt{6}\right) = 81-\frac{23}{2}\sqrt{42}$

29) $(4\sqrt{\frac{7}{3}}+5\sqrt{\frac{1}{2}}) \times (\sqrt{\frac{7}{3}}+2\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{43}{3}+13\sqrt{\frac{7}{6}}$

30) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

31) $(\sqrt{7}-\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}-\sqrt{2}) = \sqrt{35}-\sqrt{15}-$
$\sqrt{14}+\sqrt{6}$

32) $(5-8\sqrt{7}) \times (9+10\sqrt{3}) = 45-72\sqrt{7}+50\sqrt{3}$
$-80\sqrt{21}$

33) $(7\sqrt{6}+2\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{6}) = 7\sqrt{30}+2\sqrt{15}$
$+42+2\sqrt{18}$

34) $(3\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}) \times (5\sqrt{\frac{5}{6}}+\sqrt{\frac{2}{7}}) = 15\sqrt{\frac{5}{12}}-5\sqrt{\frac{5}{18}}$
$+3\sqrt{\frac{1}{7}}-\sqrt{\frac{2}{21}}$

35) $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6}) \times (2\sqrt{8}-3) = 41\sqrt{6}-71\sqrt{3}$

36) $(2\sqrt{6}-3\sqrt{5}) \times (4\sqrt{3}-\sqrt{10}) = 39\sqrt{2}-16\sqrt{15}$

37) $(\sqrt{12}-2\sqrt{7}) \times (2+\sqrt{21}) = 2\sqrt{7}-10\sqrt{3}$

38) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{6}-2) \times (2\sqrt{5}+18\sqrt{6}) = 246 +$
$58\sqrt{30}-4\sqrt{5}-36\sqrt{6}$

39) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}) \times (\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$
$= -174+42\sqrt{10}$

40) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}-8\sqrt{6})\times(2+5\sqrt{2}-3\sqrt{12})$
$=30+4\sqrt{5}+150\sqrt{2}-34\sqrt{6}+10\sqrt{10}$
$-40\sqrt{12}-6\sqrt{60}$

41) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{7})\times(\sqrt{6}+5\sqrt{3}+\sqrt{10})$
$=3\sqrt{12}+2\sqrt{30}+\sqrt{42}+15\sqrt{6}+10\sqrt{15}$
$+5\sqrt{21}+3\sqrt{20}+2\sqrt{50}+\sqrt{70}$

42) $(\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{6})\times(3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{36})=12+3\sqrt[3]{20}$
$-6\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{180}$

43) $(5\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{16})\times(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4})=44-4\sqrt[3]{32}$
$-15\sqrt[3]{16}$

44) $(2\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})\times(2+\sqrt[3]{9})=4\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{18}$
$+6\sqrt[6]{3}$

45) $(5+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[4]{5})\times(\sqrt{6}+\sqrt{5})=5\sqrt{6}+5\sqrt{5}$
$+2\sqrt[4]{125}+2\sqrt[4]{180}+2\sqrt[6]{54}+\sqrt[6]{2000}$

46) $(a+\sqrt{b})\times(a-\sqrt{b})=a^2-b$

47) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

48) $(c\sqrt{a}+d\sqrt{b})\times(c\sqrt{a}-d\sqrt{b})=ac^2-bd^2$

49) $(a+\sqrt{x})\times(b+\sqrt{y})=ab+a\sqrt{y}+b\sqrt{x}+\sqrt{xy}$

50) $\left(\sqrt{\frac{ad^2}{c^3}}+\sqrt{\frac{a^2}{b}}\right)\times(\sqrt{ac}+\sqrt{b^3})=\frac{ad}{c}+ab$
$+\left(a+\frac{b^2d}{c^2}\right)\sqrt{\frac{ac}{b}}$

51) $\left(\sqrt{\frac{ac^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{1}{b}}\right)\times\left(\frac{c}{d}\sqrt{(a+b)a}-\sqrt{\frac{b^5}{c^2}}\right)=$
$\frac{ac^2}{d}-\frac{b^2}{c}+\left(\frac{c}{bd}-\frac{b^2}{a+b}\right)\sqrt{(a+b)ab}$

52) $(\sqrt{a}+c\sqrt[3]{b})\times(\sqrt{a}-c\sqrt[3]{b})=a-c^2\sqrt[3]{b^2}$

53) $(2\sqrt{a}+3c\sqrt[3]{b})\times(\sqrt{a}+4\sqrt[3]{b})=2a+12c\sqrt[3]{b^2}$
$+(3c+8)\sqrt[6]{a^3b^2}$

54) $(c\sqrt[4]{a}+d\sqrt[4]{b})\times(f\sqrt[4]{a}+g\sqrt[4]{b}) = cf\sqrt{a}+dg\sqrt{b}$
$+(df+cg)\sqrt[4]{ab}$

55) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})^2 = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+2\sqrt[4]{ab}$
$+2\sqrt[4]{ac}+2\sqrt[4]{bc}$

56) $\sqrt{(a+\sqrt{b})}\times\sqrt{(c+\sqrt{d})} = \sqrt{(ac+c\sqrt{b}+a\sqrt{d}}$
$\sqrt{+\sqrt{bd})}$

57) $\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})}\times\sqrt[n]{(a-\sqrt{b})} = \sqrt[n]{(a^2-b)}$

58) $\sqrt[m]{(a+\sqrt[n]{b})}\times\sqrt[m]{(c+\sqrt[p]{d})} = \sqrt[m]{(ac+c\sqrt[n]{b}+a\sqrt[p]{d}}$
$\sqrt{+\sqrt[np]{b^pd^n})}$

59) $\sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})}\times\sqrt{(3+\sqrt{6})} = \sqrt[4]{(147+60\sqrt{6})}$

60) $3\sqrt[n]{(2+4\sqrt[3]{3})}\times4\sqrt[n]{(6+2\sqrt[3]{9})} = 12\sqrt[n]{(36+4\sqrt[3]{9}}$
$\sqrt{+24\sqrt[3]{3})}$

61) $5\sqrt{2}\times3\sqrt{(4+6\sqrt{2})} = 30\sqrt{(2+3\sqrt{2})}$

d) Division.

1) $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

2) $c\sqrt[m]{a}:d\sqrt[m]{b}=\frac{c}{d}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

3) $a:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\frac{a^m}{b}}$

4) $a:\sqrt{a}=\sqrt{a}$

5) $2ab^2c^3 : 4\sqrt[3]{a^3bc^5d} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^5c^4}{d}}$

6) $\sqrt[5]{ab^{n-1}c^2}:\sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{dc^{n-1}}}=\sqrt[5]{\frac{b^{n-3}c^{n+1}d}{a^2}}$

7) $\sqrt[n]{\frac{f^3g^2}{dx^5}}:\sqrt[n]{\frac{fg}{dx}}=\sqrt[n]{\frac{f^2g}{x^4}}$

8) $\sqrt[3]{a^2bc} : \sqrt[6]{ab^2c^3} = \sqrt[15]{\frac{a^7}{bc^4}}$

9) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$

10) $4\sqrt[3]{12} : 2\sqrt{3} = 2\sqrt[6]{\frac{16}{3}}$

11) $\sqrt[5]{64} : 2 = \sqrt[5]{2}$

12) $\sqrt[2n]{\frac{a^m b}{c^2 d}} : \sqrt[3n]{\frac{a^{m-1}c^3}{d^5}} = \sqrt[6n]{\frac{a^{m+2}b^3d^7}{c^{12}}}$

13) $c\sqrt{(a^2-x^2)} : \sqrt{(a+x)} = c\sqrt{(a-x)}$

14) $\sqrt{(ab^2-b^2c)} : \sqrt{(a-c)} = b$

15) $\sqrt{(a^2-z^2)} : (a-z) = \sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$

16) $(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4) : \sqrt{8} = 5-\sqrt{2}$

17) $(\sqrt{6}+4\sqrt{18}-3-8\sqrt{2}) : \sqrt{3} = \sqrt{2}+4\sqrt{6}$
$-\sqrt{3}-8\sqrt{\frac{2}{3}}$

18) $(3\sqrt{15}-\sqrt{20}+\sqrt{10}-7) : 2\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{3}-1$
$+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{5}}$

19) $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+4) : 4\sqrt{8} = \frac{11}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$

20) $(6+2\sqrt{3}-\sqrt[3]{18}) : \sqrt{6} = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$

21) $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}) : 2\sqrt{2} = 1+\frac{\sqrt[6]{18}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$

22) $1 : (\sqrt{3}+2) = 2-\sqrt{3}$

23) $3 : (1+\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}-3$

24) $12 : (5-\sqrt{21}) = 15+3\sqrt{21}$

25) $7 : (\sqrt{8}-2) = \frac{7}{2}(\sqrt{2}+1)$

26) $\sqrt{3} : (2\sqrt{5}-3\sqrt{2}) = \sqrt{15}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$

27) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{6}} : (\sqrt{\frac{1}{2}}-2) = -\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{30}}{28}$.

28) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} : (\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{10}$

29) $(1+\sqrt{2}) : (2-\sqrt{2}) = 2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

30) $(5-7\sqrt{3}) : (1+\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}-13$

31) $(6-3\sqrt{5}) : (\sqrt{5}-1) = \frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{9}{4}$

32) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}) : (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 5+2\sqrt{6}$

33) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}) : (2\sqrt{5}-\sqrt{18}) = 9+\frac{5}{2}\sqrt{10}$

34) $(6\sqrt{7}-3\sqrt{3}) : (\sqrt{5}-2) = 6\sqrt{35}+12\sqrt{7}$
$-3\sqrt{15}-6\sqrt{3}$

35) $1 : (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{30}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}$

36) $7 : (\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 35\sqrt{10}+77\sqrt{2}+63\sqrt{3}$
$+14\sqrt{60}$

37) $\sqrt{2} : (1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}) = \frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{10}-\frac{1}{2}$

38) $(2-\sqrt{3}) : (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 1+\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{4}\sqrt{6}$

39) $(3+4\sqrt{3}) : (\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}) = \sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$

40) $(156+12\sqrt{11}) : (6+14\sqrt{2}-2\sqrt{11}) = 7\sqrt{2}+\sqrt{11}-3$

41) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{10}) : (3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}) = \frac{7}{10}\sqrt{30}$
$+\frac{27}{10}\sqrt{5}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

42) $\sqrt{a} : (b+\sqrt{c}) = \frac{b\sqrt{a}-\sqrt{ac}}{b^2-c}$

43) $\sqrt{a} : (\sqrt{b}+\sqrt{c}) = \frac{\sqrt{ab}-\sqrt{ac}}{b-c}$

44) $(c\sqrt{a}+d\sqrt{b}) : (f\sqrt{h}+g\sqrt{l}) =$
$\frac{cf\sqrt{ah}+df\sqrt{bh}-cg\sqrt{al}-dg\sqrt{bl}}{hf^2-lg^2}$

45) $[(f^2-hg^2-m)\sqrt{m}-2gm\sqrt{h}] : (f+g\sqrt{h}+\sqrt{m})$
$= f\sqrt{m}-g\sqrt{hm}-m$

46) $1 : \sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} = \sqrt[n]{\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}}$

47) $\sqrt[n]{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} : \sqrt[n]{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \sqrt[n]{\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}}$

48) $1:(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})=\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}{a-b}$ *)

49) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})=$

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}+2\sqrt[4]{a^3b}+2\sqrt[4]{ab^3}}{a-b}$$

50) $\sqrt{(ab+\sqrt{af})}:\sqrt{a}=\sqrt{\left(b+\sqrt{\frac{f}{a}}\right)}$

e) Racines carrées d'un binome de la forme $A\pm\sqrt{B}$.

Formule.

$$\sqrt{(A\pm\sqrt{B})}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$$

Exemples.

1) $\sqrt{(7+4\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$
2) $\sqrt{(43-15\sqrt{8})}=5-3\sqrt{2}$
3) $\sqrt{(5-\sqrt{24})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$
4) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$
5) $\sqrt{(28+5\sqrt{12})}=5+\sqrt{3}$
6) $\sqrt{(87-12\sqrt{42})}=3\sqrt{7}-2\sqrt{6}$
7) $\sqrt{(\frac{3}{2}+\sqrt{2})}=1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$
8) $\sqrt{(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$
9) $\sqrt{(\sqrt{27}+2\sqrt{6})}=\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{3}$ **)
10) $\sqrt{(\sqrt{32}-\sqrt{24})}=\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$

---

*) On multiplie le diviseur et le dividende par $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$, puis on procède comme à l'ordinaire.

**) En mettant $\sqrt{27}$ au lieu de A.

11) $\sqrt{(3\sqrt{5}+\sqrt{40})} = \sqrt[4]{20}+\sqrt[4]{5}$

12) $\sqrt{(3\sqrt{6}+2\sqrt{12})} = \sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6}$

13) $\sqrt{(\sqrt{18}-4)} = \sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}$

14) $\sqrt{(a^2+b+2a\sqrt{b})} = a+\sqrt{b}$

15) $\sqrt{(ac^2+bd^2+2cd\sqrt{ab})} = c\sqrt{a}+d\sqrt{b}$

16) $\sqrt{[2a+2\sqrt{(a^2-b^2)}]} = \sqrt{(a+b)}+\sqrt{(a-b)}$

17) $\sqrt{[x-2\sqrt{(x-1)}]} = \sqrt{(x-1)}-1$

18) $\sqrt{\left[\frac{a^2}{4}+\frac{c}{2}\sqrt{(a^2-c^2)}\right]} = \frac{c+\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$

19) $\sqrt{(x+xy-2x\sqrt{y})} = (\sqrt{y}-1)\sqrt{x}$

20) $\sqrt{[ap-2a\sqrt{(ap-a^2)}]} = \sqrt{(ap-a^2)}-a$

21) $$\sqrt{\left[\frac{3a}{b} + \sqrt{\left(\frac{12a^3c^2}{bd^2} - \frac{4a^4c^4}{d^4}\right)}\right]}$$
$$= \frac{ac}{d} + \sqrt{\left(\frac{3a}{b} - \frac{a^2c^2}{d^2}\right)}$$

22) $$\sqrt{[b^2 - ab + \frac{a^2}{4} + \sqrt{(4ab^3 - 8a^2b^2 + a^3b)}]}$$
$$= \sqrt{ab} + \sqrt{\left(b^2 - 2ab + \frac{a^2}{4}\right)}.$$

V. *Puissances à exposans fractionnaires.*

Une puissance à exposant fractionnaire peut à la vérité être considérée comme un terme interpolé d'une série de puissances à exposans entiers; il me semble cependant que l'idée ordinaire, d'après laquelle un exposant fractionnaire désigne l'élévation d'une racine à une puissance, serait plus facile à saisir par les commençans. De cette manière on peut démontrer tous les théorèmes sur les quantités radicales, ainsi que ceux des logarithmes qui y sont fondés, avec la rigueur d'Euclide, et seulement par des signes. Au surplus, je soumets cette idée à l'examen des connoisseurs, sans prononcer moi-même.

---

1) Notation.

1) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = a^{-\frac{n}{m}}$

3) $\sqrt[m]{a^n b^p c^q} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{\frac{q}{m}} = (a^n b^p c^q)^{\frac{1}{m}}$

4) $\sqrt[m]{\dfrac{a^n b^p}{c^r d^s e^t}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{-\frac{r}{m}} d^{-\frac{s}{m}} e^{-\frac{t}{m}}$

5) $c\sqrt[4]{a^3} + \dfrac{d}{\sqrt[7]{a^2}} = ca^{\frac{3}{4}} + da^{-\frac{2}{7}}$

6) $\sqrt[5]{a^2bc} = a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}} = (a^2bc)^{\frac{1}{5}}$

7) $\sqrt[6]{\dfrac{a^5b^7}{c^{12}}} + \sqrt[8]{\dfrac{a^6b^4}{d^{20}}} = a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{7}{6}} c^{-2} + a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} d^{-\frac{5}{2}}$

8) $\dfrac{\sqrt{(c+d)}}{\sqrt[3]{c^5}} = (c+d)^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{5}{3}}$

9) $\dfrac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{(a+x)}} = a^{-\frac{1}{2}} (a+x)^{-\frac{1}{3}} (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

10) $\dfrac{\sqrt[3]{(a+b)^7c^4}}{\sqrt[5]{f^2}\cdot\sqrt[6]{g^2}} = \dfrac{c^{\frac{4}{3}}(a+b)^{\frac{7}{3}}}{f^{\frac{2}{5}} g^{\frac{1}{3}}} = c^{\frac{4}{3}} f^{-\frac{2}{5}} g^{-\frac{1}{3}} (a+b)^{\frac{7}{3}}$

---

2) Calcul des exposans fractionnaires.

a) Multiplication. *)

1) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

2) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$

3) $a^{-\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$

4) $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{29}{12}} = a^2\sqrt[12]{a^5}$

5) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} \times a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{21}{20}} = a\sqrt[20]{a}$

6) $a^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{7}{8}} = a^{-\frac{13}{8}} = \frac{1}{a\sqrt[8]{a^5}}$

7) $a^{-\frac{3}{4}}b^{-2} \times a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}c = a^{\frac{1}{12}}b^{-\frac{3}{2}}c = \frac{c}{b}\sqrt[12]{\frac{a}{b^6}}$

8) $\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}} \times \frac{a^{\frac{7}{8}}b}{c^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{15}{8}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{4}} = a^2\sqrt[8]{\frac{b^4}{ac^2}}$

9) $\sqrt[5]{a^{12}} \times \sqrt[7]{a^3} \times \sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{13}{5}} \cdot a^{\frac{3}{7}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{367}{105}} = a^3\sqrt[105]{a^{52}}$

10) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} = a^{\frac{2}{15}} \cdot a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[120]{a^{61}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[120]{a}$

11) $\sqrt[5]{\frac{(c^2-y^2)^3}{(a+x)^8}} \times \sqrt[6]{\frac{(c^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a+x}} = (c^2-y^2)^{\frac{17}{20}}(a+x)^{-\frac{53}{30}}$

$$= \frac{c^2-y^2}{(a+x)^2}\sqrt[60]{\frac{(a+x)^{14}}{(c^2-y^2)^9}}$$

12) $\frac{b}{\sqrt{a}} \times \sqrt[3]{ac} \times \frac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}} = ba^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} \times c^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{13}{12}}$

$$= c\sqrt[12]{\frac{b^6c}{a^2}}$$

---

*) L'addition et la soustraction des puissances à exposans fractionnaires ont été omises ici, parce qu'elles ne présentent aucune difficulté particulière.

13) $(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{b^2})\times(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[5]{b^2})=(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{2}{5}})\times(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{2}{5}})$
$=a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{4}{5}}=a\sqrt{a}-\sqrt[5]{b^4}$

14) $\left(5\sqrt[4]{a^7}-\frac{6ab}{\sqrt[4]{a}}\right)\times\left(\sqrt[3]{a}-\frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}}\right)=(5a^{\frac{7}{4}}-6a^{\frac{3}{4}}b)$
$\times(a^{\frac{1}{3}}-7a^{-\frac{2}{3}}b)=5a^{\frac{25}{12}}-41a^{\frac{13}{12}}b+42a^{\frac{1}{12}}b^2$
$=(5a^2-41ab+42b^2)\sqrt[12]{a}$

15) $\left(\sqrt[5]{ab^3}+3\sqrt[5]{\frac{b^8}{a^4}}\right)\times\left(\sqrt{ab}+\frac{2}{b^2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\left(a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}+3b^{\frac{8}{5}}a^{-\frac{4}{5}}\right)$
$\times\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}\right)=a^{\frac{7}{10}}b^{\frac{11}{10}}+2a^{-\frac{3}{10}}b^{-\frac{9}{10}}$
$+3a^{-\frac{3}{10}}b^{\frac{21}{10}}+6a^{-\frac{13}{10}}b^{\frac{1}{10}}=\left(ab+\frac{2}{b}+3b^2+\frac{6}{a}\right)\sqrt[10]{\frac{b}{a^3}}$

16) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{a^3b^2}}-\frac{2\sqrt[3]{b^2c^3}}{a\sqrt{a}}\right)\times\left(\sqrt[5]{a^2}-\frac{b}{\sqrt[5]{a^3}}\right)=$
$(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}-2a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}c)\times(a^{\frac{2}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}b)=$
$a^{-\frac{1}{10}}b^{-\frac{1}{3}}-2a^{-\frac{11}{10}}b^{\frac{2}{3}}c-a^{-\frac{11}{10}}b^{\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{21}{10}}b^{\frac{5}{3}}c=$
$\left(1-\frac{2bc}{a}-\frac{b}{a}+\frac{2b^2c}{a^2}\right)\sqrt[30]{\frac{1}{a^3b^{10}}}$

17) $\left(\frac{b}{c}\sqrt[5]{\frac{ad}{f}}-cd\sqrt[3]{\frac{ac}{bg}}\right)\times\left(\sqrt[5]{\frac{ab^5d}{c^5f}}+\sqrt[3]{\frac{ac^4d^3}{bg}}\right)=$
$\left[\frac{(ad)^{\frac{1}{5}}b}{cf^{\frac{1}{5}}}-\frac{(ac)^{\frac{1}{3}}cd}{(bg)^{\frac{1}{3}}}\right]\times\left[\frac{(ad)^{\frac{1}{5}}b}{cf^{\frac{1}{5}}}+\frac{(ac)^{\frac{1}{3}}cd}{(bg)^{\frac{1}{3}}}\right]=$
$\frac{(ad)^{\frac{2}{5}}b^2}{c^2f^{\frac{2}{5}}}-\frac{(ac)^{\frac{2}{3}}c^2d^2}{(bg)^{\frac{2}{3}}}=\frac{b^2}{c^2}\sqrt[5]{\frac{a^2d^2}{f^2}}-c^2d^2\sqrt[3]{\frac{a^2c^2}{b^2g^2}}$

b) Division.

1) $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq-np}{nq}}$

2) $a^{\frac{m}{n}}:a^{-\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}$

3) $a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$

4) $a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}} = a^{\frac{np-mq}{nq}} = a^{-\frac{mq-np}{nq}}$

5) $ca^{\frac{3}{4}} : da^{\frac{5}{6}} = \frac{ca^{-\frac{1}{12}}}{d} = \frac{c}{d\sqrt[12]{a}}$

6) $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{7}{5}}b^{-\frac{1}{4}}c = \frac{a^2b^{\frac{3}{4}}}{c} = \frac{a^2}{c}\sqrt[4]{b^3}$

7) $h : \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}}{cd^{\frac{1}{2}}} = \frac{ch\sqrt{d}}{\sqrt[12]{a^4b^3}}$

8) $\frac{a^{-\frac{9}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}d^3} : \frac{a^{-\frac{29}{4}}d^{\frac{11}{3}}}{b^{\frac{8}{5}}c} = \frac{a^{\frac{11}{4}}b^{\frac{34}{15}}c}{c^{\frac{1}{6}}d^{\frac{20}{3}}} = \frac{a^2b^2c}{d^7}\sqrt[60]{\frac{b^{16}d^{20}}{a^{15}c^{10}}} =$
$\frac{a^2b^2c}{d^7}\sqrt[12]{\frac{d^4}{a^3c^2}} \cdot \sqrt[15]{b^4}$

9) $(a^3 - 2\sqrt[4]{a^2b^3} - a^2\sqrt[6]{a^3b^2} + 2b\sqrt[12]{b}) : (\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})$
$= (a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}}) : (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}) =$
$a^{\frac{5}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{b^3}$

10) $\left(\sqrt[12]{a^{10}b^9} - c\sqrt[10]{a^7} \cdot \sqrt[6]{b^5} - \frac{3}{2}a\sqrt[4]{b^3} + \frac{3abc}{2}\sqrt[30]{\frac{1}{a^4b^5}}\right)$
$: (\sqrt{ab} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{a^4b^3}) = a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{4}} - ca^{\frac{7}{10}}b^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}ab^{\frac{3}{4}}$
$+ \frac{3}{2}ca^{\frac{13}{15}}b^{\frac{5}{6}}) : \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}} - ca^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{3}}$
$= \sqrt[12]{a^4b^3} - c\sqrt[15]{a^3b^5}$

11) $(5a^2 - 41ab + 42b^2)\sqrt[12]{a} : \left(\sqrt[3]{a} - \frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}}\right) =$
$(5a^{\frac{25}{12}} - 41a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2) : \left(a^{\frac{1}{3}} - 7ba^{-\frac{2}{3}}\right) =$
$5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b = (5a - 6b)\sqrt[4]{a^3}$

12) $(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}) : (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = (a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}) : (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})$
$= a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt[4]{ab}$

c) Puissances de puissances.

1) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

2) $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \frac{1}{\sqrt[nq]{a^{mp}}}$

3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \frac{1}{\sqrt[nq]{a^{mp}}}$

4) $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

5) $(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{2}{9}} = \sqrt[36]{a^9 b^8}$

6) $(a^2 b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{2}{5}})^{-\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{8}} c^{-\frac{1}{10}} = \sqrt[40]{\frac{b^5}{a^{20} c^4}}$

7) $\left[(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}}\right]^{-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{\frac{1}{a}}$

8) $\sqrt[6]{(a^3 b \sqrt[5]{a^3 bc})^5} = (a^{\frac{18}{5}} b^{\frac{6}{5}} c^{\frac{1}{5}})^{\frac{5}{6}} = a^3 b c^{\frac{1}{6}} = a^3 b \sqrt[6]{c}$

9) $\left[\frac{c^2 d}{(a+b)^{\frac{3}{2}}}\right]^{-\frac{1}{3}} = \frac{c^{-\frac{2}{3}} d^{-\frac{1}{3}}}{(a+b)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt[3]{c^2 d}} = \sqrt[6]{\frac{(a+b)^3}{c^4 d^2}}$

10) $\sqrt[4]{\left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}\right)^3} = (a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a^4 b}$

11) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{(c-d)} \cdot \sqrt[3]{(a+x^2)^4}}{c^6 d^{5m}}} = \left[\frac{(c-d)^{\frac{1}{2}} (a+x^2)^{\frac{4}{3}}}{c^6 d^{5m}}\right]^{\frac{1}{4}} =$

$$\frac{(c-d)^{\frac{1}{8}} (a+x^2)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{3}{2}} d^{\frac{5m}{4}}} = \frac{1}{cd^m} \sqrt[24]{\frac{(c-d)^3 (a+x^2)^8}{c^{12} d^{6m}}}$$

VI. *Calcul de quantités imaginaires.*

Il est impossible d'extraire une racine à exposans pairs d'une quantité négative; cette racine est une quantité imaginaire.

On en rencontre souvent de ce genre dans les calculs, lorsque, par la nature du problème, il est impossible de satisfaire aux conditions données, ou lorsque la forme supposée du résultat est impossible. Dans ce dernier cas, on n'a, à la vérité, que des formes idéales, cependant, en continuant le calcul, ces formes ne peuvent pas donner des résultats fautifs, parce qu'elles sont tirées de principes exacts. Elles sont d'une grande utilité dans le calcul; elles donnent quelquefois de nouvelles propositions imprévues, qu'on trouverait peut-être par d'autres voies, mais d'une manière moins directe.

On a $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$. On peut, de plus, démontrer rigoureusement que toutes les quantités imaginaires peuvent être réduites à la forme $h + k\sqrt{-1}$, h et k étant des quantités réelles; et les quantités imaginaires étant réduites à cette forme, le calcul en est très-facile.

---

1) Addition et soustraction.

1) $a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1} - d\sqrt{-1} = a + (b + c - d)\sqrt{-1}$

2) $3\sqrt{-4} - \sqrt{-25} + 4\sqrt{-9} = 13\sqrt{-1}$

3) $2\sqrt{-48} + 3\sqrt{-12} + 5\sqrt{-8} - 7\sqrt{-32} =$
$(14\sqrt{3} - 18\sqrt{2})\sqrt{-1}$

2) Multiplication.

1) $a \times \sqrt{-a} = a\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$

2) $c\sqrt{-a} \times d\sqrt{-b} = c\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times d\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$
$= -cd\sqrt{ab}$

3) $(c\sqrt{-a} + d\sqrt{-b} + f) \times \sqrt{-a} = -ac - d\sqrt{ab}$
$+ f\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$

4) $(2 - \sqrt{-3}) \times (10 - \sqrt{-8}) = 20 - \sqrt{24}$
$-(10\sqrt{3} + 4\sqrt{2})\sqrt{-1}$

5) $(7 - \sqrt{-5}) \times (10 - 3\sqrt{-6}) = 70 - 3\sqrt{30}$
$-(10\sqrt{5} + 21\sqrt{6})\sqrt{-1}$

6) $(3 - \sqrt{-5}) \times (4 - 2\sqrt{-5}) = 2 - 10\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}$

7) $(2 - 5\sqrt{-3}) \times (7 - 4\sqrt{-3}) = -46 - 43\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$

8) $(9 + 6\sqrt{-1}) \times (3 + 7\sqrt{-1}) = -15 + 81\sqrt{-1}$

9) $(7 - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}) \times (1 - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}) = \tfrac{13}{2} - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$

10) $(1 - \sqrt{-1})^2 = -2\sqrt{-1}$

11) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{-5}) \times (\sqrt{7} - \sqrt{-3}) = \sqrt{14} - 3\sqrt{15}$
$-(3\sqrt{35} + \sqrt{6})\sqrt{-1}$

12) $(2\sqrt{3} - \sqrt{-5}) \times (4\sqrt{3} - 2\sqrt{-5}) = 14 - 8\sqrt{-15}$

13) $(2\sqrt{-3} - 5\sqrt{-4} - 7\sqrt{-2}) \times (\sqrt{-7} - 2\sqrt{-1})$
$= -2\sqrt{21} + 5\sqrt{28} + 7\sqrt{14} + 4\sqrt{3} - 20 - 14\sqrt{2}$

14) $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})^2 = -(a + b + 2\sqrt{ab})$

15) $(a + \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}) \times (a - \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}) = a^2 + b$

16) $(a \pm \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})^2 = a^2 - b \pm 2a\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$

17) $(a \pm \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})^3 = a^3 - 3ab \pm (3a^2\sqrt{b} - b\sqrt{b})\sqrt{-1}$

18) $(a\sqrt{-1})^{4n} = a^{4n}$

19) $(a\sqrt{-1})^{4n+1} = a^{4n+1}\sqrt{-1}$

20) $(a\sqrt{-1})^{4n+2} = -a^{4n+2}$

21) $(a\sqrt{-1})^{4n+3} = -a^{4n+3}\sqrt{-1}$

3) Division.

1) $b\sqrt{-1} : c\sqrt{-1} = \frac{b}{c}$

2) $1 : \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

3) $a : b\sqrt{-1} = -\frac{a}{b}\sqrt{-1}$

4) $a : \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$

5) $(\sqrt{-12} + \sqrt{-6} + \sqrt{-9}) : \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

6) $(2\sqrt{8} - \sqrt{-10}) : -\sqrt{-2} = \sqrt{5} - 4\sqrt{-1}$

7) $(3\sqrt{-4} - 2\sqrt{-12} + \sqrt{6} - 9) : -3\sqrt{-2} = -\sqrt{2}$
$+ \frac{2}{3}\sqrt{6} + \left(\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{-1}$

8) $6 : (1 + \sqrt{-2}) = 2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$

9) $8 : (-1 + \sqrt{-3}) = -2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$

10) $1 : (3 - 2\sqrt{-3}) = \frac{3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{21}$

11) $14 : (4\sqrt{-3} - 2\sqrt{-5}) = -(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{-1}$

12) $(5 - \sqrt{-2}) : (1 + \sqrt{-2}) = 1 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$

13) $(4\sqrt{5} - 20) : (\frac{3}{2}\sqrt{-10} - 5\sqrt{-\frac{1}{2}}) = (\sqrt{10} + \sqrt{2})2\sqrt{-1}$

14) $[14 - \sqrt{15} - (7\sqrt{3} + 2\sqrt{5})\sqrt{-1}] : (7 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1})$
$= 2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$

15) $1 : [2 + (\sqrt{3} - \sqrt{5})\sqrt{-1}] =$
$\frac{12 + 2\sqrt{15} + (3\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{-1}}{42}$

4) Racine carrée d'un binome de la forme $A + B\sqrt{-1}$.

Formule.

$$\sqrt{(A + B\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2 + B^2)} + A}{2}}$$
$$+ \sqrt{\frac{\sqrt{(A^2 + B^2)} - A}{2}} \cdot \sqrt{-1}$$

Exemples.

1) $\sqrt{(7+6\sqrt{-2})} = \sqrt{(7+6\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1})} =$
$3+\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}$

2) $\sqrt{(31+42\sqrt{-2})} = 7+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}$

3) $\sqrt{(16-24\sqrt{-5})} = 6-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}$

4) $\sqrt{(-3+\sqrt{-16})} = 1+2\sqrt{-1}$

5) $\sqrt{(4\sqrt{-6}-2)} = 2+\sqrt{6}\cdot\sqrt{-1}$

6) $\sqrt{(-83-60\sqrt{-3})} = 5-6\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$

7) $\sqrt{(2+4\sqrt{-42})} = \sqrt{14}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$

8) $\sqrt{(-2-2\sqrt{-15})} = \sqrt{3}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}$

9) $\sqrt{\left(\frac{a^2c}{b^2}-cd+\frac{ac\sqrt{4d}}{b}\sqrt{-1}\right)} = \frac{a}{b}\sqrt{c}+\sqrt{cd}\cdot\sqrt{-1}$

10) $\sqrt{\left(\frac{25a^2d}{c^2}-\frac{4a^2b}{d}-\frac{20a^2\sqrt{b}}{c}\sqrt{-1}\right)} = \frac{5a\sqrt{d}}{c}$
$-2a\sqrt{\frac{b}{d}}\cdot\sqrt{-1}$

11) $\sqrt{[a^4f^4-a^3b^2-a^2b^3-2a^3bf^2\sqrt{(a+b)}\cdot\sqrt{-1}]}$
$= a^2f^2-ab\sqrt{(a+b)}\cdot\sqrt{-1}$

12) $\sqrt[4]{-1} = \sqrt{(0+\sqrt{-1})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

13) $\sqrt{(-\sqrt{-1})} = \sqrt{(0-\sqrt{-1})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

14) $\sqrt{(8\sqrt{-1})} = \sqrt{(0+8\sqrt{-1})} = 2+2\sqrt{-1}$

15) $\sqrt{\left(\frac{2c^2}{d^2}\cdot\sqrt{-1}\right)} = \frac{c}{d}(1+\sqrt{-1})$

16) $\sqrt{(2cd\sqrt{-1})} = (1+\sqrt{-1})\sqrt{cd}$

17) $\sqrt{(2+\sqrt{-3})} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

18) $\sqrt{(5-\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

VII. *Réductions.*

1) Réductions des fractions par l'addition.

1) $\frac{a}{b}+c=\frac{a+bc}{b}$

2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

3) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$

4) $\frac{3a}{5b}+\frac{c}{4d}+h=\frac{12ad+5bc+20bdh}{20bd}$

5) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}-\frac{g}{h}-k=$
$\frac{adfh+bcfh-bdeh-bdfg-bdfhk}{bdfh}$

6) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc-ac+ab}{abc}$

7) $\frac{3a}{4b}+\frac{5f}{8l}-\frac{x}{7y}=\frac{42aly+35bfy-8blx}{56bly}$

8) $\frac{af}{4bg}-\frac{5cd}{12bh}+\frac{2}{3}=\frac{3afh-5cdg+8bgh}{12bgh}$

9) $\frac{a}{4bcd}-\frac{h}{2bcg}+\frac{2cd}{5bg}=\frac{5ag-10dh+8c^2d^2}{20bcdg}$

10) $\frac{2a}{3bc}+\frac{5df}{8b^2c}-\frac{deg}{6b^2c^2}=\frac{16abc+15cdf-4deg}{24b^2c^2}$

11) $a-b-\frac{d}{ef}-\frac{c}{eg}=\frac{(a-b)efg-dg-cf}{efg}$

12) $e-f-\frac{g^3}{2ef}+\frac{f^m}{3eg}=\frac{6efg(e-f)-3g^4+2f^{m+1}}{6efg}$

13) $\frac{a^2d}{3b^7c^3}-\frac{3ad}{2b^4c^2}-\frac{b^2}{cd}=\frac{2a^2d^2-9ab^3cd^2-6b^9c^2}{6b^7c^3d}$

14) $\frac{a}{b^n}+\frac{c}{b^{n-r}}+\frac{d}{b^{n-2r}}=\frac{a+cb^r+db^{2r}}{b^n}$

15) $\frac{a}{x^n} - \frac{c}{x^{n-1}} + \frac{d}{x^{n-r-s}} = \frac{a - cx + dx^{r+s}}{x^n}$

16) $c + 2ab - 3ac - \frac{b^2c - 5ab^2c + a^3}{b^2 - bc} =$
$\frac{2ab^3 - bc^2 + 3abc^2 - a^3}{b^2 - bc}$

17) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$

18) $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$

19) $\frac{13a-5b}{4} - \frac{7a-2b}{6} - \frac{3a}{5} = \frac{89a-55b}{60}$

20) $\frac{3a-4b}{7} - \frac{2a-b-c}{3} + \frac{15a-4c}{12} = \frac{85a-20b}{84}$

21) $\frac{3a+2b}{c} - \frac{5bd-2a-3d}{4cd} = \frac{12ad+3bd+2a+3d}{4cd}$

22) $\frac{a}{b} + \frac{a-3b}{cd} + \frac{a^2-b^2-ab}{bcd} = \frac{acd-4b^2+a^2}{bcd}$

23) $cf + \frac{a^2}{c^5f} - \frac{a-b-c^2}{bc^5f^3} = \frac{bc^6f^4 + a^2bf^2 - a + b + c^2}{bc^5f^3}$

24) $\frac{3a+b+x}{5a} - \frac{2a+b}{3b} + \frac{7a-2b}{9a} = \frac{47ab-b^2+9bx-30a^2}{45ab}$

25) $\frac{3a^m(a+b)^{m-2}}{c^{m+2}d^{m-3}f^4} - \frac{a^{3m}-2acd^{4-m}}{c^{m+1}df^n(a+b)^2} - \frac{1}{c^{m-2}f^{n-3}(a+b)^2}$
$= \frac{3a^mf^{n-4}(a+b)^m - ca^{3m}d^{m-4} + 2ac^2 - c^4f^3d^{m-3}}{c^{m+2}d^{m-3}f^n(a+b)^2}$

26) $\frac{(a+x)^{\frac{p}{q}-1}}{3b^2(c+x)^{\frac{m}{n}}} - \frac{b^{\frac{2}{3}}x^2(c+x)^{-\frac{m}{n}}}{(a+x)^{1-\frac{p}{2q}}} = \frac{(a+x)^{\frac{p}{2q}} - 3b^{\frac{8}{3}}x^2}{3b^2(c+x)^{\frac{m}{n}}(a+x)^{1-\frac{p}{2q}}}$

27) $\frac{a}{a+z} + \frac{z}{a-z} = \frac{a^2+z^2}{a^2-z^2}$

28) $\frac{f+g}{3f-2g} - \frac{5f-2g}{2f-9g} = \frac{9fg-13f^2-13g^2}{6f^2-31fg+18g^2}$

29) $$\frac{a}{b+x}-\frac{c}{x}+\frac{3c}{4x}+2b=\frac{8bx^2+(8b^2+4a-c)x-bc}{4bx+4x^2}$$

30) $$\frac{3a+2x}{a+x}-\frac{5a-x}{a-x}+\frac{a}{2x}=\frac{a^3-4a^2x-11ax^2-2x^3}{2x(a^2-x^2)}$$

31) $$\frac{az}{a^2-z^2}-\frac{a-z}{a+z}=\frac{3az-a^2-z^2}{a^2-z^2}$$

32) $$\frac{ac}{a^2-4y^2}+\frac{bd}{ac+2cy}=\frac{ac^2+abd-2bdy}{c(a^2-4y^2)}$$

33) $$\frac{a^3}{(a+b)^3}-\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{b}{a+b}=\frac{a^3+ab^2+b^3}{(a+b)^3}$$

34) $$\frac{a^m}{(a+b)^n}+\frac{a^{m-2}b^r}{(a+b)^{n-1}}-\frac{a^{m-3}b^r}{(a+b)^{n-2}}$$
$$=\frac{a^m-a^{m-2}b^{r+1}-a^{m-3}b^{r+2}}{(a+b)^n}$$

35) $$\frac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}-\frac{x}{a-x}=\frac{2x^4+13a^2x^2-2a^3x-a^4}{(a^2-x^2)^2}$$

36) $$\frac{a-(n+1)a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^2(1-a^n)}{(1-a)^2}=\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$$

37) $$\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{m+1+(m-1)z^2}=\frac{m(1+z^2)}{m(1-z^4)+(1-z^2)^2}$$

38) $$\frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1-x}{4(1+x^2)}=$$
$$\frac{1+x+x^2}{1-x-x^4+x^5}$$

39) $$\frac{1+2x}{(3-x)(1+x)}+\frac{7}{(2+x)(1-3x)}+\frac{x}{(1+x)(2+x)}=$$
$$\frac{23+16x-30x^2-3x^3}{(3-x)(1+x)(2+x)(1-3x)}$$

40) $$\frac{3h}{(h-2x)^2}+\frac{2h+x}{(h+x)(h-2x)}-\frac{5}{h+x}=$$
$$\frac{20hx-22x^2}{(h+x)(h-2x)^2}$$

2) Réduction des fractions par la division *).

1) $\dfrac{ax+x^2}{3bx-cx}=\dfrac{a+x}{3b-c}$

2) $\dfrac{ac^3-bc^5-c^7}{3bc^2+c^4}=\dfrac{ac-bc^3-c^5}{3b+c^2}$

3) $\dfrac{21a^3b^2c-9ab^3c^2}{15a^2b^3c+3a^5b^4c^2-12ab^2c}=\dfrac{7a^2-3bc}{5a+a^4b^2c-4}$

4) $\dfrac{2a^{n+r}b^{m-1}c-4a^rb^{2m-1}c^2d+2a^{r+1}b^mc+6a^{r-1}b^{m-1}c^n}{8a^{r+5}b^{m+2}c^2-2a^{r+3}b^mc+10a^rb^3c^4}$

$$=\frac{a^n-2b^mcd+ab+3a^{-1}c^{n-1}}{4a^5b^3c-a^3b+5b^{4-m}c^3}$$

5) $\dfrac{14a^2-7ab}{10ac-5bc}=\dfrac{7a}{5c}$

6) $\dfrac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2}=\dfrac{2a^2x^3}{3b^2}$

7) $\dfrac{6ac+9bc-5c^2}{12adf+18bdf-10cdf}=\dfrac{c}{2df}$

---

*) Cette réduction par la division suppose qu'on peut trouver le diviseur commun du numérateur et du dénominateur d'une fraction. Presque tous les traités élémentaires d'arithmétique enseignent la méthode de trouver le diviseur commun de deux nombres; nous la supposons donc déjà connue. On peut se servir d'un procédé semblable pour les expressions algébriques; mais il entraîne souvent à de longs calculs. La résolution des équations donne aussi les facteurs, et peut quelquefois se pratiquer avec succès; cependant on réussit ordinairement mieux par l'exercice, en reflêchissant un peu sur la nature des expressions.

8) $\dfrac{45a^3b^4c+27a^8b^7cd-9a^4b^2d^3}{30a^2b^2c^3d^4+18a^7b^5c^3d^5-6a^3c^2d^7}=\dfrac{3ab^2}{2c^2d^4}$

9) $\dfrac{30a^{3n-1}b^rc^{r+2}-6a^{2n-4}b^3c^rd^{r-1}}{20a^nb^{r-1}c^2d^2-4a^{-3}b^2d^{r+1}}=\dfrac{3a^{2n-1}bc^r}{2d^2}$

10) $\dfrac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}=\dfrac{5a}{a-x}$

11) $\dfrac{a^3-x^3}{(a-x)^2}=\dfrac{a^2+ax+x^2}{a-x}$

12) $\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-1}=\dfrac{n-1}{n+1}$

13) $\dfrac{a^3+(1+a)ay+y^2}{a^4-y^2}=\dfrac{a+y}{a^2-y}$

14) $\dfrac{ac+bd+ad+bc}{af+2bx+2ax+bf}=\dfrac{c+d}{f+2x}$

15) $\dfrac{6ac+10bc+9ad+15bd}{6c^2+9cd-2c-3d}=\dfrac{3a+5b}{3c-1}$

16) $\dfrac{n^3-2n^2}{n^2-4n+4}=\dfrac{n^2}{n-2}$

17) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\dfrac{x-1}{x+2}$

18) $\dfrac{9x^3+53x^2-9x-18}{x^2+11x+30}=\dfrac{9x^2-x-3}{x+5}$

19) $\dfrac{2x^3+x^2-8x+5}{7x^2-12x+5}=\dfrac{2x^2+3x-5}{7x-5}$

20) $\dfrac{2x^3+3x^2+x}{x^3-x^2-2x}=\dfrac{2x+1}{x-2}$

21) $\dfrac{a^3b^3+c^3x^3}{a^2b^2-c^2x^2}=\dfrac{a^2b^2-abcx+c^2x^2}{ab-cx}$

22) $\dfrac{ax^m-bx^{m+1}}{a^2bx-b^3x^3}=\dfrac{x^{m-1}}{ab+b^2x}$

23) $\dfrac{2x^3-(3c+d+2)x^2+(3c+d)x}{x^4-x}=\dfrac{2x-3c-d}{x^2+x+1}$

24) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}=\dfrac{a+b+c}{a-b-c}$

25) $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}=\dfrac{a-2b}{a+b-c}$

26) $\dfrac{(a+b)\,(a+b+c)\,(a+b-c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=$

$\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}=\dfrac{a+b}{(c+a-b)(b-a+c)}$ *)

3) Réductions diverses.

1) $\sqrt{ax}+\dfrac{ax}{a-\sqrt{ax}}=\dfrac{a\sqrt{ax}}{a-\sqrt{ax}}=\dfrac{a\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

2) $\dfrac{c\sqrt{x}}{\sqrt{(a+x)}}+\dfrac{d\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}+\dfrac{a\sqrt{(ax^3+x^4)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}-\sqrt{(a^2-x^2)}$
$=\dfrac{c\sqrt{(ax-x^2)}+(ax+d)\sqrt{(ax+x^2)}+x^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$

3) $\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3x^2-1}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$

4) $\dfrac{ax^3}{(a+x)^{\frac{8}{3}}}+\dfrac{bx^2}{(a+x)^{\frac{5}{3}}}+\dfrac{cx}{(a+x)^{\frac{2}{3}}}=$
$\dfrac{(a+b+c)x^3+(ab+2ac)x^2+a^2cx}{(a+x)^2\sqrt[3]{(a+x)^2}}$

5) $\sqrt{\left(1-\dfrac{f^2}{(f-g)^2}\right)}=\dfrac{\sqrt{(g^2-2fg)}}{f-g}$

6) $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}=\dfrac{a^2-b+2a\sqrt{-b}}{a^2+b}$

---

*) Cette réduction offre au maître l'occasion de faire diverses observations.

$$7)\ \frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}=\frac{2(a^2-b)}{a^2+b}$$

$$8)\ \frac{\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}}=\frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

$$9)\ \frac{b}{\sqrt[n]{[a-\sqrt{(a^2-b^n)}]}}=\sqrt[n]{[a+\sqrt{(a^2-b^n)}]}$$

$$10)\ \sqrt{(a+\sqrt{b})}\pm\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{[2a\pm2\sqrt{(a^2-b)}]}\ ^{*)}$$

$$11)\ \sqrt{(a+\sqrt{-b})}\pm\sqrt{(a-\sqrt{-b})}=\sqrt{[2a\pm2\sqrt{(a^2+b)}]}$$

$$12)\ \sqrt{\left(\frac{abf+c^2}{bc}+\sqrt{\frac{4af}{b}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{abf+c^2}{bc}-\sqrt{\frac{4af}{b}}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{4af}{c}}$$

$$13)\ \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}}=\frac{(ad+bc)fh}{(eh+fg)bd}$$

$$14)\ \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}}{\frac{g}{h}+\frac{i}{k}+\frac{l}{m}}=\frac{(adf+bcf+bde)hkm}{(gkm+him+hkl)bdf}$$

$$15)\ \frac{\frac{a^3f^3}{b^2c^2}-\frac{a^4f}{bc}+a^2c}{\frac{a^2g}{bc^2d}-\frac{a^6c}{b^2g^2h}+\frac{a^3}{bc}}=\frac{(af^3-a^2bcf+b^2c^3)dg^2h}{bg^3h-a^4c^3d+abodg^2h}$$

---

*) La réduction à faire ici peut s'exécuter de deux manières, 1) en extrayant les racines de $a+\sqrt{b}$ et de $a-\sqrt{b}$ et en prenant leur somme; ou 2) en prenant le carré de toute la quantité, et en plaçant devant le carré le signe radical. Ceci s'applique aussi aux deux réductions suivantes.

16) $$\frac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}=\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2+b^2}$$

17) $$\frac{\frac{c^2}{d^2}-\frac{c^3}{a+b}}{\frac{c^2}{a+b}-\frac{c^4}{dh^2}}=\frac{(a+b-cd^2)h^2}{d^2h^2-(a+b)c^2d}$$

18) $$\frac{1+\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{\sqrt{(a^2+x^2)}+\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

19) $$\frac{\sqrt{(1-x)}+\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}}{1+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}}=\sqrt{(1-x)}$$

20) $$\frac{a^2+ax+x^2}{a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4}=\frac{a^3-x^3}{a^5-x^5}$$

21) $$\frac{a^3-a^2x+ax^2-x^3}{a^5-a^4x+a^3x^2-a^2x^3+ax^4-x^5}=\frac{a^4-x^4}{a^6-x^6}$$

22) $$\frac{a^2-2ax+4x^2}{a^3-2a^2x+4ax^2-8x^3}=\frac{a^3+8x^3}{a^4-16x^4}$$

23) $9\sqrt{(6\sqrt{28})}+3\sqrt{(12\sqrt{7})}-8\sqrt{(4\sqrt{63})}=8\sqrt[4]{63}$

24) $3\sqrt{(40\sqrt{12})}+2\sqrt{(5\sqrt{48})}-4\sqrt{(15\sqrt{27})}=4\sqrt[4]{75}$

25) $4\sqrt[3]{(6\sqrt{32})}+\sqrt[3]{(9\sqrt{162})}+2\sqrt[3]{(75\sqrt{50})}=21\sqrt[6]{18}$

26) $5\sqrt[3]{(4\sqrt[3]{192})}+7\sqrt[3]{(18\sqrt[3]{81})}=31\sqrt[9]{24}$

27) $3\sqrt[3]{(8+16\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+\sqrt{20})}=4\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}$

28) $3\sqrt[3]{(54-36\sqrt{27})}-\sqrt[3]{(16-16\sqrt{12})}=7\sqrt[3]{(2-4\sqrt{3})}$

29) $(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$ *)

30) $(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2 + a'^2c^2+b'^2c^2 = (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2)$

31) $(aa'+bb'+cc')^2+(ab'-ba')^2+(ac'-ca')^2 + (bc'-cb')^2 = (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$

32) $(aa'+bb'+cc'+dd')^2+(ab'-ba'+cd'-dc')^2 + (ac'-bd'-ca'+db')^2+(ad'+bc'-cb'-da')^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)$

33) $(a^2+Ab^2)(a'^2+Ab'^2) = (aa'\pm Abb')^2 + A(ab'\mp ba')^2$ **)

34) $(ab'-ba')(ab''-ba'')+(bc'-cb')(bc''-cb'') + (ca'-ac')(ca''-ac'') = (a^2+b^2+c^2)(a'a''+b'b''+c'c'') - (aa'+bb'+cc')(aa''+bb''+cc'')$

---

*) Quelquefois, à cause de la symétrie, on désigne les quantités par des lettres accentuées; alors toutes les lettres a, b, c, etc., a', b', c', etc., a'', b'', c'', etc., a''', b''', c''', etc. expriment des quantités différentes l'une de l'autre, qui, cependant, peuvent être d'égales valeurs.

**) Les formules 29, 30, 31, 32, 33, contiennent les solutions de quelques problèmes de l'analyse indéterminée qui se trouveront dans la suite. On s'assure de leur exactitude par le développement des carrés et des produits. On peut aussi profiter dans ce développement de quelques petits avantages qu'on trouvera aisément avec un peu d'attention.

VIII. *Logarithmes.*

Qu'est-ce qu'on appelle logarithme d'un nombre? Qu'est-ce qu'on appelle sa base? — Que veut dire l'expression suivante: le logarithme d'un nombre N est égal à 667, la base étant a? — Qu'est-ce qu'un système de logarithmes? Et quel est, particulièrement, celui de *Henri Briggs*? — Comment les trois formules fondamentales ci-après peuvent-elles s'énoncer? et comment peut-on les démontrer? — Pourrait-on bien admettre 1 comme base d'un système? — Quel est le logarithme de l'unité? — Si la base est > 1, le logarithme d'un nombre plus grand que 1 est positif, et au contraire, le logarithme d'un nombre moindre que 1 est négatif. Mais qu'arrive-t-il si la base est < 1? — Il y a peu de logarithmes qui soient des nombres entiers; les autres sont composés d'un nombre entier et d'une quantité fractionnaire, qui est toujours irrationnelle, c'est-à-dire qui ne peut être exprimée rigoureusement. — Comment nomme-t-on ce nombre entier et cette fraction? — Quelle est dans le système ordinaire la caractéristique d'un nombre qui tombe entre 10^n et 10^{n+1}? Et quelle est celle d'une fraction qui tombe entre $\frac{1}{10^n}$ et $\frac{1}{10^{n+1}}$?

Si les différences des nombres sont petites en comparaison de ces nombres mêmes, les différences de leurs logarithmes sont entr'elles à-peu-près comme les différences de ces nombres. Ceci ne peut être démontré que par la théorie des suites. A quoi servent les parties proportionnelles dans les grandes tables des logarithmes?

1) Formules fondamentales.

1) $\log AB = \log A + \log B$

2) $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$

3) $\log A^n = n \log A$

Observation. **Dans 3) n peut être une quantité positive ou négative, un nombre entier ou fractionnaire.**

---

2) Application de ces formules au calcul des logarithmes de produits, quotiens, puissances et racines.

a) Logarithmes des quantités littérales.

1) $\log abcd = \log a + \log b + \log c + \log d$

2) $\log \frac{fg}{cd} = \log f + \log g - \log c - \log d$

3) $\log a^m b^n c^p = m \log a + n \log b + p \log c$

4) $\log \frac{a^m b^{-n}}{c^p d^q} = m \log a - n \log b - p \log c - q \log d$

5) $\log a^{\frac{m}{n}} b^{-\frac{p}{q}} c = \frac{m}{n} \log a - \frac{p}{q} \log b + \log c$

6) $\log \sqrt[n]{a^m b^{-n} c^{\frac{p}{q}}} = \frac{m}{n} \log a - \log b + \frac{p}{nq} \log c$

7) $\log \frac{a\sqrt[n]{c^m}}{b\sqrt{d}} = \log a + \frac{m}{n} \log c - \log b - \frac{1}{2} \log d$

8) $\log \frac{(a+b)^n c^m}{(c+d)\sqrt[4]{d^3}} = n\log(a+b) + m\log c - \log(c+d)$
$- \frac{3}{4}\log d$

9) $\log \frac{1}{(a+b^n)^m} = -m\log(a+b^n)$

10) $\log \frac{1}{\sqrt[n]{(a+b)}} = -\frac{1}{n}\log(a+b)$

11) $\log \sqrt[m]{(a^2-x^2)} = \frac{1}{m}\log(a^2-x^2) = \frac{1}{m}\log(a+x)$
$+ \frac{1}{m}\log(a-x)$

12) $x\log a = \log a^x$

13) $n\log a + m\log b - p\log c = \log \frac{a^n b^m}{c^p}$

14) $n\log(a+y) + \log c - m\log(a-y) = \log \frac{c(a+y)^n}{(a-y)^m}$

15) $\frac{1}{n}\log(2a+3b) - \frac{2}{3}\log c = \log \frac{\sqrt[n]{(2a+3b)}}{\sqrt[3]{c^2}}$

b) Logarithmes ordinaires des quantités numériques.

1) $\log(93 \times 3514) = 5{,}5142847$
2) $\log(1225 \times 387) = 5{,}6758471$
3) $\log(628 \times 493) = 5{,}4908066$
4) $\log(3748 \times 1752 \times 4065) = 10{,}4263942$
5) $\log \frac{5}{4} = 0{,}0969100$
6) $\log \frac{39}{7} = 0{,}7459666$
7) $\log \frac{14}{3} = 0{,}6690068$
8) $\log 15\frac{3}{4} = 1{,}1972806$
9) $\log 7\frac{4}{13} = 0{,}8637803$

10) $\log 367\frac{5}{8} = 2{,}5654050$

11) $\log 187\frac{9}{11} = 2{,}2737376$

12) $\log \frac{2}{3} = 0{,}8239087 - 1$

13) $\log \frac{5}{8} = 0{,}7958800 - 1$

14) $\log \frac{1}{9} = 0{,}0457575 - 1$

15) $\log \frac{1}{26} = 0{,}5850267 - 2$

16) $\log \frac{6}{37} = 0{,}2099495 - 1$

17) $\log \frac{18}{1267} = 0{,}1524959 - 2$

18) $\log \frac{357}{695} = 0{,}7106834 - 1$

19) $\log \frac{1}{5432} = 0{,}2650402 - 4$

20) $\log \frac{8}{9243} = 0{,}9372770 - 4$

21) $\log \frac{3542}{7965} = 0{,}6480628 - 1$

22) $\log 3{,}5 = 0{,}5440680$

23) $\log 12{,}63 = 1{,}1014034$

24) $\log 15{,}432 = 1{,}1884222$

25) $\log 7348{,}4 = 3{,}8661928$

26) $\log 1{,}3567 = 0{,}1324838$

27) $\log 0{,}7 = 0{,}8450980 - 1$

28) $\log 0{,}036 = 0{,}5563025 - 2$

29) $\log 0{,}0065 = 0{,}8129134 - 3$

30) $\log 0{,}0039953 = 0{,}6015494 - 3$

31) $\log 0{,}0005637 = 0{,}7510480 - 4$

32) $\log \dfrac{319 \times 765}{138} = 3{,}2475730$

33) $\log \dfrac{213 \times 7{,}655}{3145 \times 718} = 0{,}8585798 - 4$

34) $\log \dfrac{3{,}5347 \times 2{,}685}{137{,}65 \times 5944} = 0{,}0644419 - 5$

35) $\log \frac{47 \times 0{,}653 \times 12\frac{5}{6}}{3576 \times 1520} = 0{,}8601095 - 5$

36) $\log \frac{0{,}765 \times 0{,}0018}{31457 \times 567\frac{5}{12}} = 0{,}8873146 - 11$

37) $\log \frac{0{,}018594 \times 763\frac{13}{15}}{7654{,}3 \times 794} = 0{,}3686643 - 6$

38) $\log 3^{15} = 7{,}1568188$ *)

39) $\log 5^{27} = 18{,}8721901$

40) $\log 16^{20} = 24{,}0823997$

41) $\log (\frac{7}{3})^{14} = 5{,}1516750$

42) $\log (\frac{15}{13})^{16} = 0{,}9943665$

43) $\log (\frac{12}{5})^{32} = 12{,}1667597$

44) $\log (\frac{3}{4})^{30} = 0{,}2518379 - 4$

45) $\log (\frac{357}{1432})^{12} = 0{,}7607024 - 8$

46) $\log (\frac{1}{14})^{125} = 0{,}7339955 - 144$

47) $\log [(14{,}418)^{9} \times (3{,}71)^{6}] = 13{,}8463886$

48) $\log [(0{,}0534)^{3} \times (\frac{32768}{3875})^{10}] = 5{,}4544061$

49) $\log \frac{(0{,}5936)^{20} \times 386}{(0{,}076)^{23}} = 23{,}7977525$

50) $\log \sqrt{5} = 0{,}3494850$

51) $\log \sqrt{73567} = 2{,}4333415$

52) $\log \sqrt[3]{135} = 0{,}7101112$

---

*) Pour trouver les logarithmes de puissances un peu élevées, jusqu'à la septième décimale, il faut se servir des tables qui contiennent plus de sept décimales: sans cela, les derniers chiffres des résultats ne s'accorderaient pas entièrement avec les nôtres.

53) $\log \sqrt[8]{15276} = 0{,}5230012$

54) $\log \sqrt[5]{35107} = 0{,}9090787$

55) $\log \sqrt[100]{13} = 0{,}0111394$

56) $\log \sqrt[7]{\tfrac{15}{4}} = 0{,}0820045$

57) $\log \sqrt[5]{\tfrac{4}{9}} = 0{,}9295635 - 1$

58) $\log \sqrt[16]{\tfrac{3587}{20593}} = 0{,}9525632 - 1$

59) $\log \sqrt[35]{\tfrac{803}{91056}} = 0{,}9412973 - 1$

60) $\log \sqrt[17]{(954)^{12}} = 2{,}1032106$

61) $\log \sqrt[11]{(\tfrac{12}{7})^{28}} = 0{,}5958482$

62) $\log \sqrt[13]{(\tfrac{547}{935})^{207}} = 0{,}2927210 - 4$

63) $\log \sqrt[14]{(\tfrac{1}{3})^{187}} = 0{,}6270232 - 7$

64) $\log \sqrt[16]{(\tfrac{14}{267})^{715}} = 0{,}7828746 - 58$

65) $\log \sqrt[80]{0{,}00534} = 0{,}9715943 - 1$

66) $\log \sqrt[540]{0{,}00007} = 0{,}9923057 - 1$

67) $\log \sqrt[12]{(0{,}34576)^{7}} = 0{,}7309519 - 1$

68) $\log \sqrt[32]{(356{,}27)^{11}} = 0{,}8771741$

69) $\log \sqrt[5]{\dfrac{0{,}365 \times \sqrt{2}}{788}} = 0{,}3632563 - 1$

70) $\log \sqrt[10]{\dfrac{78563\sqrt[3]{\frac{5}{3}}}{15\sqrt[4]{0{,}2}}} = 0{,}3967819$

71) $\log \sqrt[9]{\dfrac{347\sqrt[7]{0{,}0073}}{126\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}} = 0{,}0280126$

3) Usage des parties proportionnelles dans le calcul logarithmique.

a) Trouver les logarithmes des nombres qui excèdent les limites des tables.

1) log 1851273 = 6,2674705
2) log 14459809 = 7,1601626
3) log 10134761 = 7,0058135
4) log 7095137 = 6,8509608
5) log 506860900 = 8,7048888
6) log 3,614699 = 0,5580721
7) log 84,827567 = 1,9285370
8) log 211447,39 = 5,3252023
9) log 0,0013514133 = 0,1307882 — 3
10) log 0,0003599547 = 0,5562478 — 4
11) log $75907\frac{1}{8}$ = 4,8802825
12) log $32116\frac{7}{9}$ = 4,5067320
13) log $2528811\frac{1}{4}$ = 6,4029164
14) log $522076\frac{2}{13}$ = 5,7177339

b) Trouver les nombres dont les logarithmes ne sont pas contenus exactement dans les tables.

1) num. log 1,0742664 = 11,86496....
2) num. log 3,5947835 = 3933,538....
3) num. log 0,7813427 = 6,044254....
4) num. log 2,0037683 = 100,8714....
5) num. log 4,0005673 = 10013,07....

6) num. log 5,6165834 = 413602,7....

7) num. log 3,7694480 = 5880,956....

8) num. log 0,2307611 = 1,701222....

9) num. log 4,2923065 = 19602,27....

10) num. log 6,1785400 = 1508481,....

---

4) Calcul de quelques expressions numériques par les logarithmes.

1) $\sqrt[7]{8} = 1{,}345900....$

2) $\sqrt[4]{35246} = 13{,}70179....$

3) $\sqrt[12]{567348} = 3{,}016389....$

4) $\sqrt[6]{235{,}78} = 2{,}485522....$

5) $\sqrt[5]{\frac{13}{16}} = 0{,}959322....$

6) $\sqrt[7]{\frac{1171}{345}} = 1{,}190747....$

7) $\sqrt[3]{17705\frac{2}{9}} = 26{,}06356....$

8) $\sqrt[9]{1350\frac{7}{8}} = 2{,}227645....$

9) $\sqrt[8]{172\frac{5}{6}} = 1{,}904159....$

10) $\sqrt[13]{\frac{3348}{569}} = 1{,}146055....$

11) $(\frac{9}{8})^{21} = 11{,}86322....$

12) $(2\frac{5}{6})^{9} = 11767{,}35...$

13) $(\frac{643}{637})^{123} = 3{,}168104....$

14) $(317\frac{3}{4})^{0,6} = 31{,}71402....$

15) $(\frac{167}{53})^{0,32} = 1{,}443779....$

16) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,0537} = 0,982093\ldots.$

17) $\dfrac{(991,767)^5 \times 12,34}{(20,358 \times 10,1575)^6} = 151,4369\ldots.$

18) $\dfrac{(52072)^{13} \times \sqrt{(0,000734)^9}}{(255608)^8} = 8930,834\ldots.$

19) $\left(\dfrac{42666}{1147}\right)^{12} \times \left(\dfrac{765}{19432}\right)^{10} = 62756,88\ldots.$

20) $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}\right)} = 1,295695\ldots.$

21) $\sqrt[3]{\left(0,26 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = 0,596544\ldots.$

22) $\sqrt[5]{\dfrac{3425\sqrt[7]{136}}{0,00034}} = 28,94639\ldots.$

23) $253\sqrt[3]{\dfrac{716,5}{\sqrt{2}}} = 2016,914\ldots.$

24) $\sqrt[4]{\dfrac{132 \times (7,356)^9}{\sqrt{(3,25)^5}}} = 144,5972\ldots.$

25) $\dfrac{\sqrt[7]{(466871)^6} \times \sqrt[9]{(3576)^{16}}}{996003\sqrt{0,0071}} = 1788845,\ldots.$

26) $\sqrt[8]{(21 + \sqrt[6]{19})} = 1,476875\ldots.$

27) $\sqrt[3]{(5,03 + \sqrt[5]{0,2})} = 1,792020\ldots.$

28) $\sqrt[5]{(9,921 - 3\sqrt{5,02})} = 1,261866\ldots.$

29) $\sqrt[16]{\dfrac{43 + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}} = 1,264848\ldots.$

. . . .

Les théorèmes suivans, non difficiles à démontrer, méritent aussi d'être remarqués.

1) Désignons par A, B, deux systèmes de logarithmes dont les bases sont a, b. De plus soient x, y, les logarithmes d'un même nombre k dans ces deux systèmes; on a toujours $y : x :: \log a : \log b$, si l'on prend les deux derniers logarithmes dans un troisième système c quelconque.

2) On trouve donc le logarithme d'un nombre k dans le système B, en divisant le logarithme de k dans le système A par le logarithme de b dans le même système.

3) Donc les logarithmes de mêmes nombres dans deux différens systèmes sont dans un rapport constant.

4) Si l'on connaît le logarithme d'un même nombre dans deux différens systèmes, on peut toujours trouver un nombre par lequel il faut multiplier tous les logarithmes de l'autre. Nous appellerons ce nombre *Module*. Ordinairement cette expression ne désigne que le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes du système hyperbolique ou népérien dont la base est $2{,}718281828459\cdots$ pour trouver les logarithmes d'un autre système.

IX. *Théorème du binome et du polynome pour des exposans entiers et positifs.*

1) Théorème du binome.

Formules.

I. $(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$
$\pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$
$\pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 + \dots\dots\dots$
$\pm \frac{n(n-1)(n-2) \dots\dots\dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots\dots n} b^n$

Les $+$, dans cette formule, correspondent à $(a+b)^n$ et les $-$ à $(a-b)^n$. Le dernier terme est toujours $\doteq b^n$ et prend pour un n pair le signe $+$, et pour un n impair le signe $-$.

II. Le nombre des termes de la série est $= n+1$. La loi des exposans de a et de b est évidente. Les coefficiens vont en augmentant jusqu'au milieu; puis ils diminuent dans le même ordre et d'après la même loi; de manière que les coefficiens des termes également distants du premier et du dernier sont égaux. Pour un n pair il n'y a qu'un seul terme au milieu, lequel pour $(a+b)^n$ est

$$+\frac{n(n-1)(n-2) \dots\dots \left(\frac{n}{2}+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots \frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$

Pour $(a-b)^n$ ce terme prend le signe $-$, si n

est de la forme $4m+2$; dans les autres cas il prend le signe $+$. Pour un n impair il y a deux termes au milieu, lesquels pour $(a+b)^n$ sont

$$+\frac{n(n-1)\cdots\frac{n+3}{2}}{1\cdot 2\cdots\frac{n-1}{2}}a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}+\frac{n(n-1)\cdots\frac{n+1}{2}}{1\cdot 2\cdots\frac{n+1}{2}}a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots\frac{n+3}{2}}{1\cdot 2\cdots\frac{n-1}{2}}\left(+a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}+a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right).$$

Pour $(a-b)^n$ le premier terme prend le signe $+$, et le second, le signe $-$, si n est de la forme $4m+1$, et les signes contraires, si n est de la forme $4m+3$.

III. Le $(m+1)^{ième}$ terme général de la série est

$$\pm\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdots\cdots m}a^{n-m}b^m.$$

Dans $(a+b)^n$ tous les termes du développement ont le signe $+$; dans $(a-b)^n$ les termes impairs ont le signe $+$, et les termes pairs le signe $-$.

IV. La somme de tous les coefficiens de la série $(a+b)^n$, savoir $1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+$ etc. est $=(1+1)^n$ $=2^n$, et la somme algébrique de tous les coefficiens dans la série pour $(a-b)^n$, savoir $1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ $-$ etc. est $=(1-1)^n=0$.

V. Si l'on fait $\frac{b}{a}=Q$, et qu'on désigne le premier membre de la série par A, le second par B, le troisième par C et ainsi de suite, on a aussi

$$(a \pm b)^n = A \pm \frac{n}{1} AQ + \frac{n-1}{2} BQ \pm \frac{n-2}{3} CQ + \frac{n-3}{4} DQ$$
$$\pm \frac{n-4}{5} EQ \cdots\cdots;$$

formule très-commode pour calculer tous les termes par ceux qui les précèdent.

Exemples.

1) $(a \pm b)^1 = a \pm b$

2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

4) $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

5) $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

6) $(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

7) $(a \pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$

8) $(a \pm b)^8 = a^8 \pm 8a^7b + 28a^6b^2 \pm 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \pm 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \pm 8ab^7 + b^8$

9) $(a \pm b)^9 = a^9 \pm 9a^8b + 36a^7b^2 \pm 84a^6b^3 + 126a^5b^4 \pm 126a^4b^5 + 84a^3b^6 \pm 36a^2b^7 + 9ab^8 \pm b^9$

10) $(a \pm b)^{10} = a^{10} \pm 10a^9b + 45a^8b^2 \pm 120a^7b^3 + 210a^6b^4 \pm 252a^5b^5 + 210a^4b^6 \pm 120a^3b^7 + 45a^2b^8 \pm 10ab^9 + b^{10}$

11) $(1 \pm x)^{11} = 1 \pm 11x + 55x^2 \pm 165x^3 + 330x^4 \pm 462x^5 + 462x^6 \pm 330x^7 + 165x^8 \pm 55x^9 + 11x^{10} \pm x^{11}$

12) $(1 \pm x)^{12} = 1 \pm 12x + 66x^2 \pm 220x^3 + 495x^4 \pm 792x^5 + 924x^6 \pm 792x^7 + 495x^8 \pm 220x^9 + 66x^{10} \pm 12x^{11} + x^{12}$

13) $(5-4x)^4 = 625 - 2000x + 2400x^2 - 1280x^3 + 256x^4$

14) $(3-2x^2)^6 = 729 - 2916x^2 + 4860x^4 - 4320x^6$
$+2160x^8 - 576x^{10} + 64x^{12}$.

15) $(\frac{1}{2}x+2y)^7 = \frac{1}{128}x^7 + \frac{7}{32}x^6y + \frac{21}{8}x^5y^2 + \frac{35}{2}x^4y^3$
$+70x^3y^4 + 168x^2y^5 + 224xy^6 + 128y^7$

16) $(a^3+3ab)^9 = a^{27} + 27a^{25}b + 324a^{23}b^2 + 2268a^{21}b^3$
$+ 10206a^{19}b^4 + 30618a^{17}b^5 + 61236a^{15}b^6$
$+ 78732a^{13}b^7 + 59049a^{11}b^8 + 19683a^9b^9$

17) $(3ac-2bd)^5 = 243a^5c^5 - 810a^4c^4bd + 1080a^3c^3b^2d^2$
$-720a^2c^2b^3d^3 + 240acb^4d^4 - 32b^5d^5$

18) $(5a^2c^2d - 4abd^2)^4 = 625a^8c^8d^4 - 2000a^7bc^6d^5$
$+2400a^6b^2c^4d^6 - 1280a^5b^3c^2d^7 + 256a^4b^4d^8$

19) $\left(\frac{2ac}{b^2} + \frac{1}{4}bc^2d\right)^6 = 64a^6c^6b^{-12} + 48a^5c^7db^{-9}$
$+ 15a^4c^8d^2b^{-6} + \frac{5}{2}a^3c^9d^3b^{-3} + \frac{15}{64}a^2c^{10}d^4$
$+\frac{3}{256}ab^3c^{11}d^5 + \frac{1}{4096}b^6c^{12}d^6$.

20) $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^4 = a^2 + 6ab + b^2 \pm (4a+4b)\sqrt{ab}$

21) $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^7 = (a^3 + 21a^2b + 35ab^2 + 7b^3)\sqrt{a}$
$\pm(7a^3 + 35a^2b + 21ab^2 + b^3)\sqrt{b}$

22) $(a+b)^n + (a-b)^n = 2\Big(a^n + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2$
$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2\ .\ 3\ .\ 4}a^{n-4}b^4 + \frac{n\ldots.n-5}{1\ldots\ldots6}a^{n-6}b^6$
$+\ldots\ldots\Big)$ *)

23) $(a+b)^n - (a-b)^n = 2\Big(\frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^{n-3}b^3$
$+\frac{n\ldots n-4}{1\ldots..5}a^{n-5}b^5 + \frac{n\ldots n-6}{1\ldots..7}a^{n-7}b^7 + \ldots..\Big)$

---

*) Il faut continuer les séries 22, 23, 24, 25, 26, jusqu'à ce qu'elles se terminent, c'est-à-dire jusqu'à ce que tous les coefficiens deviennent $= 0$.

24) $(a \pm b\sqrt{-1})^n = a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$
$+ \frac{n \cdots n-3}{1 \cdots 4} a^{n-4} b^4 - \text{ꝛc.} \pm \left(\frac{n}{1} a^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3\right.$
$\left. + \frac{n \cdots n-4}{1 \cdots 5} a^{n-5} b^5 - \text{ꝛc.}\right) \sqrt{-1}$

25) $(a+b\sqrt{-1})^n + (a-b\sqrt{-1})^n =$
$2\left[a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdots n-3}{1 \cdots 4} a^{n-4} b^4 - \text{ꝛc.}\right]$ *)

26) $\frac{(a+b\sqrt{-1})^n - (a-b\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}} =$
$2\left[na^{n-1} b - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \cdots n-4}{1 \cdots 5} a^{n-5} b^5 - \text{ꝛc.}\right]$

Calcul de quelques termes.

27) Le 3^{me} terme de $(a+b)^{15}$ est $= 105a^{13}b^2$
28) — 5^{me} — — $(a+b)^{16}$ est $= 1820a^{12}b^4$
29) — 6^{me} — — $(a-b)^{30}$ est $= -142506a^{25}b^5$
30) — 4^{me} — — $(a-b)^{100}$ est $= -161700a^{97}b^3$
31) — 5^{me} — — $(a^2-b^2)^{12}$ est $= 495a^{16}b^8$
32) — 9^{me} — — $(2ab-cd)^{14}$ est $= 192192a^6b^6c^8d^8$
33) Le terme moyen de $(a-b)^{16}$ est $= 12870a^8b^8$
34) — — — — $(a-b)^{18}$ est $= -48620a^9b^9$
35) Les deux termes moyens de $(a-b)^{17}$ sont
$24310a^9b^8 - 24310a^8b^9$
36) — — — — — $(a-b)^{19}$ sont
$-92378a^{10}b^9 + 92378a^9b^{10}$

---

*) Par conséquent $(a+b\sqrt{-1})^n + (a-b\sqrt{-1})^n$ de même que $[(a+b\sqrt{-1})^n - (a-b\sqrt{-1})^n] : \sqrt{-1}$ est une quantité réelle.

2) Théorème du polynome.

Formules.

I. Le terme général de la puissance $n^{ième}$ du polynome $a+b+c+d\cdots\cdots+x$ est

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}{1\cdot2\cdots\alpha\times1\cdot2\cdots\beta\times1\cdot2\cdots\gamma\times\cdots\cdots\times1\cdot2\cdots\xi}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots\cdots x^{\xi}$$

et on en déduira tous les termes du développement de $(a+b+c+\cdots+x)^n$, en admettant successivement pour α, β, γ, etc. tous les systèmes de valeurs entières et positives, y compris zéro, qui pourront satisfaire à la condition $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\xi=n$.

II. Si le polynome $a+b+c+d\cdots\cdots+x$ a m termes, la puissance $n^{ième}$ aura

$$\frac{m(m+1)(m+2)\cdots\cdots\cdots(m+n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots n}$$

termes.

La somme de tous les coefficiens sera $=m^n$

III. Si, pour abréger, on fait $b+c+d\cdots\cdots+x=p$ on a

$$(a+b+c+d\cdots\cdots+x)^n=(a+p)^n=$$
$$a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}p+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}p^2+\cdots\cdots\cdots+p^n,$$

formule qui, dans plusieurs cas, peut être utile.

Exemples.

1) $(a+b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$

2) $(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc$
$+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

3) $(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+12a^2bc$
$+6a^2c^2+4ab^3+12ab^2c+12abc^2+4ac^3+b^4$
$+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$

4) $(a+b+c)^5=a^5+5a^4b+5a^4c+10a^3b^2+20a^3bc$
$+10a^3c^2+10a^2b^3+30a^2b^2c+30a^2bc^2+10a^2c^3$

$+5ab^4+20ab^3c+30ab^2c^2+20abc^3+5ac^4+b^5$
$+5b^4c+10b^3c^2+10b^2c^3+5bc^4+c^5$

5) $(a+b+c)^6=a^6+6a^5b+6a^5c+15a^4b^2+30a^4bc$
$+15a^4c^2+20a^3b^3+60a^3b^2c+60a^3bc^2+20a^3c^3$
$+15a^2b^4+60a^2b^3c+90a^2b^2c^2+60a^2bc^3+15a^2c^4$
$+6ab^5+30ab^4c+60ab^3c^2+60ab^2c^3+30abc^4$
$+6ac^5+b^6+6b^5c+15b^4c^2+20b^3c^3+15b^2c^4$
$+6bc^5+c^6$

6) $(a+b+c)^7=a^7+7a^6b+7a^6c+21a^5b^2+42a^5bc$
$+21a^5c^2+35a^4b^3+105a^4b^2c+105a^4bc^2+35a^4c^3$
$+35a^3b^4+140a^3b^3c+210a^3b^2c^2+140a^3bc^3$
$+35a^3c^4+21a^2b^5+105a^2b^4c+210a^2b^3c^2$
$+210a^2b^2c^3+105a^2bc^4+21a^2c^5+7ab^6+42ab^5c$
$+105ab^4c^2+140ab^3c^3+105ab^2c^4+42abc^5$
$+7ac^6+b^7+7b^6c+21b^5c^2+35b^4c^3+35b^3c^4$
$+21b^2c^5+7bc^6+c^7$

7) $(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+2ac+2ad+b^2$
$+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$

8) $(a+b+c+d)^3=a^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3ab^2$
$+6abc+6abd+3ac^2+6acd+3ad^2+b^3$
$+3b^2c+3b^2d+3bc^2+6bcd+3bd^2+c^3+3c^2d$
$+3cd^2+d^3$

9) $(a+b+c+d)^4=a^4+4a^3b+4a^3c+4a^3d+6a^2b^2$
$+12a^2bc+12a^2bd+6a^2c^2+12a^2cd+6a^2d^2$
$+4ab^3+12ab^2c+12ab^2d+12abc^2+24abcd$
$+12abd^2+4ac^3+12ac^2d+12acd^2+4ad^3+b^4$
$+4b^3c+4b^3d+6b^2c^2+12b^2cd+6b^2d^2+4bc^3$
$+12bc^2d+12bcd^2+4bd^3+c^4+4c^3d+6c^2d^2$
$+4cd^3+d^4$

10) $(a+b+c+d)^5=a^5+5a^4b+5a^4c+5a^4d+$
$10a^3b^2+20a^3bc+20a^3bd+10a^3c^2+20a^3cd+$

$10a^3d^2+10a^2b^3+30a^2b^2c+30a^2b^2d+30a^2bc^2$
$+60a^2bcd+30a^2bd^2+10a^2c^3+30a^2c^2d+30a^2cd^2$
$+10a^2d^3+5ab^4+20ab^3c+20ab^3d+30ab^2c^2$
$+60ab^2cd+30ab^2d^2+20abc^3+60abc^2d+$
$60abcd^2+20abd^3+5ac^4+20ac^3d+30ac^2d^2$
$+20acd^3+5ad^4+b^5+5b^4c+5b^4d+10b^3c^2$
$+20b^3cd+10b^3d^2+10b^2c^3+30b^2c^2d+30b^2cd^2$
$+10b^2d^3+5bc^4+20bc^3d+30bc^2d^2+20bcd^3$
$+5bd^4+c^5+5c^4d+10c^3d^2+10c^2d^3+5cd^4+d^5$

11) $(a+2b-c)^3=a^3+6a^2b-3a^2c+12ab^2-12abc$
$+3ac^2+8b^3-12b^2c+6bc^2-c^3$

12) $\left(3a-5b-\frac{2c}{3}\right)^4=81a^4-540a^3b-72a^3c+1350a^2b^2$
$+360a^2bc+24a^2c^2-1500ab^3-600ab^2c-80abc^2$
$-\frac{32}{9}ac^3+625b^4+\frac{1000}{3}b^3c+\frac{200}{3}b^2c^2+\frac{160}{27}bc^3$
$+\frac{16}{81}c^4$

13) $(7a^2-3ab+4b^2)^3=343a^6-441a^5b+777a^4b^2$
$-531a^3b^3+444a^2b^4-144ab^5+64b^6$

14) $\left(\frac{2b^3c}{3a^4}+7a^2b-\frac{1}{2}\right)^5=\frac{32}{243}a^{-20}b^{15}c^5+\frac{560}{81}a^{-14}b^{13}c^4$
$-\frac{40}{81}a^{-16}b^{12}c^4+\frac{3920}{27}a^{-8}b^{11}c^3-\frac{560}{27}a^{-10}b^{10}c^3+$
$\frac{20}{27}a^{-12}b^9c^3+\frac{13720}{9}a^{-2}b^9c^2-\frac{980}{3}a^{-4}b^8c^2+$
$\frac{70}{3}a^{-6}b^7c^2-\frac{5}{9}a^{-8}b^6c^2-\frac{24010}{3}a^4b^7c-\frac{6860}{3}a^2b^6c$
$+245b^5c-\frac{35}{3}a^{-2}b^4c+\frac{5}{24}a^{-4}b^3c+16807a^{10}b^5$
$-\frac{12005}{2}a^8b^4+\frac{1715}{2}a^6b^3-\frac{245}{4}a^4b^2+\frac{35}{16}a^2b-\frac{1}{32}$

15) $\left(\frac{2ab}{c^m}-5a^3c^{3m}-3ab^2+\frac{b}{2a}\right)^3=8a^3b^3c^{-3m}-$
$60a^5b^2c^m-36a^3b^4c^{-2m}+6ab^3c^{-2m}+150a^7bc^{5m}$
$+180a^5b^3c^{2m}-30a^3b^2c^{2m}+54a^3b^5c^{-m}-18ab^4c^{-m}$
$+\frac{3}{2}a^{-1}b^3c^{-m}-125a^9c^{9m}-225a^7b^2c^{6m}+\frac{75}{2}a^5bc^{6m}$
$-135a^5b^4c^{3m}+45a^3b^3c^{3m}-\frac{15}{4}ab^2c^{3m}-27a^3b^6$
$+\frac{27}{2}ab^5-\frac{9}{4}a^{-1}b^4+\frac{1}{8}a^{-3}b^3$

X. *Des Progressions.*

1) Progressions arithmétiques.

I. Si a désigne le premier, et t le dernier terme, n le nombre des termes, d la différence et s la somme d'une progression arithmétique: on a

1) $t = a + (n-1)d;$

2) $s = (a+t)\frac{n}{2} = [2a + (n-1)d]\frac{n}{2}.$

A l'aide de ces deux formules, on peut trouver les valeurs de t et s lorsque les valeurs de a, d et de n sont données.

Exemples.

N°.	Valeurs données.			Valeurs cherchées.	
1	$a=1$,	$d=1$,	$n=14$	$t=14$,	$s=105$
2	$a=2$,	$d=3$,	$n=17$	$t=50$,	$s=442$
3	$a=7$,	$d=\frac{1}{4}$,	$n=16$	$t=10\frac{3}{4}$,	$s=142$
4	$a=2\frac{1}{2}$,	$d=\frac{1}{3}$,	$n=100$	$t=35\frac{1}{2}$,	$s=1900$
5	$a=\frac{3}{4}$,	$d=\frac{1}{8}$,	$n=26$	$t=3\frac{7}{8}$,	$s=60\frac{1}{8}$
6	$a=\frac{5}{7}$,	$d=1\frac{2}{3}$,	$n=13$	$t=20\frac{5}{7}$,	$s=139\frac{2}{7}$
7	$a=-7$,	$d=3$,	$n=8$	$t=14$,	$s=28$
8	$a=-6$,	$d=\frac{3}{4}$,	$n=30$	$t=15\frac{3}{4}$,	$s=146\frac{1}{4}$
9	$a=\frac{1}{2}$,	$d=-\frac{1}{8}$,	$n=20$	$t=-1\frac{7}{8}$,	$s=-13\frac{3}{4}$
10	$a=3\frac{1}{3}$,	$d=-2\frac{5}{6}$,	$n=15$	$t=-36\frac{1}{3}$,	$s=-247\frac{1}{2}$
11	$a=0$,	$d=\frac{1}{2}$,	$n=11$	$t=5$,	$s=27\frac{1}{2}$
12	$a=-10$,	$d=-2$,	$n=6$	$t=-20$,	$s=-90$
13	$a=-\frac{3}{4}$,	$d=-\frac{7}{8}$,	$n=25$	$t=-21\frac{3}{4}$,	$s=-281\frac{1}{4}$

II. Si des cinq quantités a, d, n, t, s, trois sont données, on peut toujours trouver les deux autres d'après le tableau suivant.

Tableau de formules pour les progressions arithmétiques.

N°.	Donné.	Cherché.	Formules.
1	$a,\ d,\ n$	t	$t=a+(n-1)d$
2	$a,\ d,\ s$		$t=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2]}$
3	$a,\ n,\ s$		$t=\frac{2s}{n}-a$
4	$d,\ n,\ s$		$t=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$
5	$a,\ d,\ n$	s	$s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$
6	$a,\ d,\ t$		$s=\frac{a+t}{2}+\frac{(t+a)(t-a)}{2d}$
7	$a,\ n,\ t$		$s=\frac{1}{2}n(a+t)$
8	$d,\ n,\ t$		$s=\frac{1}{2}n[2t-(n-1)d]$
9	$a,\ n,\ t$	d	$d=\frac{t-a}{n-1}$
10	$a,\ n,\ s$		$d=\frac{2s-2an}{n(n-1)}$
11	$a,\ t,\ s$		$d=\frac{(t+a)(t-a)}{2s-t-a}$
12	$n,\ t,\ s$		$d=\frac{2nt-2s}{n(n-1)}$

N°.	Donné.	Cherché.	Formules.
13	$a,\ d,\ t$		$n=1+\frac{t-a}{d}$
14	$a,\ d,\ s$		$n=\frac{d-2a}{2d}\pm\sqrt{\left[\frac{2s}{d}+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$
15	$a,\ t,\ s$	n	$n=\frac{2s}{a+t}$
16	$d,\ t,\ s$		$n=\frac{2t+d}{2d}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2-\frac{2s}{d}\right]}$
17	$d,\ n,\ t$		$a=t-(n-1)d$
18	$d,\ n,\ s$		$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$
19	$d,\ t,\ s$	a	$a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[(t+\frac{1}{2}d)^2-2ds]}$
20	$n,\ t,\ s$		$a=\frac{2s}{n}-t$

....

Qu'est-ce qu'on appelle une série arithmétique du premier, second, troisième etc. ordre? et comment peut-on trouver les séries des ordres suivans par la série du premier ordre a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, etc.?

Qu'est-ce que c'est que des nombres figurés? et comment peut-on les trouver par la série 1, $1+d$, $1+2d$, etc.? qu'est-ce particulièrement que les nombres polygonaux et pyramidaux? *)

*) L'expression du terme général dans les séries ci-après, se trouve facilement par une simple soustraction, ou réciproquement par l'addition; car il suffit de soustraire, du terme général de chaque série, le terme qui le précède immédiatement pour obtenir le

Séries du premier ordre dont le premier terme est 1.

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \cdots\cdots\cdots\ n$
$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \cdots\cdots\cdots\ 2n-1$
$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16 \cdots\cdots\cdots\ 3n-2$
$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21 \cdots\cdots\cdots\ 4n-3$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d \cdots\cdots\ dn-d+1$

Nombres polygonaux.

$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21 \cdots\cdots\cdots \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$
$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36 \cdots\cdots\cdots\ n^2$
$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51 \cdots\cdots\cdots \frac{n(3n-1)}{1\cdot 2}$
$1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ 66 \cdots\cdots\cdots\ n(2n-1)$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d \cdots\cdots \frac{n(dn-d+2)}{1\cdot 2}$

Nombres pyramidaux.

$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56 \cdots\cdots\cdots \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$
$1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91 \cdots\cdots\cdots \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$

---

terme général de la série d'où elle est tirée par la sommation. Par exemple on tire du terme général des nombres triangulaires $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ le terme général des nombres naturels $= \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} - \frac{(n-1)n}{1\cdot 2} = n$.

$1, 6, 18, 40, 75, 126 \ldots\ldots \frac{n^2(n+1)}{1 \cdot 2}$

$1, 7, 22, 50, 95, 161 \ldots\ldots \frac{n(n+1)(4n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

....

$1, 3+d, 6+4d, 10+10d \ldots \frac{n(n+1)(dn-d+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Séries formées par l'addition des nombres naturels.

$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots n$

$1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots\ldots \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

$1, 4, 10, 20, 35, 56 \ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$1, 5, 15, 35, 70, 126 \ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

etc.

---

2) Progressions géométriques.

I. Si le premier terme d'une progression géométrique est a, le quotient e, le dernier terme t et la somme s, on a:

1) $t = ae^{n-1}$

2) $s = \frac{et-a}{e-1} = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$

au moyen de ces deux formules, on peut trouver les valeurs de t et s, lorsque les valeurs de a, e et n sont données.

N°.	Valeurs données.			Valeurs cherchées.	
1	$a=1$,	$e=2$,	$n=7$	$t=64$,	$s=127$
2	$a=4$,	$e=3$,	$n=10$	$t=78732$,	$s=118096$
3	$a=5$,	$e=4$,	$n=9$	$t=327680$,	$s=436905$
4	$a=9$,	$e=\frac{7}{4}$,	$n=7$	$t=258\frac{2073}{4096}$,	$s=591\frac{741}{4096}$
5	$a=6\frac{1}{4}$,	$e=\frac{3}{2}$,	$n=8$	$t=106\frac{403}{512}$,	$s=307\frac{441}{512}$
6	$a=6$,	$e=\frac{3}{4}$,	$n=6$	$t=1\frac{217}{512}$,	$s=19\frac{373}{512}$
7	$a=8$,	$e=\frac{1}{2}$,	$n=15$	$t=\frac{1}{2048}$,	$s=15\frac{2047}{2048}$
8	$a=3\frac{1}{2}$,	$e=\frac{3}{5}$,	$n=8$	$t=\frac{15309}{151250}$,	$s=8\frac{45237}{75625}$
9	$a=\frac{5}{6}$,	$e=\frac{2}{3}$,	$n=11$	$t=\frac{2560}{177147}$,	$s=2\frac{166907}{354294}$
10	$a=3$,	$e=\frac{7}{5}$,	$n=25$	$t=9642{,}59\cdots$,	$s=33741{,}59\cdots$
11	$a=7\frac{1}{2}$,	$e=\frac{27}{20}$,	$n=31$	$t=60964{,}11\cdots$,	$s=235125{,}85\cdots$
12	$a=63$,	$e=\frac{157}{132}$,	$n=58$	$t=1238530{,}19\cdots$	$s=7777637{,}01\cdots$
13	$a=5560$,	$e=\frac{9}{11}$,	$n=40$	$t=2{,}219309\cdots$	$s=30570{,}01310\cdots$
14	$a=393\frac{1}{3}$,	$e=\frac{6}{12}$,	$n=17$	$t=0{,}0003246241\cdots$,	$s=674{,}2854824\cdots$
15	$a=1$,	$e=\frac{1}{2}$,	$n=\infty$	$t=0$,	$s=2$
16	$a=40$,	$e=\frac{3}{7}$,	$n=\infty$	$t=0$,	$s=70$
17	$a=9$,	$e=\frac{2}{3}$,	$n=\infty$	$t=0$,	$s=27$

Dans les exemples 10, 11, 12, 13, 14 les valeurs de t se trouvent aisément par les logarithmes; et de ces valeurs, on trouve alors les valeurs de s.

. . . .

Quelle est la somme de la progression géométrique des n termes: a, b, $\frac{b^2}{a}$, $\frac{b^3}{a^2}$, $\frac{b^4}{a^3}$, ... $\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$? et quelle en serait la somme si le nombre des termes était infiniment grand?

Rép. La somme de la progression finie est $= \frac{b^n - a^n}{(b-a)a^{n-2}} = \frac{a^n - b^n}{(a-b)a^{n-2}}$; la somme de la progression infinie est $= \frac{a^2}{a-b}$.

Quelle est la somme de la série géométrique infinie $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} -$ etc.?

Rép. $\frac{a^2}{a+b}$.

Comment peut-on convertir la fraction décimale périodique $0{,}868686\cdots\cdots = 86(0{,}01 + 0{,}0001 + 0{,}000001 + \cdots\cdots)$ en une fraction ordinaire?

Rép. Par $\frac{86}{99}$.

Comment la fraction décimale périodique $0{,}375375375\cdots\cdots$?

Rép. Par $\frac{375}{999} = \frac{125}{333}$.

Comment encore la fraction décimale périodique $0{,}142857\cdots\cdots$ dont la période est 142857?

Rép. Par $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

Donc toute fraction décimale périodique peut être convertie en une fraction ordinaire.

. . . .

II. Si, des quantités *a*, *e*, *n*, *t*, *s*, trois sont données, on peut toujours trouver les deux autres par le tableau suivant.

Tableau de formules pour les progressions géométriques.

N°.	Donné.	Cherché.	Formules.
1	$a,\ e,\ n$	t	$t=ae^{n-1}$
2	$a,\ e,\ s$		$t=\dfrac{a+(e-1)s}{e}$
3	$a,\ n,\ s$		$t(s-t)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$
4	$e,\ n,\ s$		$t=\dfrac{(e-1)se^{n-1}}{e^n-1}$
5	$a,\ e,\ n$	s	$s=\dfrac{a(e^n-1)}{e-1}$
6	$a,\ e,\ t$		$s=\dfrac{et-a}{e-1}$
7	$a,\ n,\ t$		$s=\dfrac{t^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}}$
8	$e,\ n,\ t$		$s=\dfrac{t(e^n-1)}{(e-1)e^{n-1}}$
9	$e,\ n,\ t$	a	$a=\dfrac{t}{e^{n-1}}$
10	$e,\ n,\ s$		$a=\dfrac{(e-1)s}{e^n-1}$
11	$e,\ t,\ s$		$a=et-(e-1)s$
12	$n,\ t,\ s$		$a(s-a)^{n-1}-t(s-t)^{n-1}=0$

Nº	Donné.	Cherché.	Formules.
13	a, n, t	e	$e=\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$
14	a, n, s	e	$e^n-\frac{s}{a}e+\frac{s-a}{a}=0$
15	a, t, s	e	$e=\frac{s-a}{s-t}$
16	n, t, s	e	$e^n-\frac{s}{s-t}e^{n-1}+\frac{t}{s-t}=0$
17	a, e, t	n	$n=\frac{\log t-\log a}{\log e}+1$
18	a, e, s	n	$n=\frac{\log[a+(e-1)s]-\log a}{\log e}$
19	a, t, s	n	$n=\frac{\log t-\log a}{\log(s-a)-\log(s-t)}+1$
20	e, t, s	n	$n=\frac{\log t-\log[et-(e-1)s]}{\log e}+1$

XI. *Fractions continues.*

1) Des fractions continues en général.

I. Une fraction continue est de la forme suivante:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}},$$

laquelle s'explique par la manière dont elle est écrite. On y suppose que les quantités a, b, c, d, e etc., qu'on appelle dénominateurs, sont toutes des nombres entiers non moindres que l'unité. L'on appelle fractions approximatives les fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$ $\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}$, etc., parceque, en effet, plus on les continue, plus elles se rapprochent de la fraction donnée.

II. Si l'on transforme ces fractions continues approximatives en fractions ordinaires, on trouve les valeurs approchées suivantes

1) $\frac{1}{a}$

2) $\frac{b}{ab+1}$

3) $\frac{bc+1}{(ab+1)c+a}$

4) $\frac{(bc+1)d+b}{(abc+c+a)d+ab+1}$

5) $\frac{(bcd+d+b)e+bc+1}{(abcd+cd+ad+ab+1)e+abc+c+a}$

etc.

III. Ces valeurs approchées peuvent être dérivées l'une de l'autre de la manière suivante.

Soit $\frac{R}{S}$ la valeur $(n-1)^{\text{ème}}$ et $\frac{T}{V}$ la valeur $(n-2)^{\text{ème}}$; soit de plus q la $n^{\text{ème}}$ lettre de la série a, b, c, d, etc., la $n^{\text{ème}}$ valeur approchée sera $=\frac{qR+T}{qS+V}$.

IV. Ces valeurs approchées ont toujours la forme la plus simple; le numérateur et le dénominateur n'ont jamais un diviseur commun.

V. Les fractions consécutives sont alternativement plus grandes et plus petites que la valeur de la fraction continue donnée.

VI. La différence entre deux fractions consécutives est alternativement positive et négative; elle est égale à une fraction dont le numérateur est $= 1$, et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs des deux fractions consécutives.

VII. Si l'on substitue tous les dénominateurs dans l'expression approximative de la fraction continue donnée, on aura sa valeur exacte.

VIII. Pour transformer une quantité X, d'une forme quelconque, en une fraction continue, on lui donnera la forme $a + \frac{1}{x}$, où a désigne le plus grand nombre entier contenu en X, lequel peut aussi être zéro, dans le cas où X est < 1. Puis on donnera au dénominateur x la forme $a' + \frac{1}{x'}$; au dénominateur x' la forme $a'' + \frac{1}{x''}$; au dénominateur x'' la forme $a''' + \frac{1}{x'''}$; et ainsi de suite; a', a'', a''', etc. étant les nombres entiers contenus dans x, x', x'', etc.; cela donne

$$X = a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \text{etc.}}}}$$

Donc, si la quantité X peut s'exprimer exactement par une fraction ordinaire, la fraction continue sera terminée; dans le cas contraire, elle ira à l'infini.

IX. La différence de la quantité X et d'une des fractions approximatives est toujours moindre que $\frac{1}{q^2}$, q étant le dénominateur de cette valeur approchée. Cela donne un moyen sûr d'apprécier l'approximation obtenue.

2) Transformation des fractions ordinaires en fractions continues.

L'exemple suivant fait voir le procédé à suivre d'après le principe VIII[ème].

$$\tfrac{351}{965}=\frac{1}{2+\frac{263}{351}},\ \tfrac{263}{351}=\frac{1}{1+\frac{88}{263}},\ \tfrac{88}{263}=\frac{1}{2+\frac{87}{88}},\ \tfrac{87}{88}=\frac{1}{1+\frac{1}{87}}.$$

De là on a $\frac{351}{965}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{87}}}}}$

Exemples.

Nº	Fractions données.	Dénominateurs.	Fractions approximatives.
1	$\frac{351}{965}$	2, 1, 2, 1, 87	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}$
2	$\frac{251}{764}$	3, 22, 1, 4, 2	$\frac{1}{3}, \frac{22}{67}, \frac{23}{70}, \frac{114}{347}$
3	$\frac{1769}{5537}$	3, 7, 1, 2, 4, 5, 1, 2	$\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}, \frac{23}{72}, \frac{100}{313}, \frac{523}{1637}, \frac{623}{1950}$

Nº	Fractions données.	Dénominateurs.	Fractions approximatives.
4	$\frac{907}{18564}$	20, 2, 7, 5, 2, 1, 3	$\frac{1}{20}, \frac{2}{41}, \frac{15}{307}, \frac{77}{1576}, \frac{169}{3459}, \frac{246}{5035}$
5	$\frac{1947}{3359}$	1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{40}{69}, \frac{91}{157}, \frac{131}{226}, \frac{222}{383}, \frac{575}{992}$
6	$\frac{587}{1943}$	3, 3, 4, 2, 3, 1, 1, 2	$\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{13}{43}, \frac{29}{96}, \frac{100}{331}, \frac{129}{427}, \frac{229}{758}$
7	$\frac{5065}{13891}$	2, 1, 2, 1, 7, 1, 1, 1, 2, 1, 13	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{31}{85}, \frac{35}{96}, \frac{66}{181}, \frac{101}{277}, \frac{268}{735}, \frac{369}{1012}$
8	$\frac{5743}{80937}$	14, 10, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 3	$\frac{1}{14}, \frac{10}{141}, \frac{11}{155}, \frac{32}{451}, \frac{43}{606}, \frac{161}{2269}, \frac{526}{7413}, \frac{1739}{24508}$
9	$\frac{13957}{59476}$	4, 3, 1, 4, 1, 2, 1, 11, 2, 6	$\frac{1}{4}, \frac{3}{13}, \frac{4}{17}, \frac{19}{81}, \frac{23}{98}, \frac{65}{277}, \frac{88}{375}, \frac{1033}{4402}, \frac{2154}{9179}$
10	$\frac{3215763}{94218374}$	29, 3, 2, 1, 8, 1, 1, 6, etc.	$\frac{1}{29}, \frac{3}{88}, \frac{7}{205}, \frac{10}{293}, \frac{87}{2549}, \frac{97}{2842}, \frac{184}{5391}$, etc.

Le temps d'une révolution de la lune autour de la terre, est, en prenant la moyenne pendant cent ans, égal à 27,321661 jours. Donc la lune feroit 1000000 révolutions en 27321661 jours. Comment ce rapport, donné en très-grands nombres, peut-il s'exprimer en de plus petits?

Rép. Les fractions approximatives de 27,321661 sont $\frac{27}{1}$, $\frac{82}{3}$, $\frac{765}{28}$, $\frac{3907}{143}$, etc. En prenant la troisième, la lune fait 28 révolutions en 765 jours; ce qui ne diffère de la vérité que d'environ 0,0001 jours.

D'après Laplace, la durée de la révolution de Mercure est de 87,969255, et celle de Vénus, de 224,700817 jours. Comment les exprimer l'une et l'autre par des nombres plus petits?

Rép. Celle de Mercure par $\frac{87}{1}$, $\frac{88}{1}$, $\frac{2815}{32}$, etc.; celle de Vénus par $\frac{224}{1}$, $\frac{225}{1}$, $\frac{674}{3}$, $\frac{1573}{7}$, $\frac{2247}{10}$, $\frac{26290}{117}$, etc. Les fractions $\frac{2815}{32}$, et $\frac{26290}{117}$, les expriment assez exactement.

La circonférence d'un cercle est à son diamètre comme 3,1415926535 ······· est à 1. Comment exprimer ce rapport par des nombres plus petits?

Rép. Par 3 : 1; 22 : 7; 333 : 106; 355 : 113; 103993 : 33102; et ainsi de suite.

3) Transformation du radical $\sqrt{A}$ en une fraction continue.

Qu'on suppose que A est un nombre entier: le tableau suivant montre le procédé à suivre, d'après le principe VIII.

$$X=\sqrt{19}=4+\frac{\sqrt{19}-4}{1}\left(=\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}\left(=\frac{1}{x^{I}}\right)\\
x^{I} &= \frac{3}{\sqrt{19}-2}=\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}\left(=\frac{1}{x^{II}}\right)\\
x^{II} &= \frac{5}{\sqrt{19}-3}=\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}\left(=\frac{1}{x^{III}}\right)\\
x^{III} &= \frac{2}{\sqrt{19}-3}=\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}\left(=\frac{1}{x^{IV}}\right)\\
x^{IV} &= \frac{5}{\sqrt{19}-2}=\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}\left(=\frac{1}{x^{V}}\right)\\
x^{V} &= \frac{3}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{1}=8+\frac{\sqrt{19}-4}{1}\left(=\frac{1}{x^{VI}}\right)\\
x^{VI} &= \frac{1}{\sqrt{19}-4}=\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Donc les dénominateurs sont ici 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, etc.

Exemples.

No	Radicaux donnés.	Dénominateurs.	Fractions approximatives.
1	$\sqrt{28}$	5, 3, 2, 3, 10, rc.	$\frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{37}{7}, \frac{127}{24}, \frac{1307}{247}$, etc.
2	$\sqrt{31}$	5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, rc.	$\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}, \frac{657}{118}, \frac{863}{155}, \frac{1520}{273}, \frac{16063}{2885}$, etc.

N°	Radicaux donnés.	Dénominateurs.	Fractions approximatives.
3	$\sqrt{44}$	6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12, etc.	$\frac{6}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{53}{8}$, $\frac{73}{11}$, $\frac{126}{19}$, $\frac{199}{30}$, $\frac{2514}{379}$, etc.
4	$\sqrt{45}$	6, 1, 2, 2, 2, 1, 12, etc.	$\frac{6}{1}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{47}{7}$, $\frac{114}{17}$, $\frac{161}{24}$, $\frac{2046}{305}$, etc.
5	$\sqrt{52}$	7, 4, 1, 2, 1, 4, 14, etc.	$\frac{7}{1}$, $\frac{29}{4}$, $\frac{36}{5}$, $\frac{101}{14}$, $\frac{137}{19}$, $\frac{649}{90}$, $\frac{9223}{1279}$, etc.
6	$\sqrt{53}$	7, 3, 1, 1, 3, 14, etc.	$\frac{7}{1}$, $\frac{22}{3}$, $\frac{29}{4}$, $\frac{51}{7}$, $\frac{182}{25}$, $\frac{2599}{357}$, etc.
7	$\sqrt{59}$	7, 1, 2, 7, 2, 1, 14, etc.	$\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{23}{3}$, $\frac{169}{22}$, $\frac{361}{47}$, $\frac{530}{69}$, $\frac{7781}{1013}$, etc.
8	$\sqrt{67}$	8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, etc.	$\frac{8}{1}$, $\frac{41}{5}$, $\frac{90}{11}$, $\frac{131}{16}$, $\frac{221}{27}$, $\frac{1678}{205}$, $\frac{1899}{232}$, $\frac{3577}{437}$, $\frac{9053}{1106}$, $\frac{48842}{5967}$, $\frac{790525}{96578}$, etc.

En considérant attentivement les dénominateurs dans le développement du radical $\sqrt{A}$, on fera les remarques suivantes.

1) Ces dénominateurs forment des périodes, dont la première pourrait suffire dans les exemples ci-dessus. Elle commence par le second dénominateur et finit par un autre qui est le double du premier.

2) Si l'on néglige le dernier dénominateur de la période, l'ordre des autres est

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \ldots\ldots\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha$$

de sorte que l'ordre et la grandeur des dénominateurs restent les mêmes, si on les écrit dans le sens inverse.

3) Si, généralement $\frac{p}{q}$ désigne la fraction approximative correspondante au dénominateur qui précède le dernier dénominateur d'une période quelconque; on a toujours

$$p^2 - Aq^2 = \pm 1.$$

Les exemples ci-dessus expliquent cela, au moins pour la première période; car on a:

$127^2 - 28 \cdot 24^2 = +1$, $1520^2 - 31 \cdot 273^2 = +1$,
$199^2 - 44 \cdot 30^2 = +1$, $161^2 - 45 \cdot 24^2 = +1$,
$649^2 - 52 \cdot 90^2 = +1$, $182^2 - 53 \cdot 25^2 = -1$,
$530^2 - 59 \cdot 69^2 = +1$, $48842^2 - 67 \cdot 5967^2 = +1$.

4) On a généralement pour toutes les périodes $p^2 - Aq^2 = +1$, si la période correspondante au nombre A est composée d'un nombre pair de dénominateurs; mais si, au contraire ce nombre est impair, $p^2 - Aq^2$ est alternativement $= -1$ et $+1$.

5) Les transformations à faire pour trouver les dénominateurs, se feront toujours avec des nombres entiers, et jamais avec des fractions.

. . . .

Les fractions continues ont encore plusieurs autres propriétés remarquables: elles sont d'une grande utilité dans la pratique du calcul. On peut, par exemple, exprimer, par les fractions continues, des rapports donnés en grands nombres, par des nombres beaucoup plus petits, comme nous l'avons vu plus haut par quelques exemples; et l'on peut démontrer rigoureusement que la fraction approximative s'approche si près de la fraction donnée, qu'il soit impossible d'en approcher davantage par des fractions plus simples.

SECTION DEUXIÈME.

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

XII. *Résolution exacte des équations algébriques, précédée de quelques observations.*

1) Des équations, en général.

I. Une équation, en général, considérée en elle-même, n'est autre chose que l'égalité de deux expressions, et celles-ci en sont appelées les membres.

Une équation, si elle n'est pas identique, est *analytique*, ou *algébrique*.

II. Une équation analytique est celle, dont l'égalité des deux membres peut être prouvée uniquement par le sens des signes, soit immédiatement, soit par une suite de conséquences. Donc il faut que toutes les transformations à faire, pour donner à l'un des membres la forme de l'autre, soient fondées uniquement sur le sens des signes. Presque toutes les équations de la section précédente sont de cette nature. Si elles contiennent des lettres, la valeur qu'on donne à celles-ci est indifférente; les deux membres resteront toujours égaux.

III. Une équation algébrique est celle qui ne peut être vérifiée que lorsqu'aux quantités qui y sont exprimées par des lettres, on donne des valeurs en nombres non arbitraires, ou que, du moins, on détermine le rapport de quelques-unes de ces quantités aux autres, de manière qu'il en résulte une équation analytique. C'est de cette nature que seront presque toutes les équations que nous allons proposer dans cette section.

IV. L'algèbre enseigne à trouver l'inconnu par le connu, au moyen des signes et des équations. Son objet est la solution des problèmes. On décompose le problème; on cherche des rapports du connu à l'inconnu, et l'on exprime ces rapports par des lettres et des équations, sans faire d'autre différence entre le connu et l'inconnu que celle des signes. On désigne en général les quantités inconnues par les dernières lettres de l'alphabet.

V. L'objet de l'analyse des modernes n'est que la transformation des formules: donc, elle s'occupe uniquement d'équations analytiques. Cette analyse est donc essentiellement différente de l'algèbre, quoiqu'elles se réunissent dans le calcul transcendental, et qu'elles aient besoin du secours l'une de l'autre. Ce qu'on entend ordinairement sous le nom de calcul littéral, n'est que la partie élémentaire de cette partie très-étendue des Mathématiques.

VI. L'analyse des anciens n'est pas essentiellement différente de notre algèbre. Cette dernière l'emporte seulement sur l'autre par son algorithme des signes. L'objet de toutes les deux est de trouver l'inconnu, du connu, en cherchant leurs rapports et en les réduisant.

VII. On trouve dans les livres élémentaires l'art de traiter les équations et de les résoudre. Nous ferons seulement ici une observation relative à des difficultés qui s'offrent d'ordinaire aux commençants. Pour trouver complètement les inconnues, des données, il faut avoir toujours autant d'équations qu'il y a d'inconnues, et il faut qu'aucune de ces équations ne soit du genre analytique, ni une conséquence des autres équations. Les équations qui ne satisfont pas à ces deux conditions ne sont pas propres à la résolution demandée, et doivent être rejetées.

---

2) Équations du premier degré.

a) Équations à une seule inconnue.

1) E. $ax \pm b = c$ *)

S. $x = \frac{c \mp b}{a}$

*) E. signifie équation et S. solution.

2) E. $3a+x-5b+2 = 7b-a+c+6$
S. $x = 12b-4a+c+4$

3) E. $7-9a-5x+3cd+x = \frac{7}{4}-3a-2cd-2x$
S. $x = \frac{21}{8}-3a+\frac{5}{2}cd$

4) E. $8x-5 = 13-7x$
S. $x = 1\frac{1}{5}$

5) E. $13\frac{3}{4}-\frac{x}{2} = 2x-8\frac{3}{4}$
S. $x = 9$

6) E. $2x+7+\frac{3}{2}x = 6x-23$
S. $x=12$

7) E. $12\frac{1}{4}+3x-6-\frac{7x}{3}=\frac{3x}{4}-5\frac{3}{8}$
S. $x = 139\frac{1}{2}$.

8) E. $-6\frac{1}{3}x+158\frac{1}{2}-10x = -\frac{37x}{6}+19+\frac{3}{8}x$
S. $x = 13\frac{59}{253}$

9) E. $8\frac{3}{4}+\frac{3x}{7}-\frac{5}{6}+2x-\frac{12x}{5}+13+\frac{x}{4}=0$
S. $x = -75\frac{10}{117}$

10) E. $\frac{3x}{5}-\frac{7x}{10}+\frac{3x}{4}-\frac{7x}{8} = -15$
S. $x=66\frac{2}{3}$

11) E. $3\frac{2}{3}-x-\frac{9x}{2}+8=-17-\frac{3x}{5}+\frac{3}{2}x$
S. $x=4\frac{23}{48}$

12) E. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4} = 7x-712+\frac{x}{5}$
S. $x = 116\frac{148}{367}$

13) E. $11\frac{1}{2}x=\frac{11}{8}x+66\frac{3}{8}-5x-9\frac{1}{4}$
S. $x=3\frac{94}{121}$

14) E. $-\frac{16}{7}x = -\frac{1}{2}x + 412\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x - 316\frac{1}{2}$

S. $x = -80\frac{80}{83}$

15) E. $32\frac{1}{10}x + 176\frac{3}{4} - x = 19\frac{1}{3}x + 7345 - \frac{2x}{3}$

S. $x = 576\frac{399}{746}$

16) E. $3{,}25x - 5{,}007 - x = 0{,}2 - 0{,}34x$

S. $x = 2{,}010424\ldots$

17) E. $13{,}2 \cdot x - \frac{3x}{4} + 7{,}6953 = \frac{x}{5} + 7834{,}5$

S. $x = 638{,}92283\ldots$

18) E. $\frac{7{,}53x}{18} + 100 = \frac{2x}{5} + 3{,}86 - \frac{x}{6}$

S. $x = -519{,}67567\ldots$

19) E. $ax + c = bx + d$

S. $x = \frac{d-c}{a-b}$

20) E. $\frac{f^2x}{cg} - \frac{a^2}{f} + cx = \frac{hx}{g} - c + (a+c)x$

S. $x = \frac{(a^2 - cf)cg}{(f^2 - ch - acg)f}$

21) E. $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$

S. $x = \frac{(ad+bc)e}{de - cf}$

22) E. $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} - g = h$

S. $x = \frac{(h+g)bdf}{b(de+cf) + adf}$

23) E. $\frac{5}{6}ab + \frac{4}{5}ac - \frac{2}{3}cx = \frac{3}{4}ac + 2ab - 6cx$

S. $x = \frac{(70b - 3c)a}{320c}$

24) E. $\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0$

S. $x = \frac{ac(1-3ab)}{c-ad}$

25) E. $\frac{ace}{d} - \frac{(a+b)^2 x}{a} - bx = ae - 3bx$

S. $x = \frac{a^2 e(c-d)}{(a^2+b^2)d}$

26) E. $\frac{a+3x}{4a} - \frac{7a-5x}{6b} + 3 - \frac{9x}{4} = \frac{x}{ab} + \frac{5x}{6b}$

S. $x = \frac{39ab - 14a^2}{27ab - 9b + 12}$

27) E. $5a^3cx + ac^2x - 5abc^2 - 3a^3c^3 = 5a^2bcx + bc^2x$
$-3a^2bc^3 - 5a^2c^2$

S. $x = \frac{3a^2c^2 - 5ac}{5a^2 + c}$

28) E. $2a^2b^2c + ab^2x - 2ab^3c - abc^2d - 3a^3x =$
$(b^3 - 3a^2b)x - b^2c^2d$

S. $x = \frac{2ab^2c - bc^2d}{3a^2 - b^2}$

29) E. $\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}$

S. $x = \frac{ab-1}{bc+d}$

30) E. $\frac{3a+x}{x} - 5 = \frac{6}{x}$

S. $x = \frac{3a-6}{4}$

31) E. $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$

S. $x = \frac{c(a+d)(b-c)}{b(b-c) - a^2}$

32) E. $c = a + \frac{m(a-x)}{3a+x}$

S. $x = \frac{a(m-3c+3a)}{c-a+m}$

33) E. $\frac{a(d^2+x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}$

S. $x = \frac{d}{c}$

34) E. $\frac{cx^m}{a+bx} = \frac{fx^m}{d+ex}$

S. $x = \frac{cd-af}{bf-ce} = \frac{af-cd}{ce-bf}$

35) E. $\frac{7x^n}{x-1} = \frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1} - \frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}$

S. $x = -\frac{11}{12}$

36) E. $\frac{3a-5x}{a-c} + \frac{2a-x}{d} = \frac{a+f}{a-c} - dx$

S. $x = \frac{d(f-2a)-2a(a-c)}{(a-c)(d^2-1)-5d}$

37) E. $\frac{a}{bx} + \frac{c}{dx} + \frac{e}{fx} + \frac{g}{hx} = k$

S. $x = \frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfhk}$

38) E. $\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}$

S. $x = \frac{ab}{a+b}$

39) E. $\frac{bx}{2b-a} - \frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)} - \frac{5ab}{3c-d} = \frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}$
$- \frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$

S. $x = \frac{5a(2b-a)}{3c-d}$

40) E. $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$

S. $x=\frac{ac}{b}$

41) E. $\sqrt[m]{x}=a$

S. $x=a^m$

42) E. $\sqrt[m]{(ax+b)}=\sqrt[m]{(cx+d)}$

S. $x=\frac{d-b}{a-c}$

43) E. $h\sqrt[3]{(ax-b)}=k\sqrt[3]{(cx+dx-f)}$

S. $x=\frac{bh^3-fk^3}{ah^3-(c+d)k^3}$

44) E. $\sqrt[3]{(a^2+c)}=\sqrt[4]{\frac{a^2+c}{d(x+g)}}$

S. $x=\frac{1}{d\sqrt[3]{(a^2+c)}}-g$

45) E. $\sqrt[m]{(a+x)}=\sqrt[2m]{(x^2+5ax+b^2)}$

S. $x=\frac{a^2-b^2}{3a}$

46) E. $c+b\sqrt[m]{(x+d)}=f$

S. $x=\left(\frac{f-c}{b}\right)^m-d$

47) E. $\frac{ax}{b}\sqrt{(f^2x^2+d^2)}+\frac{afx^2}{b}=cx$

S. $x=\frac{b^2c^2-a^2d^2}{2abcf}=\frac{(bc+ad)(bc-ad)}{2abcf}$

48) E. $a^x = b$

S. $x = \dfrac{\log b}{\log a}$

49) E. $a^{mx} b^{nx} = c$

S. $x = \dfrac{\log c}{m \log a + n \log b} = \dfrac{\log c}{\log a^m b^n}$

50) E. $a^{mx+f} b^{nx+g} = c^{px+h} d^{qx+k}$

S. $x = \dfrac{h \log c + k \log d - f \log a - g \log b}{m \log a + n \log b - p \log c - q \log d} =$

$\left(\log \dfrac{c^h d^k}{a^f b^g}\right) : \left(\log \dfrac{a^m b^n}{c^p d^q}\right)$

51) E. $3^x = 177147$

S. $x = 11$

52) E. $2^x = 769$

S. $x = 9{,}586839 \ldots.$

53) E. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = 51\frac{1}{2}$

S. $x = -13{,}701172 \ldots.$

54) E. $\left(\dfrac{756}{345}\right)^{\frac{3x}{2}} = 54783$

S. $x = 9{,}272299 \ldots.$

55) E. $\left(\dfrac{21}{20}\right)^x \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}$

S. $x = 0{,}309928 \ldots.$

56) E. $\left(\dfrac{295}{867}\right)^{3-x} = 632 \cdot \left(\dfrac{56}{39}\right)^{\frac{5x}{9}}$

S. $x = 11{,}040270 \ldots.$

57) E. $3^{2x} \cdot 5^{6x-7} = 9^{x-2} \cdot 7^{1-x}$

S. $x = 0{,}759965\cdots$

b) Équations à plusieurs inconnues

1) E. $\begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases}$

S. $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \dfrac{a-b}{2}$

2) E. $\begin{cases} 3x+2y = 118 \\ x+5y = 191 \end{cases}$

S. $x = 16$, $y = 35$

3) E. $\begin{cases} 7x + \frac{5}{2}y = 411\frac{1}{2} \\ 39x-14y = -935\frac{9}{10} \end{cases}$

S. $x = 17\frac{1}{2}$, $y = 115\frac{3}{5}$

4) E. $\begin{cases} 5x-8\frac{1}{2} = 7y-44 \\ 2x = y+\frac{5}{7} \end{cases}$

S. $x = 4\frac{1}{2}$, $y = 8\frac{2}{7}$

5) E. $\begin{cases} 5\frac{3}{4}y-11x = 4y+117\frac{1}{8} \\ 8x+175 = 2y \end{cases}$

S. $x = 9$, $y = 123\frac{1}{2}$

6) E. $\begin{cases} 7y = 2x-3y \\ 19x = 60y+621\frac{1}{4} \end{cases}$

S. $x = 88\frac{3}{4}$, $y = 17\frac{3}{4}$

7) E. $\begin{cases} 13x+7y-341 = 7\frac{1}{2}y+43\frac{1}{2}x \\ 2x+\frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$

S. $x = -12$, $y = 50$

8) E. $\begin{cases} 113\frac{1}{2}x-27\frac{5}{7}y = 10y+5488\frac{4}{7} \\ 9y-347 = 5x-420 \end{cases}$

S. $x = 56$, $y = 23$

9) E. $\left\{\begin{array}{l} 168\frac{15}{44} - 19x + \frac{3}{11}y = 12\frac{3}{4}x + 1084 \\ \frac{1}{3}x - 149\frac{1}{2} = 319\frac{2}{9} - \frac{7}{2}y \end{array}\right\}$

S. $x = -27\frac{2}{3}$, $y = 136\frac{5}{9}$

10) E. $\left\{\begin{array}{c} x + y = 18{,}73 \\ 0{,}56x + 13{,}421y = 763{,}4 \end{array}\right\}$

S. $x = -39{,}8121\cdots$, $y = 58{,}5421\cdots$

11) E. $\left\{\begin{array}{l} (x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112 \\ 2x + 10 = 3y + 1 \end{array}\right\}$

S. $x = 3$, $y = 5$

12) E. $\left\{\begin{array}{c} ax = by \\ x + y = c \end{array}\right\}$

S. $x = \frac{bc}{a+b}$, $y = \frac{ac}{a+b}$

13) E. $\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ fx + gy = h \end{array}\right\}$

S. $x = \frac{cg - bh}{ag - bf}$, $y = \frac{ah - cf}{ag - bf}$

14) E. $\left\{\begin{array}{c} \frac{a}{b+y} = \frac{b}{3a+x} \\ ax + 2by = d \end{array}\right\}$

S. $x = \frac{2b^2 - 6a^2 + d}{3a}$, $y = \frac{3a^2 - b^2 + d}{3b}$

15) E. $\left\{\begin{array}{l} bcx = cy - 2b \\ b^2y + \frac{a(c^3 - b^3)}{bc} = \frac{2b^3}{c} + c^3x \end{array}\right\}$

S. $x = \frac{a}{bc}$, $y = \frac{a + 2b}{c}$

16) E. $\left\{\begin{array}{l} 3x + 5y = \frac{(8b - 2f)bf}{b^2 - f^2} \\ b^2x - \frac{bcf^2}{b+f} + (b+c+f)fy = f^2x + (b+2f)bf \end{array}\right\}$

S. $x = \frac{bf}{b-f}$, $y = \frac{bf}{b+f}$

17) E. $\begin{cases} x+y=10 \\ x+z=19 \\ y+z=23 \end{cases}$

S. $x=3,\ y=7,\ z=16$

18) E. $\begin{cases} x+y+z=29\frac{1}{4} \\ x+y-z=18\frac{1}{4} \\ x-y+z=13\frac{3}{4} \end{cases}$

S. $x=16,\ y=7\frac{3}{4},\ z=5\frac{1}{2}$

19) E. $\begin{cases} x+y+z=a \\ my=nx \\ pz=qx \end{cases}$

S. $x=\frac{amp}{mp+np+mq},\ y=\frac{anp}{mp+np+mq},$

$z=\frac{amq}{mp+np+mq}$

20) E. $\begin{cases} 3x+5y=161 \\ 7x+2z=209 \\ 2y+z=89 \end{cases}$

S. $x=17,\ y=22,\ z=45$

21) E. $\begin{cases} y+\frac{1}{2}x=41 \\ x+\frac{1}{4}z=20\frac{1}{2} \\ y+\frac{1}{5}z=34 \end{cases}$

S. $x=18,\ y=32,\ z=10$

22) E. $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \\ gy+hz=l \end{cases}$

S. $x=\frac{ce-bf}{ae-bd},\ y=\frac{af-cd}{ae-bd},\ z=\frac{a(el-fg)-d(bl-cg)}{h(ae-bd)}$

23) E. $\begin{cases} 53-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z=y-109 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y=26 \\ 5y=4z \end{cases}$

S. $x=64,\ y=80,\ z=100$

24) E. $\begin{cases} 2x-\frac{3}{4}y=93-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y \\ 7x-5z=y+x-86 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=58 \end{cases}$

S. $x=48,\ y=54,\ z=64$

25) E. $\begin{cases} 3x-100=5y+360 \\ 2\frac{1}{3}x+200=16\frac{1}{2}z-610 \\ 2y+3z=548 \end{cases}$

S. $x=360,\ y=124,\ z=100$

26) E. $\begin{cases} 4x+7y+159=0 \\ 3\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}z-55 \\ 2x+y+9z=498 \end{cases}$

S. $x=-13\frac{1}{2},\ y=-15,\ z=60$

27) E. $\begin{cases} 2x+5y-7z=-288 \\ 5x-y+3z=227 \\ 7x+6y+z=297 \end{cases}$

S. $x=13,\ y=24,\ z=62$

28) E. $\begin{cases} x+y+z=30 \\ 8x+4y+2z=50 \\ 27x+9y+3z=64 \end{cases}$

S. $x=\frac{2}{3},\ y=-7,\ z=36\frac{1}{3}$

29) E. $\begin{cases} 18x-7y-5z=11 \\ 4\frac{2}{5}y-\frac{2}{3}x+z=108 \\ 3\frac{1}{2}z+2y+\frac{3}{4}x=80 \end{cases}$

S. $x=12,\ y=25,\ z=6$

30) E. $\begin{cases} ax+by+cz=h \\ a'x+b'y+c'z=h' \\ a''x+b''y+c''z=h'' \end{cases}$

S. $$x=\frac{hb'c''-hb''c'+h'b''c-h'bc''+h''bc'-h''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$y=\frac{ah'c''-ah''c'+a'h''c-a'hc''+a''hc'-a''h'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$z=\frac{ab'h''-ab''h'+a'b''h-a'bh''+a''bh'-a''b'h}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

31) E. $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c\end{array}\right\}$

S. $x=\frac{2}{a+b-c},\ y=\frac{2}{a-b+c},\ z=\frac{2}{b+c-a}$

32) E. $\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{x}-\frac{5}{3y}+\frac{1}{z}=3\frac{4}{27}\\ \frac{1}{4x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=6\frac{11}{72}\\ \frac{5}{6x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{z}=12\frac{1}{36}\end{array}\right\}$

S. $x=6,\ y=9,\ z=\frac{1}{2}$

33) E. $\left\{\begin{array}{l}\frac{2x+3y}{x+y}=2\frac{1}{5}\\ \frac{x+z}{5(x-z)}=\frac{1}{3}\\ \frac{10x-3z}{4x-2z}=2\frac{9}{14}\end{array}\right\}$

S. $x=4,\ y=1,\ z=1$
ou $x=8,\ y=2,\ z=2$ etc. (Indéterminé.)

34) E. $\left\{\begin{array}{l}ax+by=l\\ cx+du=m\\ ex+fz=n\\ gy+hz=p\end{array}\right\}$

S. $x=\frac{bhn+(gl-bp)f}{beh+afg}$

$y=\frac{afp+(el-an)h}{beh+afg}$

$z=\frac{bep+(an-el)g}{beh+afg}$

$u=\frac{bh(em-cn)+gf(am-cl)+bcfp}{d(beh+afg)}$

35) E. $\left\{\begin{aligned} x-9y+3z-10u&=21\\ 2x+7y-z-u&=683\\ 3x+y+5z+2u&=195\\ 4x-6y-2z-9u&=516\end{aligned}\right\}$

S. $x=100$, $y=60$, $z=-13$, $u=-50$

36) E. $\left\{\begin{aligned} x+y+z+u&=1\\ 16x+8y+4z+2u&=9\\ 81x+27y+9z+3u&=36\\ 256x+64y+16z+4u&=100\end{aligned}\right\}$

S. $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{4}$, $u=0$

37) E. $\left\{\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}&=58\\ \frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}&=76\\ \frac{x}{2}+\frac{3z}{8}+\frac{u}{5}&=79\\ y+z+u&=248\end{aligned}\right\}$

S. $x=12$, $y=30$, $z=168$, $u=50$

38) E. $\left\{\begin{aligned} \frac{xy}{ay+bx}&=l\\ \frac{yz}{cz+dy}&=m\\ \frac{xz}{ez+fx}&=n\end{aligned}\right\}$

S. $x=\dfrac{lmn(bde+acf)}{cfmn-bfln+bdlm}$

$y=\dfrac{lmn(bde+acf)}{afln+demn-adlm}$

$z=\dfrac{lmn(bde+acf)}{beln-cemn+aclm}$

39) E. $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t+u=a \\ x+y+z+u+w=b \\ x+y+z+t+w=c \\ x+y+u+t+w=d \\ x+z+u+t+w=e \\ y+z+u+t+w=f \end{array}\right\}$

S. $x=\frac{s}{5}-f,\quad y=\frac{s}{5}-e,\quad z=\frac{s}{5}-d,$

$u=\frac{s}{5}-c,\quad t=\frac{s}{5}-b,\quad w=\frac{s}{5}-a$

(En dénotant $a+b+c+d+e+f$ par s).

---

3) Équations du second degré.

a) Équations à une seule inconnue.

Formule.

E. $x^2+Px=Q$

S. $x=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}+Q\right)}$

Exemples.

1) E. $ax^2=b$

S. $x=+\sqrt{\frac{b}{a}},\ x=-\sqrt{\frac{b}{a}}$

2) E. $x^2+6x=27$

S. $x=3,\ x=-9$

3) E. $x^2-7x+3\frac{1}{4}=0$

S. $x=6\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2}$

4) E. $x^2-5\frac{3}{4}x=18$

S. $x=8,\ x=-2\frac{1}{4}$

5) E. $3x^2 - 2x = 65$
S. $x = 5$, $x = -4\frac{1}{3}$

6) E. $622x = 15x^2 + 6384$
S. $x = 22\frac{4}{5}$, $x = 18\frac{2}{3}$

7) E. $20748 - 1616x + 21x^2 = 0$
S. $x = 60\frac{2}{3}$, $x = 16\frac{2}{7}$

8) E. $9\frac{3}{5}x - 21\frac{15}{16} = x^2$
S. $x = 5\frac{17}{20}$, $x = 3\frac{3}{4}$

9) E. $11\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{2}x^2 = -41\frac{1}{4}$
S. $x = -2\frac{1}{7}$, $x = 5\frac{1}{2}$

10) E. $9\frac{1}{3}x^2 - 90\frac{1}{3}x + 195 = 0$
S. $x = 6\frac{3}{7}$, $x = 3\frac{1}{4}$

11) E. $\frac{18x^2}{5} + \frac{18078x}{65} + 4728 = 0$
S. $x = -25\frac{10}{39}$, $x = -52$

12) E. $x^2 - 8x = 14$
S. $x = 4 + \sqrt{30}$, $x = 4 - \sqrt{30}$
ou $x = 9{,}4772\ldots$, $x = -1{,}4772\ldots$

13) E. $3x^2 + x = 7$
S. $x = \frac{-1 + \sqrt{85}}{6}$, $x = \frac{-1 - \sqrt{85}}{6}$
ou $x = 1{,}3699\ldots$, $x = -1{,}7032\ldots$

14) E. $118x - 2\frac{1}{2}x^2 = 20$
S. $x = \frac{118 + \sqrt{13724}}{5}$, $x = \frac{118 - \sqrt{13724}}{5}$
ou $x = 47{,}0298\ldots$, $x = 0{,}1701\ldots$

15) E. $6x - 30 = 3x^2$
S. $x = 1 + \sqrt{-9}$, $x = 1 - \sqrt{-9}$

16) E. $8x^2-7x+34=0$

S. $x=\dfrac{7+\sqrt{-1039}}{16}$, $x=\dfrac{7-\sqrt{-1039}}{16}$

17) E. $4x^2-9x=5x^2-255\tfrac{3}{4}-8x$

S. $x=15\tfrac{1}{2}$, $x=-16\tfrac{1}{2}$

18) E. $80x+\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{21x-27782}{12}=1859\tfrac{1}{3}-3x^2$

S. $x=-46$, $x=24\tfrac{1}{5}$

19) E. $\dfrac{x}{x+60}=\dfrac{7}{3x-5}$

S. $x=14$, $x=-10$

20) E. $\dfrac{40}{x-5}+\dfrac{27}{x}=13$

S. $x=9$, $x=1\tfrac{2}{13}$

E. $\dfrac{8x}{x+2}-6=\dfrac{20}{3x}$

S. $x=10$, $x=-\tfrac{2}{3}$

22) E. $\dfrac{48}{x+3}=\dfrac{165}{x+10}-5$

S. $x=5\tfrac{2}{5}$, $x=5$

23) E. $\dfrac{31}{6x}=\dfrac{16}{117-2x}+1$

S. $x=67\tfrac{1}{6}$, $x=4\tfrac{1}{2}$

24) E. $\dfrac{2x+3}{10-x}=\dfrac{2x}{25-3x}-6\tfrac{1}{2}$

S. $x=13\tfrac{22}{31}$, $x=8$

25) E. $\dfrac{25x+180}{10x-81}=\dfrac{40x}{5x-8}-\dfrac{3}{5}$

S. $x=14\tfrac{3}{5}$, $x=\tfrac{72}{245}$

26) E. $\frac{18+x}{6(3-x)}=\frac{20x+9}{19-7x}-\frac{65}{4(3-x)}$

S. $x=7\frac{22}{113}$, $x=2\frac{1}{2}$

27) E. $adx-acx^2=bcx-bd$

S. $x=\frac{d}{c}$, $x=-\frac{b}{a}$

28) E. $\frac{a^2x^2}{f^2}-\frac{2ax}{g}+\frac{f^2}{g^2}=0$

S. $x=\frac{f^2}{ag}$, $x=\frac{f^2}{ag}$

29) E. $abx^2+\frac{3a^2x}{c}=\frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2}-\frac{b^2x}{c}$

S. $x=\frac{2a-b}{ac}$, $x=-\frac{3a+2b}{bc}$

30) E. $\frac{2c^2}{d^2}+\frac{ac}{d}-(a-b)(2c+ad)\frac{x}{d}=(a+b)\frac{cx}{d}$
$-(a^2-b^2)x^2$

S. $x=\frac{2c+ad}{d(a+b)}$, $x=\frac{c}{d(a-b)}$

31) E. $32a^{2m}c^{n-1}+4a^{m+3}c^{n-1}(ac^3-2)x=a^7c^{n+2}x^2$

S. $x=4a^{m-3}$, $x=-\frac{8a^{m-4}}{c^3}$

32) E. $cx+\frac{ac}{a+b}=(a+b)x^2$

S. $x=\frac{c+\sqrt{(c^2+4ac)}}{2(a+b)}$, $x=\frac{c-\sqrt{(c^2+4ac)}}{2(a+b)}$

33) E. $9a^4b^4x^2-6a^3b^2x-b^2=0$

S. $x=\frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{3a^2b^2}$, $x=\frac{a-\sqrt{(a^2+b^2)}}{3a^2b^2}$

34) E. $abx^2-2x(a+b)\sqrt{ab}=(a-b)^2$

S. $x=\frac{a+b\pm\sqrt{(2a^2+2b^2)}}{\sqrt{ab}}$

35) E. $ax^2+b^2+c^2=a^2+2bc+2(b-c)x\sqrt{a}$

S. $x=\dfrac{b-c+a}{\sqrt{a}}$, $x=\dfrac{b-c-a}{\sqrt{a}}$

36) E. $cx^2-2cx\sqrt{d}=dx^2-cd$

S. $x=\dfrac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, $x=\dfrac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$

37) E. $(4a^2-9cd^2)x^2+(4a^2c^2+4abd^2)x+(ac^2+bd^2)^2=0$

S. $x=-\dfrac{ac^2+bd^2}{2a+3d\sqrt{c}}$, $x=-\dfrac{ac^2+bd^2}{2a-3d\sqrt{c}}$

38) E. $ab^3x^2+(1+c)bd\sqrt{c}+cb^2x^2=[b^3d\sqrt{c}+(ab+c)(1+c)]x$

S. $x=\dfrac{bd\sqrt{c}}{ab+c}$, $x=\dfrac{1+c}{b^2}$

39) E. $\dfrac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2-\left(\dfrac{5\sqrt{(a+b)}}{3b^2}+\dfrac{(1+2b^2)cd\sqrt{c}}{3-a^2}\right)x+\dfrac{cd}{ab}\sqrt{(a+b)c}=0$

S. $x=\dfrac{(3-a^2)\sqrt{(a+b)}}{ab(1+2b^2)}$, $x=\dfrac{3b^2cd\sqrt{c}}{5a}$

40) E. $ax=b+\sqrt{cx}$

S. $x=\dfrac{2ab+c+\sqrt{(4abc+c^2)}}{2a^2}$ *)

41) E. $3\sqrt{(112-8x)}=19+\sqrt{(3x+7)}$

S. $x=6$

---

*) Cette seule valeur de x est bonne; l'autre correspond à l'équation $ax=b-\sqrt{cx}$; car celle-ci, et l'équation donnée, mènent à une même équation finale $a^2x^2-(2ab+c)x+b^2=0$. Il en est de même des équations 41, 42, 43, 44.

42) E. $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)} = \sqrt{(7x+1)}$
S. $x = 9$

43) E. $5\sqrt{(62+3x)}-\frac{1}{2}\sqrt{(95\frac{2}{3}-5x)} = 41$
S. $x = 6\frac{1}{3}$

44) E. $7\sqrt{(\frac{3}{2}x-5)}-\sqrt{\left(\frac{x}{5}+45\right)}-\frac{7}{4}\sqrt{(10x+56)}=0$
S. $x = 20$

45) E. $ax^{2n}+bx^n = c$
S. $x = \sqrt[n]{\frac{-b+\sqrt{(b^2+4ac)}}{2a}}$,
$x = \sqrt[n]{\frac{-b-\sqrt{(b^2+4ac)}}{2a}}$

46) E. $x^4-74x^2 = -1225$
S. $x = \pm 5, \quad x = \pm 7$

47) E. $3x^6+42x^3 = 3321$
S. $x = 3, \quad x = -\sqrt[3]{41}$

b) Équations à plusieurs inconnues.

1) E. $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2 = a \\ x^2-y^2 = b \end{matrix}\right\}$
S. $x = \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

2) E. $\left\{\begin{matrix} x+y = a \\ xy = b \end{matrix}\right\}$
S. $x = \frac{a+\sqrt{(a^2-4b)}}{2}, \quad y = \frac{a-\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$
ou $x = \frac{a-\sqrt{(a^2-4b)}}{2}, \quad y = \frac{a+\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$

3) E. $\begin{cases} x+y = a \\ x^2+y^2 = b \end{cases}$

S. $x = \dfrac{a+\sqrt{(2b-a^2)}}{2}$, $y = \dfrac{a-\sqrt{(2b-a^2)}}{2}$

ou $x = \dfrac{a-\sqrt{(2b-a^2)}}{2}$, $y = \dfrac{a+\sqrt{(2b-a^2)}}{2}$

4) E. $\begin{cases} xy = a \\ x^2+y^2 = b \end{cases}$

S. $x = \pm\sqrt{\dfrac{b+\sqrt{(b^2-4a^2)}}{2}}$

$y = \pm\sqrt{\dfrac{b-\sqrt{(b^2-4a^2)}}{2}}$

ou $x = \pm\sqrt{\dfrac{b-\sqrt{(b^2-4a^2)}}{2}}$

$y = \pm\sqrt{\dfrac{b+\sqrt{(b^2-4a^2)}}{2}}$

5) E. $\begin{cases} x+y = a \\ x^3+y^3 = b \end{cases}$

S. $x = \dfrac{a}{2}+\sqrt{\dfrac{4b-a^3}{12a}}$, $y = \dfrac{a}{2}-\sqrt{\dfrac{4b-a^3}{12a}}$

ou $x = \dfrac{a}{2}-\sqrt{\dfrac{4b-a^3}{12a}}$, $y = \dfrac{a}{2}+\sqrt{\dfrac{4b-a^3}{12a}}$

6) E. $\begin{cases} 2x+3y = 118 \\ 5x^2-7y^2 = 4333 \end{cases}$

S. $x = 35$, $y = 16$

ou $x = -229\tfrac{6}{17}$, $y = 192\tfrac{4}{17}$

7) E. $\begin{cases} ax+by = h \\ cx^2+dy^2 = k \end{cases}$

S. $x = \dfrac{adh \pm b\sqrt{(a^2dk-cdh^2+b^2ck)}}{a^2d+b^2c}$

$y = \dfrac{bch \mp a\sqrt{(a^2dk-cdh^2+b^2ck)}}{a^2d+b^2c}$

8) E. $\left\{\begin{matrix} x^2 - y^2 = h \\ (x+y+a)^2 + (x-y+a)^2 = k \end{matrix}\right\}$

S. $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{(2h+k-a^2)}}{2}$

$y = \pm \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}k - h \mp a\sqrt{(2h+k-a^2)}}{2}}$

9) E. $\left\{\begin{matrix} \dfrac{18x}{y} = \dfrac{8y}{x} \\ 3xy + 2x + y = 485 \end{matrix}\right\}$

S. $x = 10, \quad y = 15$

ou $x = -10\frac{7}{9}, \quad y = -16\frac{1}{6}$ *)

10) E. $\left\{\begin{matrix} \dfrac{ax}{y} = \dfrac{by}{x} \\ cxy + dx + ey = h \end{matrix}\right\}$

**) S. $\left\{\begin{matrix} x = \dfrac{-(e\sqrt{a} + d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a} + d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}} \\ y = \dfrac{-(e\sqrt{a} + d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a} + d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}} \end{matrix}\right\}$

ou $\left\{\begin{matrix} x = \dfrac{-(e\sqrt{a} - d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a} - d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}} \\ y = \dfrac{+(e\sqrt{a} - d\sqrt{b}) \mp \sqrt{[(e\sqrt{a} - d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}} \end{matrix}\right\}$

---

*) Ces équations admettent encore deux solutions, savoir

$x = \dfrac{1 + \sqrt{-34919}}{18}, \quad y = \dfrac{-1 - \sqrt{-34919}}{12}$, et

$x = \dfrac{1 - \sqrt{-34919}}{18}, \quad y = \dfrac{-1 + \sqrt{-34919}}{12}$,

qui cependant, comme on voit, sont imaginaires.

**) Donc ces équations donnent quatre couples de valeurs correspondantes de x et de y.

11) E. $\begin{cases} x+y+x^2+y^2 = a \\ x-y+x^2-y^2 = b \end{cases}$

$$\text{S. } x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+2b+1)}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a-2b+1)}}{2}$$

$$\text{ou } x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+2b+1)}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \mp \sqrt{(2a-2b+1)}}{2} \text{ *)}$$

12) E. $\begin{cases} x+y = xy \\ x+y+x^2+y^2 = a \end{cases}$

$$\text{S. } x = \frac{1 \pm \sqrt{(4a+1)} + \sqrt{[4a-6 \mp 6\sqrt{(4a+1)}]}}{4}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{(4a+1)} - \sqrt{[4a-6 \mp 6\sqrt{(4a+1)}]}}{4} \text{ **)}$$

13) E. $\begin{cases} ax - by = g \\ a^3x^3 - b^3y^3 = hxy \end{cases}$

$$\text{S. } x = \frac{g}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right),$$

$$y = \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$$

14) E. $\begin{cases} (x-y)\,(x^2-y^2) = a \\ (x+y)\,(x^2+y^2) = b \end{cases}$

$$\text{S. } x = \frac{\sqrt{(2b-a)} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}, \quad y = \frac{\sqrt{(2b-a)} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}$$

---

*) Donc, ces équations donnent aussi quatre couples de valeurs correspondantes de x et de y.

**) On peut aussi mettre la valeur de x au lieu de celle de y, et réciproquement.

15) E. $\begin{Bmatrix} x^2+y^2+z^2=a \\ y^2=2xz+b \\ cx=dz \end{Bmatrix}$

S. $x=\dfrac{d\sqrt{(a-b)}}{c+d}$, $y=\dfrac{\sqrt{[2acd+b(c^2+d^2)]}}{c+d}$

$$z=\frac{c\sqrt{(a-b)}}{c+d}$$

16) E. $\begin{Bmatrix} x(y+z)=a \\ y(x+z)=b \\ z(x+y)=c \end{Bmatrix}$

S. $x=\pm\sqrt{\dfrac{(a-c+b)(a-b+c)}{2(c-a+b)}}$

$$y=\pm\sqrt{\frac{(a-c+b)(c-a+b)}{2(a-b+c)}}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{(c-a+b)(a-b+c)}{2(a-c+b)}}$$

17) E. $\begin{Bmatrix} \dfrac{xyz}{x+y}=a \\ \dfrac{xyz}{y+z}=b \\ \dfrac{xyz}{x+z}=c \end{Bmatrix}$

S. $x=\pm\sqrt{\dfrac{2abc(ab-ac+bc)}{(ab+ac-bc)(bc+ac-ab)}}$

$$y=\pm\sqrt{\frac{2abc(bc+ac-ab)}{(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)}}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{2abc(ab+ac-bc)}{(ab-ac+bc)(bc+ac-ab)}}$$

18) E. $\begin{Bmatrix} xy=p \\ (b-y)z=p' \\ (a-x)(c-z)=p'' \end{Bmatrix}$

11) E. $\begin{cases} x+y+x^2+y^2 = a \\ x-y+x^2-y^2 = b \end{cases}$.

$$\text{S. } x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+2b+1)}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a-2b+1)}}{2}$$

$$\text{ou } x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+2b+1)}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \mp \sqrt{(2a-2b+1)}}{2} \text{*)}$$

12) E. $\begin{cases} x+y = xy \\ x+y+x^2+y^2 = a \end{cases}$

$$\text{S. } x = \frac{1 \pm \sqrt{(4a+1)} + \sqrt{[4a-6 \mp 6\sqrt{(4a+1)}]}}{4}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{(4a+1)} - \sqrt{[4a-6 \mp 6\sqrt{(4a+1)}]}}{4} \text{**)}$$

13) E. $\begin{cases} ax-by = g \\ a^3x^3-b^3y^3 = hxy \end{cases}$

$$\text{S. } x = \frac{g}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right),$$

$$y = \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$$

14) E. $\begin{cases} (x-y)\,(x^2-y^2) = a \\ (x+y)\,(x^2+y^2) = b \end{cases}$

$$\text{S. } x = \frac{\sqrt{(2b-a)} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}, \quad y = \frac{\sqrt{(2b-a)} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}$$

---

*) Donc, ces équations donnent aussi quatre couples de valeurs correspondantes de x et de y.

**) On peut aussi mettre la valeur de x au lieu de celle de y, et réciproquement.

15) E. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ y^2=2xz+b \\ cx=dz \end{cases}$

S. $x=\dfrac{d\sqrt{(a-b)}}{c+d}$, $y=\dfrac{\sqrt{[2acd+b(c^2+d^2)]}}{c+d}$

$z=\dfrac{c\sqrt{(a-b)}}{c+d}$

16) E. $\begin{cases} x(y+z)=a \\ y(x+z)=b \\ z(x+y)=c \end{cases}$

S. $x=\pm\sqrt{\dfrac{(a-c+b)(a-b+c)}{2(c-a+b)}}$

$y=\pm\sqrt{\dfrac{(a-c+b)(c-a+b)}{2(a-b+c)}}$

$z=\pm\sqrt{\dfrac{(c-a+b)(a-b+c)}{2(a-c+b)}}$

17) E. $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=a \\ \dfrac{xyz}{y+z}=b \\ \dfrac{xyz}{x+z}=c \end{cases}$

S. $x=\pm\sqrt{\dfrac{2abc(ab-ac+bc)}{(ab+ac-bc)(bc+ac-ab)}}$

$y=\pm\sqrt{\dfrac{2abc(bc+ac-ab)}{(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)}}$

$z=\pm\sqrt{\dfrac{2abc(ab+ac-bc)}{(ab-ac+bc)(bc+ac-ab)}}$

18) E. $\begin{cases} xy=p \\ (b-y)z=p' \\ (a-x)(c-z)=p'' \end{cases}$

S. $x = \frac{-A \pm \sqrt{[A^2 - 4p(p'-bc)(p''-ac)]}}{2(p'-bc)}$

$y = \frac{-A \mp \sqrt{[A^2 - 4p(p'-bc)(p''-ac)]}}{2(p''-ac)}$

$z = \frac{-B \mp \sqrt{[B^2 - 4p'(p-ab)(p''-ac)]}}{2(p-ab)}$

($cp - ap' - bp'' + abc$ étant $= A$, et $cp - ap' + bp'' - abc = B$).

19) E. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = k \\ ax + a'y + a''z = 0 \\ bx + b'y + b''z = 0 \end{cases}$

S. $x = (a'b'' - a''b')A$; $y = (a''b - ab'')A$,
$z = (ab' - a'b)A$.

$\pm\sqrt{\frac{k}{(ab'-a'b)^2 + (a'b''-a''b')^2 + (a''b-ab'')^2}}$
étant $= A$

20) E. $\begin{cases} axy + bx + cy + d = 0 \\ a'yz + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''zx + b''z + c''x + d'' = 0 \end{cases}$

S. L'élimination de y et de z, donne l'équation du second degré

$(a''x + b'')[(bb' - ad')x + b'd - cd'] +$
$(c''x + d'')[(ac' - a'b)x + cc' - a'd] = 0.$

Si l'on a trouvé x de cette équation, on aura aussi y et z.

(On trouvera page 136 des équations génerales d'une forme semblable.)

4) Résolution des équations de degrés supérieurs.

a) Formule de Cardan.

E. $x^3 = Px + Q$

$$\text{S. } x = \sqrt[3]{\frac{Q + \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{Q - \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}}$$

Exemples.

1) E. $x^3 - 3x - 2 = 0$
 S. $x = 2$

2) E. $x^3 + 12x + 63 = 0$
 S. $x = -3$

3) E. $x^3 - 21x + 344 = 0$
 S. $x = -8$

4) E. $x^3 - 6x - 40 = 0$
 S. $x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})} =$
 $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 4$

5) E. $x^3 + 3x - 14 = 0$
 S. $x = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7 - \sqrt{50})} =$
 $\sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} = 2$

6) E. $x^3 - \frac{15}{2}x + 290\frac{1}{2} = 0$
 S. $x = \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}}$
 $= \sqrt[3]{\left(\frac{-7 + \sqrt{39}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-7 - \sqrt{39}}{2}\right)^3} = -7$

7) E. $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$
 S. $x = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = 3{,}36216\ldots$

8) E. $x^3-12x-28=0$

S. $x=\sqrt[3]{(14+\sqrt{132})}+\sqrt[3]{(14-\sqrt{132})}=4{,}30213\ldots$

9) E. $x^3+6x^2+20x+15=0$

S. $x=-2+\sqrt[3]{\frac{81+\sqrt{12705}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{81-\sqrt{12705}}{18}}$

$=-2+\sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{105}}{6}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{105}}{6}\right)^3}=-1$

10) E. $x^3-15x^2+71x-297=0$

S. $x=5+\sqrt[3]{\frac{864+\sqrt{746304}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{864-\sqrt{746304}}{9}}$

$=5+\sqrt[3]{\left(\frac{9+\sqrt{69}}{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{9-\sqrt{69}}{3}\right)^3}=11$

11) E. $x^3-12x^2+36x-7=0$

S. $x=4+\sqrt[3]{\frac{-9+\sqrt{-175}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-9-\sqrt{-175}}{2}}$

$=4+\sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{-7}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{-7}}{2}\right)^3}=7$

b) Recherche des racines rationnelles des équations. *)

1) E. $x^3-9x^2+26x-24=0$
R. 2, 3, 4

2) E. $x^3-8x^2+5x+14=0$
R. -1, 2, 7

3) E. $x^3-49x-120=0$
R. -3, -5, 8

4) E. $x^3-18x^2+87x-110=0$
R. 2, 5, 11

*) R. signifie racine de l'équation.

5) E. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
R. $1,\ 2,\ 3,\ 4$

6) E. $x^4 - 45x^2 - 40x + 84 = 0$
R. $1,\ -2,\ -6,\ 7$

7) E. $x^4 + 29x^3 + 287x^2 + 1147x + 1560 = 0$
R. $-3,\ -5,\ -8,\ -13$

8) E. $x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{79}{8}x + \frac{15}{4} = 0$
R. $\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ -6$

9) E. $x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24} = 0$
R. $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}$

10) E. $x^3 - \frac{14}{3}x^2 + 7x - \frac{10}{3} = 0$
R. $1,\ \frac{5}{3},\ 2$

11) E. $x^3 + \frac{8}{5}x^2 + \frac{9}{100}x - \frac{9}{100} = 0$
R. $\frac{1}{5},\ -\frac{3}{10},\ -\frac{3}{2}$

12) E. $x^3 - \frac{39}{28}x^2 + \frac{31}{56}x - \frac{3}{56} = 0$
R. $\frac{1}{2},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{4}$

13) E. $x^3 - \frac{139}{24}x^2 + \frac{329}{48}x + \frac{55}{16} = 0$
R. $-\frac{3}{8},\ \frac{5}{2},\ \frac{11}{3}$

14) E. $x^3 + \frac{82}{15}x^2 - \frac{173}{5}x - \frac{126}{5} = 0$
R. $-\frac{2}{3},\ \frac{21}{5},\ -9$

15) E. $x^4 - \frac{19}{4}x^3 + \frac{49}{8}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{8} = 0$
R. $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 1,\ 3$

16) E. $x^4 - \frac{41}{8}x^3 + \frac{287}{32}x^2 - \frac{393}{64}x + \frac{45}{32} = 0$
R. $\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{15}{8},\ 2$

17) E. $x^3 - 14x^2 - 5x + 70 = 0$
R. $14,\ +\sqrt{5},\ -\sqrt{5}$

18) E. $x^3-13x^2+49x-45=0$
R. $5,\ 4+\sqrt{7},\ 4-\sqrt{7}$

19) E. $x^3-13x^2+38x+16=0$
R. $8,\ \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33},\ \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33}$

20) E. $x^3-6x^2+19x-44=0$
R. $4,\ 1+\sqrt{-10},\ 1-\sqrt{-10}$

21) E. $x^3+\frac{7}{6}x^2+\frac{13}{2}x+\frac{21}{2}=0$
R. $-\frac{3}{2},\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{-251},\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{-251}$

22) E. $x^4+x^3-24x^2+43x-21=0$
R. $1,\ 3,\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{53},\ -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{53}$

23) E. $x^5-3x^4-8x^3+24x^2-9x+27=0$
R. $3,\ 3,\ -3,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$

24) E. $x^5-\frac{3}{2}x^4-6x^3+9x^2-13x+19\frac{1}{2}=0$
R. $\frac{3}{2},\ +\sqrt{(3+\sqrt{22})},\ -\sqrt{(3+\sqrt{22})},$
$+\sqrt{(3-\sqrt{22})},\ -\sqrt{(3-\sqrt{22})}$

---

5) Quelques cas généraux dans lesquels les équations à plusieurs inconnues peuvent être résolues facilement.

I. Soient $x',\ x'',\ x''',\ \cdots\cdots\ x^{n'}$, n quantités inconnues. Si l'on a une équation de la forme

$$a'x'^m+a''x''^m+a'''x'''^m+a''''x''''^m+\cdots\cdots$$
$$+a^{n'}(x^{n'})^m=K$$

et que de plus on ait $n-1$ équations de la forme suivante

$$b'x'+b''x''+b'''x'''+b''''x''''+\cdots\cdots+b^{n'}x^{n'}=0$$
$$c'x'+c''x''+c'''x'''+c''''x''''+\cdots\cdots+c^{n'}x^{n'}=0$$
$$d'x'+d''x''+d'''x'''+d''''x''''+\cdots\cdots+d^{n'}x^{n'}=0$$

etc.

dans lesquelles les quantités inconnues ne passent pas le premier degré, on pourra, par la résolution de ces dernières équations, exprimer toutes les quantités inconnues, par l'une d'entre elles, de sorte qu'on a $x''=A''x'$, $x'''=A'''x'$, $x''''=A''''x'$, $\cdots\cdots x^{n'}=A^{n'}x'$, A'', A''', A'''', $\cdots\cdots\cdots A^{n'}$ étant des quantités connues, et si l'on substitue ces expressions dans la première équation on aura :

$$x'=\sqrt[m]{\frac{K}{a'+a''A''^m+a'''A'''^m+a''''A''''^m\cdots\cdots+a^{n'}(A^{n'})^m}}$$

d'où l'on peut trouver les valeurs de x'', $x'''\cdots\cdots x^{n'}$. On peut encore généraliser ce problème; ce que nous laissons au lecteur.

II. Soient données les n équations rentrantes en elles-mêmes entre les n inconnues x', x'', $x'''\cdots\cdots x^{n'}$,

$$a'x'x''+b'x'+c'x''+d'=0$$
$$a''x''x'''+b''x''+c''x'''+d''=0$$
$$a'''x'''x''''+b'''x'''+c'''x''''+d'''=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{(n-1)'}x^{(n-1)'}x^{n'}+b^{(n-1)'}x^{(n-1)'}+c^{(n-1)'}x^{n'}+d^{(n-1)'}=0$$
$$a^{n'}x^{n'}x'+b^{n'}x^{n'}+c^{n'}x'+d^{n'}=0.$$

On exprimera par la première équation la valeur de x'' en x', on substituera cette valeur de x'' dans la seconde équation; puis on exprimera x''' en x' etc.; on trouvera à la fin $x^{n'}$ exprimé par x' et la forme de cette expression sera $x^{n'}=\frac{Ax'+B}{Cx'+D}$. Si l'on substitue cette valeur dans la dernière équation, on trouvera une équation du second degré pour x'. Celle-ci donnera la valeur de x' et par conséquent aussi les valeurs des autres quantités inconnues.

. . . .

Les racines d'une équation étant données, on peut trouver l'équation à laquelle elles appartiennent: de quelle manière? A quelle équation, par ex: les racines 1, 3, — 1, — 4, appartiennent-elles? et à laquelle les racines $6, 2+3\sqrt{-1}, 2-3\sqrt{-1}$? Donc les coefficiens d'une équation ont des relations nécessaires avec ses racines: quelles sont ces relations? Les trois équations I. $x+y+z = a$, II. $xy+xz+yz = b$, III. $xyz = c$, ou les quatre équations I. $x+y+z+w = a$, II. $xy+xz+xw+yz+yw+zw = b$, III. $xyz+xyw+xzw+yzw = c$, IV. $xyzw = d$ étant données, on peut trouver, dans le premier cas, une équation du troisième degré; dans le second cas, une équation du quatrième degré qui ait toutes les inconnues pour racines. Comment cette équation se forme-t-elle? Si m racines d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, sont données, le développement des autres n'exige que la résolution d'une équation du $(n-m)^{\text{ième}}$ degré; comment trouve-t-on cette équation? — Si le degré d'une équation est un nombre impair, elle a nécessairement au moins une racine réelle: pourquoi? — Si $h+k\sqrt{-1}$ est la racine imaginaire d'une équation, il faut que $h-k\sqrt{-1}$ en soit aussi une: comment démontrer cela? — Toutes les quantités imaginaires peuvent être exprimées par $h+k\sqrt{-1}$, ce qui peut être démontré rigoureusement. Combien de racines imaginaires et combien de réelles peut avoir une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, selon que n est un nombre pair ou impair? — Si la formule de Cardan donné une expression imaginaire, l'équation n'a-t-elle alors en effet aucune racine réelle? ou cela signifie-t-il ici seulement, que la forme qu'on voudrait donner à la racine, est impossible?

XIII. *Résolution par approximation des équations numériques.*

1) Équations à une seule inconnue.

Première méthode.

Soit $X=0$ une équation quelconque pour la quantité inconnue x. Et soit w une valeur de x trouvée, n'importe de quelle manière, laquelle diffère de la vraie valeur de x moins que l'unité; si l'on met $w+h$ au lieu de x, il faut que la valeur exacte de h soit <1. Donc, si l'on ne conserve dans le dévèloppement que la première puissance de h, en négligeant les puissances supérieures, comme plus petites, l'équation $X=0$ se transformera en une autre de la forme $A+Bh=0$, où A, B, sont des quantités données. Par là on trouve h, et en même temps aussi $x=w+h$, du moins par approximation. On peut procéder avec cette nouvelle valeur de x comme précédemment avec w, et en répétant cette opération, on peut s'approcher toujours davantage de la vraie valeur de x.

En appliquant cette méthode à l'équation générale

$$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}+\dots\dots+hx^2+kx+l=0$$

on trouve l'expression suivante pour les valeurs approchées de x, savoir

$$\frac{(m-1)w^m+(m-2)aw^{m-1}+(m-3)bw^{m-2}+\dots+1hw^2-l}{mw^{m-1}+(m-1)aw^{m-2}+(m-2)bw^{m-3}+\dots+2hw+k}$$

Pour l'équation du troisième degré $x^3+ax^2+bx+c=0$ cela donne

$$x=\frac{2w^3+aw^2-c}{3w^2+2aw+b}$$

Pour l'équation du quatrième degré $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ on a

$$x=\frac{3w^4+2aw^3+bw^2-d}{4w^3+3aw^2+2bw+c}$$

Pour l'équation du cinquième degré $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ on a

$$x=\frac{4w^5+3aw^4+2bw^3+cw^2-e}{5w^4+4aw^3+3bw^2+2cw+d}$$

etc.

Exemples.

1) E. $x^3=2$

$w=1$, $w'=\frac{4}{3}$, $w''=\frac{91}{72}$, $w'''=\frac{2253638}{1788696}$, etc. *)

2) E. $x^3=30$

$w=3$, $w'=\frac{28}{9}$, $w''=\frac{65774}{21168}$, etc.

3) E. $x^3-12x^2+57x-94=0$

$w=3$, $w'=\frac{10}{3}$, $w''=\frac{938}{279}$, etc.

---

*) w, w', w'', etc. désignent les valeurs successives, approchées de x. Ici l'on ne cherche jamais qu'une seule racine. Le calcul est le même pour les autres racines réelles.

4) E. $x^3-15x^2+72x-109=0$
$w=5$, $w'=\frac{16}{3}$, $w''=\frac{385}{72}$, etc.

5) E. $x^3-13x^2+38x+17=0$
$w=8$, $w'=\frac{175}{22}$, $w''=\frac{1778984}{223674}$, etc.

6) E. $x^3+2x^2+3x-52=0$
$w=3$, $w'=\frac{62}{21}$, $w''=\frac{1119676}{379328}$, etc.

7) E. $x^3-12x-132=0$
$w=6$, $w'=\frac{47}{8}$, $w''=\frac{137615}{23436}$, etc.

8) E. $x^4-4x^3+18=0$
$w=2$, $w'=\frac{17}{8}$, $w''=\frac{187597}{64736}$, etc.

9) E. $x^4+8x^2+16x-440=0$
$w=4$, $w'=\frac{167}{42}$, $w''=\frac{4096104771}{1030204056}$, etc.

Pour pousser le calcul plus-loin, il peut être utile de développer jusqu'à environ trois décimales la fraction trouvée pour w'', parce qu'il arrive rarement que la troisième approximation donne une racine plus exacte.

Seconde méthode.

Soit $X=0$ l'équation donnée en x: on demande le développement d'une de ses racines au moyen des fractions continues. Voici le procédé conformément au principe général VIII page 99.

En substituant $a+\frac{1}{x'}$, au lieu de x, l'équation $X=0$ se transformera en une autre $X'=0$ pour x'. Soient a' et $a'+1$ les deux nombres entiers entre lesquels tombe une racine de cette équation; en substituant $a'+\frac{1}{x''}$ au lieu à x', l'équation $X'=0$ se transformera en une autre $X''=0$ pour x''. Si une racine de cette dernière équation tombe entre a'' et $a''+1$, il faut de nouveau mettre $a''+\frac{1}{x'''}$ pour x'', et continuer le calcul de la même manière. On trouve alors la racine x de l'équation donnée, exprimée par la fraction continue

$$x=a+\frac{1}{x'}=a+\frac{1}{a'+\frac{1}{x''}}=a+\frac{1}{a'+\frac{1}{a''+\text{etc.}}}$$

Si l'on développe les valeurs approximatives de cette fraction continue, on trouve la valeur approchée de la racine de l'équation donnée qu'on cherchait.

Exemples.

1) $x^3-2=0$

....

$X=x^3-2=0$	$x=1+\frac{1}{x'}$
$X'=x'^3-3x'^2-3x'-1=0$	$x'=3+\frac{1}{x''}$
$X''=10x''^3-6x''^2-6x''-1=0$	$x''=1+\frac{1}{x'''}$
$X'''=3x'''^3-12x'''^2-24x'''-10=0$	$x'''=5+\frac{1}{x^{IV}}$
$X^{IV}=55x^{IV3}-81x^{IV2}-33x^{IV}-3=0$	$x^{IV}=1+\frac{1}{x^{V}}$
$X^{V}=62x^{V3}+30x^{V2}-84x^{V}-55=0$	$x^{V}=1+\frac{1}{x^{VI}}$
etc.	

Valeurs approchées: $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{29}{23}, \frac{34}{27}, \frac{63}{50}$, etc.
Racine exacte: 1,25992 ......

2) $x^3-15x^2+63x-50=0$

$$
\begin{array}{l|l}
X\ =x^3-15x^2+63x-50=0 & x\ =1+\dfrac{1}{x'} \\[2ex]
X'\ =x'^3-36x'^2+12x'-1=0 & x'\ =35+\dfrac{1}{x''} \\[2ex]
X''\ =806x''^3-1167x''^2-69x''-1=0 & x''=1+\dfrac{1}{x'''} \\[2ex]
X'''=431x'''^3-15x'''^2-1251x'''-806=0 & x'''=1+\dfrac{1}{x^{iv}} \\
\text{etc.} &
\end{array}
$$

Valeurs approchées: 1, $\frac{36}{35}$, $\frac{37}{36}$, $\frac{73}{71}$, etc.
Racine exacte: $1{,}02803\ldots\ldots$

3) $x^3-12x^2+45x-53=0$

$$
\begin{array}{l|l}
X\ =x^3-12x^2+45x-53=0 & x\ =5+\dfrac{1}{x'} \\[2ex]
X'\ =3x'^3-3x'-1=0 & x'\ =1+\dfrac{1}{x''} \\[2ex]
X''=x''^3-6x''^2-9x''-3=0 & x''\ =7+\dfrac{1}{x'''} \\[2ex]
X'''=17x'''^3-54x'''^2-15x'''-1=0 & x'''=3+\dfrac{1}{x^{iv}} \\[2ex]
X^{iv}=73x^{iv3}-120x^{iv2}-99x^{iv}-17=0 & x^{iv}=2+\dfrac{1}{x^{v}} \\[2ex]
X^{v}\ =111x^{v3}-297x^{v2}-318x^{v}-73=0 & x^{v}\ =3+\dfrac{1}{x^{vi}} \\[2ex]
X^{vi}=703x^{vi3}-579x^{vi2}-702x^{vi}-111=0 & x^{vi}=1+\dfrac{1}{x^{vii}} \\
\text{etc.} &
\end{array}
$$

Valeurs approchées: $5, 6$, $\frac{47}{8}$, $\frac{147}{25}$, $\frac{341}{58}$, $\frac{1170}{199}$, $\frac{1511}{257}$, etc.
Racine exacte: $5{,}879385\ldots\ldots$

$$4)\ x^3-12x^2+57x-94=0$$

$$\begin{array}{l|l}
X\ =x^3-12x^2+57x-94=0 & x\ =3+\dfrac{1}{x'} \\
X'\ =4x'^3-12x'^2+3x'-1=0 & x'\ =3-\dfrac{1}{x''} \\
X''\ =8x''^3-39x''^2+24x''-4=0 & x''\ =4+\dfrac{1}{x'''} \\
X'''=20x'''^3-96x'''^2-57x'''-8=0 & x'''=5+\dfrac{1}{x^{IV}} \\
X^{IV}=193x^{IV3}-483x^{IV2}-204x^{IV}-20=0 & x^{IV}=3-\dfrac{1}{x^{V}} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

Valeurs approchées: 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{37}{11}$, $\frac{195}{58}$, $\frac{622}{185}$, etc.
Racine exacte: 3,36216.....

$$5)\ x^3-12x-28=0$$

$$\begin{array}{l|l}
X\ =x^3-12x-28=0 & x\ =4+\dfrac{1}{x'} \\
X'\ =12x'^3-36x'^2-12x'-1=0 & x'\ =3+\dfrac{1}{x''} \\
X''\ =37x''^3-96x''^2-72x''-12=0 & x''\ =3+\dfrac{1}{x'''} \\
X'''=93x'''^3-351x'''^2-237x'''-37=0 & x'''=4+\dfrac{1}{x^{IV}} \\
X^{IV}=649x^{IV3}-1419x^{IV2}-765x^{IV}-93=0 & x^{IV}=3-\dfrac{1}{x^{V}} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

Valeurs approchées: 4, $\frac{13}{3}$, $\frac{43}{10}$, $\frac{185}{43}$, $\frac{598}{139}$, etc.
Racine exacte: 4,30213.....

On peut se servir, dans cette méthode d'approximation, de diverses réductions qui ne sont pas de notre sujet. On peut la réunir aussi avec la première méthode quand on s'est déjà un peu rapproché de la racine.

---

2) Équations à plusieurs inconnues.

Soient $X=0$, $X_{\prime}=0$, deux équations à deux inconnues x, y: nous supposons que les valeurs de x, y, sont déjà à-peu-près connues, et qu'on demande des valeurs plus approchées.

I. Soient $x=a$, $y=b$ ces valeurs connues. Substituons $a+h$ pour x, $b+k$ pour y, dans les deux équations $X=0$, $X_{\prime}=0$, et en développant, conservons des expressions $X, X_{\prime}$, seulement les termes dans lesquels se trouvent h et k dans la première puissance, en négligeant, comme plus petits, ceux qui contiennent des produits et des puissances supérieures de h et k.

Les équations $X=0$, $X_{\prime}=0$, se transformeront par là en deux autres de la forme suivante:

$$A+Bh+Ck=0$$
$$A'+B'h+C'k=0$$

A, B, C, A', B', C', étant des nombres connus. Les valeurs de h, k, étant développées de ces équations, donnent les corrections des valeurs a, b, et en même temps les valeurs approchées de x, y, savoir $x=a+h$, $y=b+k$, qui approcheront beaucoup plus des valeurs effectives de x et y, que les précédentes a, b.

II. On continuera le calcul avec ces valeurs comme ci-dessus avec a, b, ce qui donne les corrections suivantes, et par-là une nouvelle couple de valeurs approchées de x, y, lesquelles épuiseront les valeurs exactes de ces quantités plus que les précédentes.

III. On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on se croie assez près des valeurs de x, y. On peut, au reste, dans ces calculs, se servir avec avantage des logarithmes.

Exemples.

Soient les équations proposées

$$x^7 - 5x^2y^4 + 1506 = 0$$
$$y^5 - 3x^4y - 103 = 0$$

Les valeurs $x=2$, $y=3$, satisfont à-peu-près à ces équations.

Première correction.

$$14 - 1172h - 2160k = 0$$
$$-4 - 288h + 357k = 0$$

de là: $h = -0{,}0035$, $k = +0{,}0084$

donc: $x = 1{,}9965$, $y = 3{,}0084$

Seconde correction.

$$-0{,}486 - 1189{,}170h - 2170{,}576k = 0$$
$$0{,}026 - 287{,}293h + 361{,}890k = 0$$

de là: $h = -0{,}000113$, $k = -0{,}000161$

donc: $x = 1{,}996387$, $y = 3{,}008239$

Les dernières valeurs approximatives de x, y, sont déjà exactes jusqu'à la sixième décimale, et n'ont plus besoin de correction, à moins qu'on ne veuille les avoir encore plus près.

. . . .

On peut énoncer généralement cette méthode de la manière suivante. Soient données n équations $X = 0$, $X_{\prime} = 0$, $X_{\prime\prime} = 0$, etc., entre les n inconnues x, y, z, etc. Soient données, de plus, les valeurs a, b, c, etc. déjà assez approchées de x, y, z, etc., de sorte que leur différence des véritables valeurs peut être supposée < 1. Qu'on substitue $a + h$, $b + k$, $c + l$ etc., au lieu de x, y, z, etc., dans ces équations, en ne conservant dans les développemens que les premières puissances de h, k, l, etc., et en négligeant les produits et les puissances supérieures, on aura n équations entre les n quantités h, k, l, etc., de la forme

$$A + Bh + Ck + Dl + \text{etc.}, = 0$$

Si on calcule par ces équations les corrections h, k, l, etc., l'on aura aussi les valeurs approximatives de x, y, z, etc., savoir $x = a + h$, $y = b + k$, $z = c + l$ etc. On continuera le calcul avec ces valeurs, comme ci-dessus avec a, b, c, etc., et l'on développera les corrections jusqu'à ce qu'on ait trouvé les valeurs de x, y, z, etc., avec la précision demandée.

Le point essentiel de cette méthode, savoir la manière de corriger successivement les résultats, est la base de la plupart des méthodes d'approximation. Quoique cette méthode ne puisse être traitée que dans l'analyse avec toute la généralité et toutes les réductions dont elle est susceptible, elle mérite pourtant d'être introduite dans les élémens d'Algèbre, à cause de sa grande utilité et de sa simplicité.

SECTION TROISIÈME,

CONTENANT

DES PROBLÈMES POUR EXERCER LES PROPOSITIONS DES SECTIONS PRÉCÉDENTES.

XIV. *Problèmes pour les équations du premier degré à une seule inconnue.*

1) **D**eux capitalistes évaluent leur fortune: il se trouve que l'un est le double plus riche que l'autre, et qu'ils possèdent ensemble 38700 fr. Quelle est la fortune de chacun?

Rép. 12900, et 25800 fr.

2) Une somme de 2500 fr. doit être partagée entre deux frères, de manière que l'un reçoive un fr. quand l'autre en reçoit quatre. Quelle sera la part de chacun?

R. 500 et 2000 fr.

3) Quelqu'un a 2640 fr. et $4\frac{1}{2}$ fois autant en or qu'en argent: combien a-t-il de chaque espèce?

R. 480 fr. en argent, 2160 fr. en or.

4) Partager le nombre 237 en deux parties telles que l'une soit contenue dans l'autre une fois et demie. Quelles seront ces parties?

R. $94\frac{4}{5}$ et $142\frac{1}{5}$.

Qu'est-ce que ces quatre problèmes ont de commun?

5) Trouver deux nombres dont l'un soit m fois aussi grand que l'autre et que leur somme soit $= a$.

R. Les nombres cherchés sont $\frac{a}{m+1}$ et $\frac{ma}{m+1}$.

6) Une somme de 1200 fr. doit être partagée entre deux personnes A et B, de manière que la part de A soit à celle de B, comme 2 est à 7. Quelles seront ces parts?

R. A $266\frac{2}{3}$, B $933\frac{1}{3}$ fr.

Comment peut-on généraliser ce problème?

7) Partager un nombre a en deux parties telles que la première soit à la seconde comme m est à n.

R. $\frac{ma}{m+n}$ et $\frac{na}{m+n}$, ce qui peut aussi s'écrire $\frac{m}{m+n}a$, $\frac{n}{m+n}a$.

Qu'est-ce que ce problème a de commun avec le 5[me] et comment peut-on transformer l'un en l'autre?

8) Combien d'argent ai-je dans ma poche, si le quart et le cinquième de la somme font ensemble 2 fr. 25 c.?

R. 5 fr.

9) Deux amis achètent un cheval en commun; ils conviennent du prix. Mais ils se trouvent n'avoir sur eux, l'un que le cinquième, l'autre que le septième

de la somme fixée; de manière qu'ils ne peuvent payer que 48 louis. On demande quel est le prix du cheval?

R. 140 louis.

Ce problème et le précédent sont parfaitement semblables: comment exprimer généralement cette ressemblance?

10) Quel est le nombre qui, divisé par m, puis par n, donne des quotiens dont la somme soit $= a$?

R. $\frac{mna}{m+n}$.

11) Partager 46 en deux parties inégales, dont l'une, divisée par 7, l'autre par 3, donnent des quotiens dont la somme soit 10. Ces parties sont?

R. 28 et 18.

12) Partager un nombre a en deux parties, dont l'une étant divisée par m et l'autre par n donne des quotiens, dont la somme soit égale au nombre b?

R. $\frac{m(nb-a)}{n-m}$, $\frac{n(mb-a)}{m-n}$.

13) Une société de 266 personnes, composée de marchands, d'officiers et d'étudiants, compte quatre fois autant de marchands et deux fois autant d'officiers que d'étudiants. Trouver leur nombre respectif.

R. 152 marchands, 76 officiers, 38 étudiants.

14) Il y a dans une forteresse une garnison de 2600 hommes, composée de 9 fois autant de fantassins, et de 3 fois autant d'artilleurs que de cavaliers. Quel est le nombre d'hommes de chaque arme?

R. 1800 fantassins, 600 artilleurs, 200 cavaliers.

15) Un voyageur a parcouru 3040 milles. Il en a fait par eau $3\frac{1}{2}$ fois autant qu'à cheval, et à pied $2\frac{1}{3}$ fois autant que par eau. Combien de milles a-t-il faits de chaque manière?

R. 240 milles à cheval, 840 par eau, 1960 à pied.

Qu'est-ce que les problèmes 13, 14 et 15 ont de commun?

16) Comment partager un nombre a en trois parties, telles, que la seconde soit m fois, et la troisième n fois aussi grande que la première?

R. $\frac{a}{1+m+n}$, $\frac{ma}{1+m+n}$, $\frac{na}{1+m+n}$.

17) Après avoir divisé par 3 le produit d'un nombre inconnu et du nombre 4, j'ai 24. Quel est ce nombre?

R. 18.

18) Un champ de 864 arpents doit être partagé entre trois paysans A, B, C, tellement que la part de A, soit à celle de B comme 5 est à 11, et que celle de C soit égale aux parts réunies des deux autres. Quelle sera la part de chacun?

R. A, 135 arpents, B, 297 arpents, C, 432 arpents.

19) Comment partager 1170 fr. entre 3 personnes *A*, *B*, *C*, d'après la proportion de leurs âges, *B* étant d'un tiers, *C*, du double plus âgé que *A*?

R. à *A* 270 fr., à *B* 360 fr., à *C* 540 fr.

20) Trois villes *A*, *B*, *C*, ont ensemble à fournir pour l'armée un contingent de 594 hommes dans la proportion de leur population respective. Or, celle de *A* est à celle de *B*, comme 3 est à 5, et la population de *B* est à celle de *C*, comme 8 est à 7. Quel est le contingent de chaque ville?

R. *A* 144 hommes. *B* 240 hommes. *C* 210 hommes.

21) La masse d'une faillite, montant à 21000 fr., doit se répartir entre 4 créanciers *A*, *B*, *C*, *D*, au prorata de leurs créances. La créance de *A* est à celle de *B* comme 2 est à 3; celle de *B* est à celle de *C*, comme 4 est à 5, et la créance de *C* est à celle de *D* comme 6 est à 7. Combien chaque créancier recevra t-il?

R. *A* 3200 fr., *B* 4800 fr., *C* 6000 fr., *D* 7000 fr.

22) Comment partager un nombre a, en 3 parties telles, que la première soit à la seconde comme m est à n, et que la seconde soit à la troisième comme p est à q?

R. $\frac{mpa}{mp+np+nq}$, $\frac{npa}{mp+np+nq}$, $\frac{nqa}{mp+np+nq}$.

23) Un homme dépense le tiers de son revenu pour sa table et son loyer, le huitième pour son habillement et son linge, le dixième pour différens objets, et il économise le reste, formant 318 fr. Quel est son revenu annuel?

R. 720 fr.

24) Un négociant a gagné 15 pour cent sur le capital employé dans une affaire qui monte avec ce bénéfice à 15571 fr. Quel était le capital employé?

R. 13540 fr.

25) On a prêté pour un an un capital à $4\frac{1}{2}$ pour cent d'intérêts, qui ajoutés à ce capital, le font monter à 13167 fr. Quel était le capital prêté?

R. 12600 fr.

26) Une terre, mieux cultivée cette année que la précédente, a rapporté 1890 fr. c'est-à-dire 8 pour cent de plus que l'an dernier. Quel a été le produit de l'année passée?

R. 1750 fr.

27) Un marchand, en vendant à 75 c. la livre d'une certaine marchandise, y fait un profit de $12\frac{1}{2}$ pour cent. Combien lui a coûté de premier achat le quintal de Prusse (de 110 livres) de cette marchandise?

R. $73\frac{1}{3}$ fr.

28) Quel est le capital qui, placé pour 5 ans, à 4 pour cent d'intérêts par an, s'élève, ces intérêts compris, à 8208 fr.?

R. 6840 fr.

29) Un joueur a perdu dans une première partie le sixième, et dans la seconde le dixième de son argent; mais, dans une troisième partie, il en a regagné le tiers: et il lui reste un gain de 3 fr. Combien avoit-il apporté d'argent?

R. 45 fr.

30) Quels sont les deux nombres, dont la somme est 96, et dont la différence est 16?

R. 40 et 56.

31) Deux négociants ont à partager un profit de 1200 fr. qu'ils ont fait dans une affaire; mais de telle manière que l'un ne recevra que la moitié de la part de l'autre, en recevant cependant, en outre, une gratification de 50 fr. pour les soins. Quelle sera la somme remise à chacun?

R. à l'un $433\frac{1}{3}$ fr., à l'autre $766\frac{2}{3}$ fr.

32) Comment partagera-t-on 1520 fr. entre 3 personnes *A*, *B*, *C*, de manière que *B* reçoive 100 fr. de plus que *A*, et *C* 270 fr. de plus que *B*?

R. On donnera 350 fr. à *A*, 450 fr. à *B*, 720 fr. à *C*.

33) Une veuve doit, d'après le testament de son mari, partager une somme de 75000 fr. avec 2 fils et 3 filles. La portion de chaque fils doit être le double de celle d'une fille, et la veuve doit recevoir autant que les cinq enfans ensemble, et 5000 fr. de plus. Quelle sera la part de la veuve, et celle de chaque enfant?

R. La veuve aura 40000 fr., chacun des fils 10000 fr., chacune les filles 5000 fr.

34) Une société de 90 personnes est composée d'hommes, de femmes et d'enfants. Il s'y trouve 4 hommes de plus qu'il n'y a de femmes, et 10 enfants de plus que d'hommes et de femmes ensemble. Quel est le nombre des uns et des autres?

R. 22 hommes, 18 femmes, 50 enfants.

35) Un bois de 8000 toises carrées doit être partagé entre trois fermes *A*, *B*, *C*, de manière que *B* reçoive 276 toises carrées de moins que *A*, et que *C* ait 1112 toises carrées de plus que *B*. Quelle sera la part de chacun?

R. *A* 2480 toises carrées, *B* 2204, *C* 3316.

36) Un père donne à ses cinq enfants 1000 fr. à partager entr'eux d'après la proportion de leurs âges, de manière que chaque frère reçoive 20 fr. de plus que celui qui, par son âge, vient immédiatement après lui. Combien faudra-t-il donner au plus jeune?

R. 160 fr.

37) Une certaine somme doit être partagée entre trois personnes *A*, *B*, *C*, de la manière suivante. *A* aura 3000 fr. de moins que la moitié, *B* 1000 fr. de moins que le tiers, *C* 800 fr. de plus que le quart de la somme. Quelle est la somme à partager? et quelle est la part de chacun?

R. La somme entière est de 38400 fr. *A* en reçoit 16200, *B* 11800, *C* 10400.

38) Un homme en mourant laisse à sa femme la moitié de sa fortune, à chacun de ses deux enfants,

le sixième, à un ancien domestique, le douzième et aux pauvres 600 fr. qui restent. Quelle était sa fortune?

R. 7200 fr.

39) Trois propriétaires *A*, *B*, *C*, ont à partager entre eux une prairie de 2850 toises carrées. La portion de *A* doit être à celle de *B* comme 6 est à 11, et *C* doit avoir 300 toises carrées de plus que *A* et *B* ensemble. Quelle sera la part de chacun?

R. *A* 450, *B* 825, *C* 1575 toises.

40) Un père laisse quatre fils *A*, *B*, *C*, *D*, et un bien de 2520 fr. à partager entr'eux, comme suit. *C* doit recevoir 360 fr.; *B* recevra autant que *C* et *D* ensemble; et *A* aura le double de la part de *B*, moins 1000 fr. Combien recevront *A*, *B*, *D*?

R. *A* 760; *B* 880; *D* 520 fr.

41) Cinq héritiers ont une somme de 5600 fr. à partager entr'eux; *B* doit recevoir le double de la part de *A*, et 200 fr. de plus; *C* aura trois fois la part de *A*, mais 400 fr. de moins; *D* recevra la moitié des parts de *B* et *C* ensemble et 150 fr. de plus; *E* aura le quart de ce que les quatre autres reçoivent et 475 fr. de plus. Quelle sera la part de chacun?

R. *A* 500, *B* 1200, C 1100, *D* 1300, *E* 1500 fr.

42) Cinq joueurs ont fait ensemble une perte de $40\frac{5}{8}$ fr. La perte de *B* est de 50 c. de plus que le triple de celle de *A*, la perte de *C* est de 2 fr. de moins que le double de celle de *B*; *D* a perdu 25 c.

de moins que A et B ensemble, et E a perdu $\frac{1}{8}$ fr. de moins que le double de B. Quelle est la perte de chacun?

R. A 2 fr., B $6\frac{1}{2}$ fr., C 11 fr., D $8\frac{1}{4}$ fr., E $12\frac{7}{8}$ fr.

43) On a vendu une partie d'une marchandise, pesant en tout 40 quintaux, et il en reste 8 de plus que ce qu'on a vendu. Combien de quintaux ont été vendus?

R. 16.

44) Je suis sorti de chez moi avec 42 fr., dont j'ai dépensé une partie. Ce qui me reste fait le triple de cette dépense: quelle est-elle?

R. $10\frac{1}{2}$ fr.

45) Deux personnes A et B jouent au billard. A avoit, en se mettant au jeu, 42 fr. et B 24. Après différentes parties perdues ou gagnées, A se trouve en possession de cinq fois autant d'argent qu'il en reste à B; combien A a-t-il gagné?

R. 13 fr.

46) La garnison d'une place consiste en 1250 hommes, partie infanterie, partie cavalerie. Chaque cavalier reçoit par semaine cinq fr., et chaque fantassin trois fr. de solde; et le total de cette solde pendant une semaine monte à 4150 fr. Combien de cavaliers et de fantassins y a-t-il?

R. 200 cavaliers et 1050 fantassins.

47) Un maître maçon, douze compagnons et quatre manoeuvres ont reçu pour un certain nombre de journées de travail 369 fr. Le maître reçoit 3 fr., cha-

que compagnon 2 fr. 50 c. et chaque manoeuvre 2 fr. par jour. Combien de jours ont ils dû travailler pour le salaire mentionné?

R. 9 jours.

48) Un capitaliste a placé les quatre cinquièmes de son capital à 4 pour cent l'an, et l'autre cinquième à 5 pour cent; le total de ces rentes monte à 2940 fr. Quel est le capital placé?

R. 70000 fr.

49) *A* donne un nombre à deviner à *B*. Je multiplie, lui dit-il, ce nombre par 7, et j'ajoute 3 au produit, après quoi je divise la somme par 2; je soustrais 4 du quotient, et il me reste 15. Quel est le nombre pensé?

R. 5.

50) Trouver trois nombres dont le second, étant divisé par le premier, donne pour quotient 2, et 1 de reste; et dont le troisième, divisé par le second, donne 3 pour quotient avec 3 de reste? La somme des trois nombres est 70.

R. 7, 15, 48.

51) On demande à un homme combien il a d'argent? Il répond: si vous multipliez le nombre de francs que j'ai, par 5; soustrayant alors 3 du produit; puis multipliant le reste par 4 et ajoutant 2 au produit; enfin négligeant le zéro à droite, vous aurez le nombre 23. Combien de francs avait-il?

R. 12.

52) Trouver un nombre d'après les données suivantes. Je multiplie ce nombre par 5 et soustrais 24 du produit; puis je divise ce qui reste par 6 et j'ajoute 13 au quotient. La somme qui en résulte est égale au nombre à trouver. Quel est-il?

R. 54.

53) Un messager est parti depuis 10 jours pour une commission; le onzième on fait partir après lui, du même lieu et sur la même route un second messager. Si le premier ne fait que 4 milles par jour, tandis que le second en fait 9; en combien de jours celui-ci aura-t-il atteint le premier?

R. En 8 jours.

54) Il est parti d'ici, il y a n jours, un courrier, qui fait par jour a milles. On en dépêche après lui un second, faisant par jour b milles. Combien de jours faudra-t-il au dernier pour atteindre l'autre?

R. $\frac{na}{b-a}$ jours.

55) Mais dans combien de jours le second messager aura-t-il atteint le premier, si le second est parti 12 jours après l'autre et que sa vitesse soit à celle du premier comme 8 est à 3?

R. Dans $7\frac{1}{5}$ jours.

56) Deux corps se meuvent en ligne droite, du même lieu, l'un après l'autre; le second part n secondes plus tard, et sa vitesse est à celle du premier

comme q est à p. Dans quel temps le second corps touchera-t-il le premier?

R. $\frac{pn}{q-p}$ secondes après le départ du second.

57) Un courrier part d'une ville; il fait 7 milles toutes les cinq heures. 8 heures après son départ, un second courrier le suit qui, pour pouvoir atteindre le premier, doit faire 5 milles toutes les 3 heures. Quand se joindront-ils?

R. 42 heures après le départ du second courrier.

58) Tout restant comme dans le problème précédent, à l'exception que le premier courrier est parti, non du même lieu, mais d'un point de 8 milles plus avancé de sa destination; dans combien d'heures le second courrier l'aura-t-il atteint?

R. 72 heures après le départ du second.

59) Cherchons à généraliser le problème ci-dessus. Supposons le lieu du départ du premier courrier, de a milles plus en avant que celui du second, et le nombre d'heures après lesquelles ce dernier est parti, $= b$. Admettons de plus que la vitesse du premier courrier est de c milles en d heures, et celle du second, de e milles en f heures. Dans combien d'heures après le départ du second courrier se rejoindront-ils?

R. Dans $\frac{(ad+bc)f}{de-cf}$ heures.

60) Mais dans combien d'heures se rencontreront-ils si le premier courrier, au lieu de partir d'un lieu avancé de a milles, est, au contraire, parti d'un point reculé de a?

R. Dans $\frac{(bc-ad)f}{de-cf}$

Comment peut-on passer du problème précédent à ce dernier?

61) Un régiment marche directement du lieu A à B, faisant $3\frac{1}{2}$ milles par jour. Un second régiment part 8 jours après, du lieu B pour se rendre à A, faisant $5\frac{1}{6}$ milles par jour: la distance entre A et B est de 80 milles. Après combien de jours de marche, depuis le départ du premier régiment, se rencontreront-ils?

R. Après 14 jours.

Quelles valeurs faudrait-il donner aux quantités a, b, c, d, e, f, du 59e problème, pour en appliquer la solution au cas particulier du problème ci-dessus, si l'on ne voulait pas le résoudre de nouveau?

62) Deux corps partis au même instant de deux points distants de d pieds, courent l'un contre l'autre en ligne droite: l'un fait c pieds en une seconde et l'autre C pieds. Quand se rencontreront-ils?

R. Après $\frac{d}{C+c}$ secondes.

63) Mais dans quel temps ces deux corps se joindront-ils, si celui qui fait C pieds par seconde suit l'autre?

R. Après $\frac{d}{C-c}$.

Ce dernier problème est-il toujours possible? que faut-il pour cela? que veut dire l'expression $\frac{d}{C-c}$, si $C=c$? et que signifie-t-elle si $C<c$?

64) Un corps ennemi est parti d'un endroit et fait par jour $4\frac{1}{2}$ milles. Le troisième jour on se met en marche du même lieu pour le poursuivre; et l'on veut l'atteindre le sixième jour. Combien faudra-t-il qu'on fasse de milles par jour?

R. 6 milles.

65) Deux corps se meuvent, l'un à la suite de l'autre, dans la même direction: le premier a une avance de d unités de longueur (par ex.: mètres) et de t unités de temps (par ex.: secondes); le premier parcourt dans chaque unité de temps c unités de longueur, et le dernier en parcourt C. Combien d'unités de temps faudra-t-il pour que le second corps ait rejoint le premier?

R. $\frac{d+ct}{C-c}$ unités de temps.

66) Combien d'unités de temps faudra-t-il, au contraire, si, au lieu de se suivre, ces deux corps se meuvent l'un contre l'autre; les autres données restant les mêmes?

R. $\frac{d-ct}{C+c}$ unités de temps.

Comment dériver cette expression de celle du problème qui précède?

67) Les deux aiguilles d'une montre sont l'une

sur l'autre à midi: combien de fois, et quand se retrouveront-elles dans la même position pendant les 12 heures suivantes?

R. Les aiguilles se rencontreront onze fois, savoir à 1 heure $5\frac{5}{11}$ minutes, à 2 heures $10\frac{10}{11}$ minutes, à 3 heures $16\frac{4}{11}$ minutes, et ainsi de suite à chaque heure suivante $5\frac{5}{11}$ minutes plus tard que dans la précédente.

68) Deux corps se meuvent l'un derrière l'autre dans la circonférence d'un cercle qui a p mètres de longueur. Au commencement ils sont distants l'un de l'autre d'un arc de d mètres: le premier parcourt c mètres, le second C mètres par seconde. Quels seront les divers moments, où ces deux corps se rencontreront la 1ère fois, la 2de fois etc., en supposant qu'ils ne se troublent point l'un l'autre?

R. Après $\frac{d}{C-c}$, $\frac{p+d}{C-c}$, $\frac{2p+d}{C-c}$, $\frac{3p+d}{C-c}$, etc. secondes.

69) Mais, quand se rencontreront-ils, si le premier part t secondes plus tôt que l'autre?

R. Après $\frac{d+ct}{C-c}$, $\frac{p+d+ct}{C-c}$, $\frac{2p+d+ct}{C-c}$, $\frac{3p+d+ct}{C-c}$, etc. secondes.

70) Et si, au contraire, le premier part t secondes plus tard que l'autre?

R. Après $\frac{d-ct}{C-c}$, $\frac{p+d-ct}{C-c}$, $\frac{2p+d-ct}{C-c}$, etc. secondes.

71) Mais si le premier corps, au lieu de précéder le second, se meut précisément dans la direction opposée, et part t secondes plus tôt?

R. Après $\frac{d-ct}{C+c}$, $\frac{p+d-ct}{C+c}$, $\frac{2p+d-ct}{C+c}$, etc. secondes.

72) Mais enfin si, dans cette même direction opposée, en courant l'un contre l'autre, le premier corps est parti t secondes plus tard que le second?

R. Après $\frac{d+ct}{C+c}$, $\frac{p+d+ct}{C+c}$, $\frac{2p+d+ct}{C+c}$, etc. secondes.

D'où vient le changement des signes dans les solutions de ces cinq problèmes si semblables; quoique d'ailleurs leurs expressions se ressemblent tant? Pourrait-on bien les déduire les uns des autres, en considérant les quantités négatives?

Que signifient dans les problèmes 68, 69 et 70 ces expressions, si C devient $=c$? comment les entendre si $C<c$?

. . . .

Qu'est-ce qu'un rapport composé? Le rapport de deux quantités peut-être composé de deux, trois et plusieurs rapports simples. Ces rapports composés sont de la plus grande utilité dans l'analyse et dans ses applications.

. . . .

73) L'eau sort d'un réservoir par deux orifices avec des vitesses différentes. Les grandeurs des orifices sont comme 5 est à 13, et les vitesses de l'écoulement, comme 8 est à 7. On sait de plus que la dépense par la première ouverture, surpasse, dans un certain temps, celle de l'autre, de 561 mètres cubes d'eau. Combien d'eau ces deux orifices donnent-ils chacun pendant ce même temps?

R. L'un 440, l'autre 1001 mètres cubes.

74) Un chien poursuit un lièvre; celui-ci a déjà fait cinquante sauts avant que le chien ait commencé à courir; et c'est là leur première distance. On suppose que, dans le même temps où le chien fait 5 sauts, le lièvre en fait 6, et que la grandeur de 7 sauts du chien est égale à celle de 9 du lièvre. Quel nombre de sauts le lièvre aura-t-il faits avant d'être atteint par le chien?

R. 700.

75) Deux bombardiers lancent des bombes d'une batterie. Le premier a déjà tiré 36 coups avant que le second ait commencé, et tire 8 coups dans le même temps où le dernier en tire 7. De plus, le second a besoin pour 3 coups d'autant de poudre que le premier pour 4. Combien de coups le second bombardier tirera-t-il jusqu'à ce qu'il ait consommé autant de poudre que le premier?

R. 189.

76) Comment se fait-il, dit un promeneur à un autre, que tu m'aies devancé de 300 mètres, quoique mes pas soient du double plus longs que les tiens? Cela est vrai, répond l'autre, mais je fais, dans le même temps, cinq fois autant de pas que toi. Combien de mètres chacun a-t-il parcourus?

R. Le premier 200; le second 500 mètres.

77) Pour généraliser le problème précédent, supposons que le nombre de mètres dont le second promeneur a devancé le premier est $= a$; le rapport de la grandeur de leurs pas $= b : c$, et le rapport des

nombres de leurs pas $= d : e$. Comment exprimera-t-on les distances qu'ils auront parcourues?

R. $\frac{abd}{ce-bd}$, $\frac{ace}{ce-bd}$.

78) Deux quantités dont la différence est $= d$, sont par une cause quelconque l'une à l'autre, comme $m : n$; mais, par une autre cause, qu'on suppose n'avoir sur la première aucune influence, ces quantités se trouvent sous un autre rapport de $m' : n'$. Comment exprimer ces deux quantités?

R. $\frac{mm'd}{nn'-mm'}$, $\frac{nn'd}{nn'-mm'}$, ou $\frac{mm'}{nn'-mm'} \cdot d$, $\frac{nn'}{nn'-mm'} \cdot d$, sont les expressions de ces quantités. L'unité est, pour chaque cas, celle de d.

Quelles valeurs doit-on donner à m, m', n, n', d, si les problèmes 73, 74, 75, 76, 77, doivent répondre à ces expressions?

79) Deux quantités dont la différence est $= d$, sont, par trois causes qui n'influent point l'une sur l'autre, dans les rapports de $m : n$, $m' : n'$, $m'' : n''$. Comment exprimer ces deux quantités?

R. $\frac{mm'm''}{nn'n''-mm'm''} \cdot d$, $\frac{nn'n''}{nn'n''-mm'm''} \cdot d$, sont les expressions cherchées: l'unité est celle de d.

80) Mais si, au lieu de la différence d, la somme s de ces quantités est donnée, quelles en seront alors les expressions?

R. $\dfrac{mm'm''}{nn'n''+mm'm''}\cdot s,\quad \dfrac{nn'n''}{nn'n''+mm'm''}\cdot s.$

81) Quelqu'un a une somme de 5500 fr. placée à 4 pour cent l'an, et $4\frac{1}{2}$ ans après, il place un autre capital de 8000 fr. à 5 pour cent. Dans combien d'années, chacun de ces capitaux aura-t-il produit la même somme d'intérêts que l'autre?

R. Dans dix ans; à compter de l'époque où le premier capital a été placé.

82) Une voiture est construite de telle manière qu'on peut déterminer en voyageant la différence des nombres de révolutions des roues. On sait de plus que chaque roue de devant a $1\frac{3}{4}$ mètres de circonférence, et chacune de celles de derrière $2\frac{3}{8}$ mètres. Supposé qu'une roue de devant ait fait 2000 tours de plus que celle de derrière, quel sera le chemin parcouru?

R. 13300 mètres.

83) Si la roue de devant, dans le problème précédent, avait a mètres, et celle de derrière b mètres de circonférence, et que la petite roue eût fait n tours de plus que la grande; quel serait l'espace parcouru?

R. $\dfrac{abn}{b-a}$ mètres.

84) Un marchand de vin en a de deux sortes: la bouteille de l'un se vend 36 décimes, et celle de l'autre, 20 décimes; or, il veut mêler ces vins de manière à en faire 50 bouteilles, qu'il puisse donner à

30 décimes chacune. Quelle quantité de chaque sorte de vin ce mélange exigera-t-il?

R. $31\frac{1}{4}$ bouteilles du plus cher, $18\frac{3}{4}$ de l'autre.

85) Supposons, dans le problème précédent, le prix du meilleur vin $= a$, le prix de l'inférieur $= b$, le nombre des bouteilles à mélanger $= n$, et le prix de ce mélange $= c$: combien faudra-t-il de bouteilles de chaque sorte?

R. $\frac{(a-c)n}{a-b}$ bouteilles de la sorte inférieure, et $\frac{(c-b)n}{a-b}$ de la plus chère.

86) Un orfèvre a deux espèces d'argent, l'un à 0,875 de fin, et l'autre à 0,5. Il veut faire un plat, pesant 5 kilogrammes, et au titre de 0,75. Combien de kilogr. de chacune des deux espèces d'argent faudra-t-il employer dans le mélange à faire?

R. $3\frac{1}{3}$ kilogr. d'argent à 0,875 de fin.
$1\frac{2}{3}$ kilogr. d'argent à 0,5 de fin.

87) Un marchand de vin en a 40 bouteilles qu'il devrait vendre à 1 liv. 12 s. chacune; mais ce prix étant trop haut, il veut y mêler la quantité d'eau nécessaire pour pouvoir le laisser à 1 livre. Combien de bouteilles d'eau faudra-t-il qu'il ajoute?

R. 24.

88) On a 35 kilogr. d'argent à 0,9375 de fin, et l'on veut y joindre assez d'alliage en cuivre pour le

réduire au titre de 0,75. Combien faudra-t-il de cuivre?

R. $8\frac{3}{4}$ kilogr.

89) On a $7\frac{1}{2}$ kilogr. d'argent à 0,8125 de fin, qu'on veut réduire au titre de 0,5625, en l'alliant avec d'autre argent, qui est au titre de 0,5. Combien faudra-t-il de ce dernier?

R. 30 kilogr.

90) Quelqu'un demande qu'on lui donne 3 écus 18 gros en 17 pièces de 4 et de 6 gros. (L'écu se divise en 24 gros.) Combien faudra-t-il de pièces de chaque espèce?

R. 6 pièces de 4 gros, 11 de 6 gros.

Qu'est-ce que ce problème a de commun avec le 84[e] et le 86[e], et comment l'accord de ces problèmes peut-il s'énoncer?

91) Trouver deux nombres dont la somme est égale à a, tels, qu'en multipliant le premier par m et le second par n, la somme des produits soit égale à b?

R. $\frac{b-na}{m-n}$, $\frac{ma-b}{m-n}$.

Que signifieront ces expressions si $m = n$; et si en même temps $b = na = ma$?

92) Un homme a 40 ans, et son fils en a 9. Dans combien d'années cet homme qui est aujourd'hui plus de 4 fois plus âgé que son fils, n'aura-t-il que le double de son âge?

R. Dans 22 ans.

93) Un homme aujourd'hui âgé de 30 ans, a un frère de 20. Donc le rapport de leur âge est de 3 : 2. Dans combien d'années ce rapport sera-t-il de 5 : 4?

R. Dans 20 ans.

94) Combien d'années y a-t-il que ce frère aîné avait six fois l'âge de son frère?

R. Il y a 18 ans.

95) Mais outre ces deux frères de 30 et de 20 ans, il y en a un troisième qui n'a que six ans. Dans combien d'années l'âge des deux plus jeunes réuni sera-t-il égal à celui de l'aîné?

R. Dans quatre ans.

96) Le père de ces trois frères a aujourd'hui 49 ans, et ses enfans comptent ensemble 7 ans de plus que lui: mais il y a eu une époque où leurs âges réunis étaient égaux au sien. Combien y a-t-il d'années?

R. $3\frac{1}{2}$ ans.

97) Un jour le même père dit à l'aîné (le 3me fils n'étant pas encore né), je suis d'un quart plus âgé que vous ne l'êtes ensemble, ton frère et toi. Combien y a-t-il d'années?

R. 9 ans.

98) On a mêlé 80 kilogr. pesant de salpêtre et de soufre, dans la proportion de 7 à 3. Combien de salpêtre devra-t-on y ajouter si l'on veut que la proportion soit de 11 à 4?

R. 10 kilogr.

99) Combien au contraire faudrait-il retirer de soufre pour produire la même proportion de 11 à 4?

R. $3\frac{7}{11}$ kilogr.

100) Mais si, pour que le poids de la masse reste le même, on doit ajouter autant de salpêtre qu'on a retiré de soufre, combien de salpêtre aura-t-on à rapporter, pour remplacer le soufre soustrait?

R. $2\frac{2}{3}$ kilogr.

101) Une société nombreuse était composée d'abord de trois fois autant d'hommes que de femmes; mais 8 maris ayant emmené leurs femmes, le nombre des hommes s'est trouvé alors cinq fois plus grand que celui des femmes. En combien de personnes de chaque sexe la société avait-elle d'abord consisté?

R. En 48 hommes et 16 femmes.

102) Quel nombre doit-on ajouter aux deux nombres donnés a et b pour que les sommes aient le rapport de $m:n$? Ou, ce qui est la même chose, à quel nombre faut-il ajouter a et b, pour que les sommes résultantes aient le rapport de $m:n$?

R. $\frac{mb-na}{n-m}$ est le nombre cherché.

103) Combien faut-il ajouter à a, et soustraire de b, pour que la somme soit à la différence comme m est à n?

R. $\frac{mb-na}{m+n}$.

104) Quel nombre aura-t-on à soustraire de a et de b si les restes doivent être dans le rapport de $m : n$?

R. $\frac{na-mb}{n-m}$.

De ces trois derniers problèmes, les problèmes 92, 93, 94, 98, 99, 100, sont des cas particuliers: quelles valeurs devra-t-on donner aux quantités a, b, m, n, pour appliquer les expressions générales à ces cas?

105) On a mis trois robinets à un tonneau plein de vin; il peut être vidé en 2 heures par un de ces robinets, en 3 heures par le second et en 4 heures par le troisième. En combien de temps sera-t-il vide si l'on ouvre les trois robinets à la fois?

R. En 55 $\frac{5}{13}$ minutes.

106) Un bassin peut être rempli d'eau par 3 tuyaux; par le premier en $1\frac{1}{3}$, par le second en $3\frac{1}{3}$, par le troisième en 5 heures. Si l'on ouvre les 3 tuyaux à la fois, combien de temps faudra-t-il pour remplir le bassin?

R. 48 minutes.

107) Pour généraliser ce problème, soit le temps nécessaire pour remplir ce bassin par le premier tuyau $= a$, celui pour le second $= b$, et celui pour le troisième $= c$; quel est le temps nécessaire pour remplir le bassin par les 3 tuyaux à la fois?

R. $\frac{abc}{ab+ac+bc}$.

108) Comment exprimera-t-on le temps dans lequel quatre tuyaux à la fois rempliront un bassin, si le temps, pour chacun d'eux à part, est a, b, c, d?

R. $\dfrac{abcd}{abc+abd+acd+bcd}$.

109) Trois maçons ont un mur à construire. L'un élève 8 mètres cubes en 5 jours; le second 9 en 4 jours; le troisième fait 10 mètres en 6 jours. En combien de temps, travaillant ensemble, ces trois hommes construiront-ils 756 mètres cubes de ce mur?

R. En 137 $\frac{13}{331}$, jours.

110) Un ouvrier peut livrer un certain travail, exprimé par a, dans un temps exprimé par b; un second ouvrier, le travail c dans un temps d; et un troisième, le travail e dans un temps f. Dans combien de temps le travail g sera-t-il terminé par les trois ouvriers en commun?

R. Dans le temps $\dfrac{bdfg}{adf+bcf+bde}$. L'unité de temps dans cette expression est celle des quantités b, d, f.

111) L'on a à remplir d'eau un bassin de 755$\frac{1}{4}$ mètres cubes par trois tuyaux. Le premier fournit 12 mètres cubes en 3$\frac{1}{4}$ jours, le second 15$\frac{1}{3}$ mètres cubes en 2$\frac{1}{2}$ jours, et le troisième 17 mètres cubes en 3 jours. En combien de temps ces trois tuyaux, ouverts à la fois, rempliront-ils le bassin?

R. En 48$\frac{3}{4}$ jours.

112) Trois causes produisent dans les temps t, t', t'', les effets e, e', e''. Quel temps emploieront-elles sans avoir d'influence l'une sur l'autre, pour produire, en agissant toutes ensemble, l'effet E?

R. $\dfrac{Ett't''}{et't''+e'tt''+e''tt'}$. L'unité de temps est celle des temps donnés t, t', t''.

Dans ce dernier problème sont compris les problèmes 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111. Comment?

113) On a trois morceaux de métal de pareille grosseur; cinq pouces cubes du premier pèsent $69\frac{3}{4}$ onces; $3\frac{1}{3}$ pouces cubes du second pèsent 41 onces et $4\frac{2}{7}$ pouces cubes du troisième pèsent 91 onces. Si ces trois morceaux pèsent ensemble $949\frac{2}{3}$ onces, quelle est la grosseur de chaque morceau?

R. 20 pouces cubes.

114) Quelqu'un voulait faire, dans une société nombreuse, la collecte d'une certaine somme pour un pauvre: chacun des assistants offrant 2 fr., il se trouve que la collecte rapporterait 30 fr. de plus que le quêteur ne désire, et il propose que chacun ne donne que 1 fr. 25 c.: mais alors la somme serait trop petite de 37 fr. 50 c. De combien de personnes se compose la société? De quelle somme le pauvre a-t-il besoin? et quelle devrait être la contribution de chacun?

R. La société était composée de 90 personnes. La somme à recueillir était de 150 fr. et la contribution de chacun de $1\frac{2}{3}$ fr.

115) Un marchand est forcé, dans un besoin d'argent, de vendre une certaine marchandise au prix coûtant; mais, faute d'ordre, il n'a plus de note ni du poids, ni du prix d'achat. Seulement il se rappelle qu'en la vendant à 3 fr. 75 c. le Kilogramme, il y aurait gagné 15 fr.; et qu'en ne la plaçant qu'à 2 fr. 75 c. le kilogramme il aurait perdu 45 fr. Quel était le poids de la marchandise et le prix d'achat?

R. Le poids, 60 kilogr., et le prix, 3 fr. 50 c.

116) Quelqu'un veut mettre en loterie une montre d'or et fait une certaine quantité de billets. S'il les place à 3 fr. 75 c., il perdra 60 fr. sur le prix de sa montre; mais s'il reçoit 5 fr. par billet, il gagnera 40 fr. A quel prix avait-il payé sa montre et combien de billets a-t-il faits?

R. 360 fr. 80 billets.

117) Un architecte a engagé, pour construire un bâtiment, un nombre de maçons. Après avoir fait son compte, il trouve que s'il donne à chaque maçon m francs par jour, il aura besoin de a fr. de moins par jour qu'on n'en avait destiné dans le devis; mais qu'il lui manquera sur la somme du devis b fr. par jour, s'il veut donner n fr. par jour à chaque ouvrier. Combien de maçons a-t-il engagés? et quel était le total des salaires journaliers fixés par le devis?

R. Le nombre des ouvriers-maçons étoit $\frac{a+b}{n-m}$, et le total des salaires journaliers $\frac{an+bm}{n-m}$ francs.

118) Un certain nombre étant multiplié par m, puis par m', donne deux produits qui surpassent un autre certain nombre de a et a'. Quel est le premier nombre, et quel est le second?

R. Le premier $\frac{a-a'}{m-m'}$, l'autre $\frac{m'a-ma'}{m-m'}$,

Quelle valeur faut-il donner à m, m', a, a', pour appliquer ces expressions aux problèmes 114, 115, 116, et 117?

119) Quel est le nombre qui, étant multiplié par 5, donnera un produit qui soit autant au-dessus de 20, que le nombre même est au-dessous de 20?

R. $6\frac{2}{3}$.

120) Pour fournir à tous mes besoins, dit un homme, il me faudrait 5400 fr. de rente; mais j'en ai beaucoup moins. Si mes rentes étaient $3\frac{1}{2}$ fois ce qu'elles sont, j'aurais, au-delà de mes besoins, un excédant égal à ce qui me manque aujourd'hui. Quelles sont les rentes annuelles de cet homme?

R. 2400 fr.

121) L'on demande à un copiste combien de pages il écrit par semaine? Il répond; „Je ne travaille que quatre heures par jour, et je ne puis, comme je le voudrais, livrer 70 pages par semaine. Mais si je pouvais copier 10 heures par jour, je fournirais par semaine précisément autant de pages de plus de 70, que j'en écris de moins à présent." Combien de pages copie-t-il par semaine?

R. 40.

122) On demande à un arpenteur, à quelle distance se trouvent l'un de l'autre deux piquets qu'il vient de placer? Il répond: „La distance est loin d'être de 1000 mètres, car si j'ajoute à cette distance son tiers et 176, et que je multiplie ensuite le tout par $2\frac{1}{2}$, je trouve alors autant de mètres au-dessus de 1000, qu'il y en a de moins dans la distance actuelle." Quelle est la distance entre les deux piquets?

R. 360 mètres.

123) Quelqu'un veut acheter une maison, et pour en fournir le prix, il veut retirer de chacun de ses débiteurs une somme égale. S'il prend de chacun d'eux 250 écus, il lui manquera 2000 écus: mais s'il leur demande 340 écus à chacun, il aura 880 écus de trop. Combien a-t-il de débiteurs? quel est le capital à réunir pour payer la maison? Et combien faut-il que chaque débiteur lui paie?

R. Il a 32 débiteurs: la maison coûte 10000 écus, et chaque débiteur aura $312\frac{1}{2}$ écus à payer.

124) Un négociant doit faire à trois termes différens les paiemens suivants. 2832 fr. dans 3 mois. 2560 fr. dans 9 mois. 1450 fr. dans 16 mois. Le créancier désire de recevoir tout à la fois les 6842 fr. en compensant les sommes et leurs échéances. Quelle sera pour cela l'échéance commune?

R. 8 mois.

125) Un homme doit payer une certaine somme à 4 termes différents, savoir: une somme a après l mois; une somme b après m, une somme c après n,

une somme d après p mois. S'il veut acquitter sa dette entière $= a+b+c+d$ tout à la fois, échéances et sommes compensées, quand devra-t-il le faire?

R. Après $\frac{al+bm+cn+dp}{a+b+c+d}$ mois.

126) Un capitaliste s'engage à prêter pour 15 mois 16000 fr. à un négociant. Mais n'ayant pas la somme entière à sa disposition, on convient que le prêteur fournira 5000 fr. comptant, puis 3000 fr. dans 6 mois et 8000, dans 14 mois. Combien de temps, à dater de ce dernier paiement, le débiteur gardera-t-il la somme, pour que la condition de jouir du total pendant 15 mois soit remplie?

R. $9\frac{1}{8}$ mois.

127) Un propriétaire s'est engagé par contrat à laisser, pendant 16 mois, paître, dans ses prés, 400 boeufs de son voisin. Mais, d'après un second accord, celui-ci en envoie d'abord 200; puis 7 mois après, 250; et enfin au bout de 8 mois, 150. Combien de temps de plus le propriétaire gardera-t-il ces 600 boeufs, pour remplir exactement son premier marché?

R. $2\frac{1}{3}$ mois.

128) Un marchand achète une certaine marchandise pour 45000 fr., payables au bout d'un an. Mais il convient avec le vendeur de lui donner 15000 fr. comptant, et les autres 30000, en quatre termes égaux de 7500 fr. chacun. Quels termes faudra-t-il fixer

pour chacun de ces quatre paiemens, si l'on veut satisfaire exactement à la première convention?

R. 4 termes de $7\frac{1}{5}$ mois chacun, à partir du jour du marché.

129) On doit payer une certaine somme, savoir: 13760 fr. dans 5 mois; trois mois plus tard 25600 fr., et le reste 5 mois après ce dernier terme. Si l'on voulait que la somme totale se payât à la fois, en compensant les termes convenus, cela devrait se faire dans 10 mois. Combien y a-t-il à payer en tout?

R. 79360 francs.

130) Un marchand doit payer 70000 fr., dont 20000 fr. dans $3\frac{1}{2}$ mois; 35000, dans 4, et 15000 fr. dans 14 mois. Mais son créancier lui propose d'acquitter la somme en deux parties égales, la seconde moitié un mois plus tard que la première. Quel terme devra-t-on fixer pour le premier paiement, en compensant les termes convenus d'abord?

R. $3\frac{2}{3}$ mois.

131) Il se présente deux acheteurs pour un jardin. Le premier offre 7705 fr., dont 3365 comptant et 4340 dans 8 ans, ou cette dernière somme au choix du vendeur, comptant aussi, avec 5 pour cent de rabais. Le second offre une autre somme qui doit être payée, à dater de l'achat, en trois parties égales, de deux ans en deux ans, c'est-à-dire le premier tiers dans 2, le second dans 4, et le troisième dans 6 ans; ou, si le vendeur le préfère, toute la somme

comptant, avec une déduction de 5 pour cent. Le vendeur trouve la valeur des deux propositions parfaitement égale. Quelle est la somme offerte par le second acquéreur?

R. 7722 fr.

132) Trois marchands *A, B, C,* se réunissent pour une spéculation. *A* met 12000 fr., *B* 8000, et *C* 6000. *A* laisse son argent 8 mois; *B* le sien 10 mois et *C* 14 mois. Ils gagnent 5000 fr.: quelle sera la part de chacun?

R. *A* $1846\frac{2}{13}$, *B* $1538\frac{6}{13}$, *C* $1615\frac{5}{13}$ francs.

133) Soit, dans le problème précédent, le capital de *A*, $= a$, celui de *B*, $= b$, celui de *C*, $= c$: *A* laisse ses fonds l mois dans l'affaire; *B*, m mois, et *C*, n mois. Quelle part chacun aura-t-il du bénéfice, qu'on suppose $= g$?

R. La part de *A* est $= \frac{alg}{al+bm+cn}$, celle de *B* $= \frac{bmg}{al+bm+cn}$, et celle de *C* $= \frac{cng}{al+bm+cn}$.

134) Trois négociants font en commun une entreprise. L'un y verse 17000 fr.; le second 13000; le troisième 10000. Mais comme il leur faut un gérant, l'associé qui a fourni la moindre somme, s'offre à l'être, sous la condition que, dans le partage du bénéfice, il lui sera alloué 3 pour cent de plus qu'aux autres. Le résultat de l'affaire est un gain de $35262\frac{1}{2}$ fr. Quelle sera la part de chacun?

R. Celle du premier 14875; celle du second 11375; et celle du troisième $9012\frac{1}{2}$ fr.

135) Trois créanciers ont à réclamer d'une succession liquidée à 3139 fr., l'un 2000, le second 2500, et le troisième 3500 fr. Le tribunal qui doit répartir entr'eux ces 3139 fr., au prorata de leurs créances, et en prenant cependant en considération le plus ou moins de force de leurs droits, adjuge au second créancier 10 pour cent et au troisième 25 pour cent de plus que la part qui appartient à la somme de leur créance. Combien chacun d'eux recevra-t-il?

R. Le premier 688, le second 946 et le troisième 1505 fr.

136) Soit la succession, dans le problème précédent, $= a$, et les réclamations des trois créanciers f, g, h; le second créancier doit recevoir m pour cent de plus, et le troisième n pour cent de plus que le premier: combien chacun aura-t-il?

R. Le premier $\dfrac{100\,af}{100\,(f+g+h)+gm+hn}$,

Le second $\dfrac{(100+m)\,ag}{100\,(f+g+h)+gm+hn}$,

Le troisième $\dfrac{(100+n)\,ah}{100\,(f+g+h)+gm+hn}$ fr.

Comment ces formules se changent-elles si le second créancier, au lieu d'avoir m pour cent de plus, recevait m pour cent de moins?

137) Trois personnes A, B, C, mettent ensemble pour une affaire de commerce, une certaine somme.

B donne la moitié de plus que *A*, et *C* fournit 300 fr. de plus que *A* et *B* ensemble. Au bout de quelque temps le profit, montant à 5020 fr., se partage; et *C* reçoit pour sa part 2570 fr. Quelle a été la mise de chacun?

R. *A* a mis 2450, *B* 3675, et *C* 6425 fr.

138) Trois négociants font une affaire en commun; *C* fournit 5600 fr. et *A* donne 320 fr. de moins que *B*. *A* laisse son argent dans l'affaire 7 mois, *B* 14 mois, et *C* 12 mois. Le bénéfice est de $2402\frac{1}{6}$ fr., et en le répartissant à proportion des mises et du temps qu'elles sont restées, *B* reçoit pour sa part $879\frac{2}{3}$ fr. Combien *A* et *B* ont-ils mis?

R. *A* 3450, *B* 3770 fr.

139) Un homme laisse en mourant quatre fils et une somme de 11000 fr. Dix mois après le testament est ouvert, et dans cet espace de temps les enfants ont consommé leur part d'héritage en capital et intérêts. Trois autres enfants avaient, sous les mêmes données, consommé en 15 mois, au même taux d'intérêts, un capital de 12000 fr. A quel taux étaient fixés les intérêts de ces deux capitaux? et combien de temps six enfants mettraient-ils en faisant les mêmes dépenses que ceux ci-dessus à consommer une somme de 16500 fr.?

R. Les intérêts étaient de $\frac{2}{3}$ pour cent par mois, et 6 enfants emploieraient 10 mois à consommer les 16500 fr.

140) Cinq frères ont dissipé, dans un intervalle

de 9 mois, un capital de 48000 fr., avec les intérêts pour toute cette époque: deux autres personnes, en faisant les mêmes dépenses qu'eux, ont consommé en 16 mois 33200 fr. avec les intérêts. Le taux des intérêts était le même dans les deux cas. Combien chacun d'eux a-t-il dépensé par mois?

R. $1106\frac{2}{3}$ fr.

141) Un domestique reçoit de son maître 120 fr. de gages par an et une livrée. Après avoir servi 5 mois, il demande son congé, et on lui laisse la livrée, en lui payant 18 fr. 50 c. A quel prix la livrée est-elle évaluée ?

R, à 54 fr.

142) Deux journaliers travaillent chez un fermier, à salaire égal. Il a donné à l'un d'eux pour 56 jours de travail 40 litres de seigle, et 14 fr. en argent, et à l'autre, pour 84 jours, 75 litres de seigle et 17 fr. 25 c. A quel prix a-t-on calculé le litre de seigle?

R, à 25 centimes.

143) Un domestique a reçu une fois de son maître 7 louis et 48 fr. 30 c. pour 7 mois de service. Une autre fois il a reçu (les gages comptés au même taux) 5 louis et 158 fr. 50 c. pour 9 mois. A quel prix lui a-t-on compté le louis?

R. à 24 fr. 10 c.

144) Un artisan engage un ouvrier à qui il promet la table et 1 fr. 10 c. de salaire pour chaque jour qu'il viendra travailler; mais si l'ouvrier va travailler ailleurs

il paiera au maître 60 c. par jour pour sa table. Au bout de 50 jours, il revient à l'ouvrier 31 fr. 20 c. Combien de jours a-t-il travaillé chez le maître?

R. 36 jours.

145) Un paysan a porté une certaine quantité d'oeufs au marché; il les offre à 7 centimes la pièce. Mais un passant en a cassé par mégarde cinq qu'il a payés, et le paysan, voulant garder pour lui ce petit profit, demande 8 c. pour les oeufs qui lui restent, ce qui rendra sa recette égale à celle qu'il eût faite du total au prix de 7 c. Combien avait-il apporté d'oeufs?

R. 40.

146) On demande à un cuisinier le nombre de citrons qu'il porte. Il est habile calculateur, et s'amuse à faire une réponse énigmatique. La douzaine, dit-il, me coûte 18 décimes, mais si, comme je le demandais, on m'avait donné 5 citrons par-dessus le marché, la douzaine me serait revenue à $2\frac{1}{2}$ décimes de moins. Combien portait-il de citrons?

R. 31.

147) Un marchand a fait venir une pièce de drap à $12\frac{1}{2}$ francs le mètre. En la mesurant il y trouve 5 mètres de plus qu'on ne lui a porté en compte; mais, d'un autre côté, la qualité en est si mauvaise qu'il ne peut le vendre que 10 fr. le mètre; il en résulte pour lui une perte de $13\frac{1}{3}$ pour cent. Combien de mètres y a-t-il dans la pièce?

R. Il y en a réellement 65, au lieu de 60 qu'il a payées.

148) Quelqu'un dit: j'emploie la septième partie de mes appointements à aller aux spectacles, et le reste à mes besoins ordinaires. Mais si j'obtenais un supplément de 400 fr., je pourrais consacrer à la comédie un cinquième de mon revenu, et il me resterait en outre 160 fr. de plus à appliquer à mes autres dépenses. Quels sont ses appointements?

R. 2800 fr.

149) Un savant qui jusqu'à présent consacrait chaque année le quart de ses appointements à l'achat de livres, vient d'obtenir une augmentation qui, en lui laissant la même somme qu'il employait ci-devant pour ses autres dépenses, lui permet de destiner à des achats de livres le tiers de son revenu. Quelle était l'augmentation de ses appointements?

R. On les a augmentés d'un huitième.

150) Un propriétaire de maison payait, pour contributions, le septième du loyer qu'il en tirait: mais ces contributions ont été augmentées, et montent à présent au sixième. Quelle augmentation de loyer doit-il imposer à ses locataires pour qu'il lui reste net le même revenu qu'auparavant?

R. Un 35^{me} de leur loyer précédent.

151) J'avais une certaine somme d'argent; j'en ai ôté le tiers et j'ai mis 50 fr. à la place; quelque temps après j'ai pris le quart de la somme actuelle et mis à la place 70 fr. Alors j'ai compté cet argent, et j'ai trouvé 120 fr. Quelle était la première somme?

R. 25 fr.

152) On a ôté d'une somme d'argent d'abord la moitié et 50 fr. On a ensuite retranché du reste la cinquième partie et 30 fr., puis, de ce dernier reste, le quart et 20 fr. Il reste 10 fr. Quelle était la somme primitive?

R. 275 fr.

153) Quelqu'un lègue par testament à ses domestiques une certaine somme qui doit être partagée comme suit. Le valet de chambre aura 2000 fr. et la moitié du reste; le cuisinier recevra le cinquième de la somme restante et 4000 fr. de plus; enfin le cocher prendra ce dernier reste montant à 5200 fr. Quelle était la somme du legs?

R. 25000 fr.

154) Un paysan a porté à la ville des oeufs dont il vend d'abord la moitié et 4 de plus; puis encore la moitié du restant et 2 de plus. On lui vole alors la moitié de ceux qu'il a encore et 6 de plus. Il lui reste 2 oeufs. Combien d'oeufs avait-il apportés?

R. 80.

155) Un négociant augmente tous les ans son capital d'un tiers; mais il prélève chaque année 10000 fr. pour ses dépenses. Au bout de trois ans, après avoir fait ce même prélèvement, il se trouve posséder le double de son capital primitif. Quel était ce capital?

R. 111000 fr.

156) Un négociant augmente chaque année son capital de 20 pour cent, mais il prélève annuellement

10000 fr. pour son entretien. Au bout de trois ans son premier capital se trouve accrû des trois cinquièmes et de 2000 fr. de plus. Quel était le capital primitif?

R. 300000 fr.

157) Un père apporte à ses enfans des pommes qu'il distribue de la manière suivante: A l'aîné il donne la moitié de ces pommes moins 8; au second la moitié du reste moins 8; il continue de la même manière avec le troisième et le quatrième; il reste 20 pommes qu'il donne au cinquième. Combien de pommes avait-il apportées?

R. 80.

158) Je suppose un certain nombre. Après l'avoir multiplié par $3\frac{3}{7}$ je retranche 60 du produit; je multiplie ce qui reste par $2\frac{1}{2}$ et après en avoir déduit 30, il ne me reste rien. Quel nombre ai-je supposé?

R. 21.

159) Un prodigue a placé son capital à 4 pour cent l'an: au bout de deux ans il en retire le quart, et laisse encore 7 mois le reste, dont il prélève alors de nouveau le quart; et après cette déduction, il laisse le restant encore 13 mois et retire alors le tout. Dans cet espace de 44 mois il a touché pour les intérêts une somme de $6093\frac{3}{4}$ fr. Quel était le capital placé?

R. 50000 fr.

160) Un père partage sa fortune entre ses enfants de la manière suivante. Le 1^er^ doit recevoir 100 fr. et le dixième du reste; en suite le 2^d^ aura 200 fr. et

le dixième du reste: le 3^{me} aura 300 fr. et le dixième du reste et ainsi de suite chaque enfant recevant 100 fr. de plus que celui qui le précède et en outre le dixième de ce qui reste. Il se trouve à la fin que chaque enfant a reçu une somme égale. Quelle était la somme à partager et le nombre d'enfants?

R. 8100 fr., et 9 enfants.

161) Mais quel devrait être cet héritage et le nombre d'enfants si le premier avait reçu 30 fr. et le neuvième du reste; le second 60 fr. et le neuvième du reste, et ainsi de suite, chaque enfant 30 fr. de plus que celui qui le précède immédiatement et le 9^e du reste, et que chacun ait reçu la même somme?

R. 1920 fr. et 8 enfants.

162) Quel serait généralement l'héritage et le nombre d'enfants, si le premier recevait a fr. et la n^{me} partie du reste, et chaque enfant ensuite a fr. de plus et la n^{me} partie du reste, et que la part de chaque enfant se trouvât la même?

R. L'héritage est $= (n-1)^2 a$; le nombre des enfants $= n-1$.

163) Un général veut former son régiment sur autant de rangs qu'il y a d'hommes dans chaque rang; il l'essaie de deux manières: la première lui laisse 39 hommes de reste; la seconde fois, après avoir augmenté chaque rang d'un homme, il lui en manque 50 pour compléter la forme carrée. Quel est le nombre des soldats du régiment?

R. 1975 hommes.

164) Un homme veut ranger en forme carrée une somme de francs. Au premier essai il lui reste 130 fr.; mais après avoir ajouté 3 fr. à chaque rangée, de manière à conserver toujours le carré, il ne lui en reste que 31. Combien a-t-il de francs.

R. 355 fr.

165) Trouver un nombre tel qu'après y avoir ajouté les deux nombres a et b, la différence des carrés de ces sommes soit $= d$.

R. $\dfrac{d-a^2+b^2}{2(a-b)}$.

Les deux problèmes 163 et 164 sont-ils compris dans celui-ci?

166) Trouver les volumes de trois tonneaux, d'après les données suivantes. On suppose le premier tonneau vide; si on le remplit du second qui est plein, il reste dans ce dernier les $\frac{2}{9}$ mes du vin qu'il y avait; si l'on remplit ce second vide par le troisième qui est plein, il ne reste plus dans ce dernier que le quart de son vin; mais si on voulait tâcher de remplir le troisième vide par le premier qui se trouve plein, il manquerait 50 bouteilles. Combien de bouteilles contient chacun de ces trois tonneaux?

R. Le premier 70, le second 90, et le troisième 120 bouteilles.

167) On a quatre tonneaux de divers volumes. Le second se remplit du premier dans lequel il reste alors les $\frac{4}{7}$ me de son vin: puis le troisième se remplit du second, et il reste dans ce dernier le $\frac{1}{4}$ de son

vin; enfin le troisième ne peut remplir que les $\frac{9}{16}$^{mes} du quatrième; et si l'on voulait remplir le troisième et le quatrième vides, du premier tonneau, non seulement ces deux tonneaux seraient pleins, mais il resterait encore 15 bouteilles au premier. Combien de bouteilles contient chaque tonneau?

R. Le premier 140, le second 60, le troisième 45 et le quatrième 80 bouteilles.

XV. *Problèmes pour les équations du premier degré à plusieurs inconnues.*

1) Trouver deux nombres dont la différence soit 16, et la somme 70. Quel sont-ils?

R. 43 et 27.

2) Trouver les expressions de ces deux nombres; leur somme étant $= a$ et leur différence b.

R. L'une est $= \frac{a+b}{2}$, l'autre $= \frac{a-b}{2}$.

3) Deux bourses contiennent ensemble 300 fr. Si l'on met 30 fr. de la première dans la seconde, les contenus des deux bourses seront égaux. Combien de francs chacune renferme-t-elle?

R. La 1ère 180; la 2de 120 fr.

4) *A* dit à *B*, donne-moi 100 fr. et j'aurai autant que toi. Non, répond *B*, donne-moi, toi-même, 100 fr.

et j'aurai le double de ce que tu as. Combien ont ils chacun?

R. *A* 500 fr., *B* 700.

5) Quelqu'un a deux bourses: s'il met 8 fr. dans la première, sa valeur sera la moitié de celle de la seconde. Mais si, au contraire, il avait mis ces 8 fr. dans la seconde, celle-ci vaudrait trois fois autant que l'autre. Quelle est la valeur de chacune?

R. La 1ère 24., la seconde 64 fr.

6) *A* et *B* possèdent ensemble une somme de 5700 fr. Si *A* avait trois fois et *B* cinq fois autant qu'ils ont chacun réellement, ils possèderaient ensemble 23500 fr. Combien ont-ils chacun?

R. *A* 2500, *B* 3200 fr.

7) On cherche deux nombres. Si l'on multiplie l'un par 2 et l'autre par 5, la somme des deux produits sera 31: mais si l'on multiplie le premier par 7, et le second par 4, la somme des deux produits sera 68. Quels sont ces nombres?

R. Le premier est 8, le second 3.

8) Si, de deux nombres, on multiplie l'un par a, et le second par b, la somme des produits est k; mais si la première somme est multipliée par a', et la seconde par b', la somme des deux produits sera k'. Trouver les expressions de ces nombres.

R. $\frac{b'k-bk'}{ab'-a'b}$, $\frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}$.

9) On cherche deux nombres dont l'un, augmenté de 4, soit $3\frac{1}{4}$ fois plus grand que le second; et dont le second, augmenté de 8 soit la moitié du premier.

R. Ces nombres sont 48 et 16.

10) Si l'on augmente de a le premier de deux nombres, il devient de m fois aussi grand que le second: mais si celui-ci est augmenté de b, il sera n fois aussi grand que le premier. Comment s'expriment ces nombres?

R. Le premier $= \frac{a+mb}{mn-1}$, le second $= \frac{b+na}{mn-1}$.

11) Un père à qui son fils demande quel est leur âge, répond: il y a 6 ans, j'étois $3\frac{1}{3}$ fois plus vieux que toi; et dans trois ans, il faudrait multiplier ton âge par $2\frac{1}{6}$ pour qu'il fût égal au mien. Quels sont ces âges?

R. Le père a 36 ans; le fils en a 15.

12) A et B possèdent ensemble une somme de 98000 fr. A emploie pour une affaire la sixième et B, la cinquième partie de la sienne; alors il reste à chacun une somme égale. Combien avaient-ils?

R. A 48000, B 50000 fr.

13) A doit 1200 fr. et B, 2550 fr., et ils n'ont pas de quoi s'acquitter. A dit à B: si tu me prêtais le huitième de ce que tu as, je serais en état payer mes dettes. B réplique: les miennes seraient payées, si tu me prêtais le $\frac{1}{6}^{me}$ de ton argent. Combien ont-ils chacun?

R. A 900 fr. et B 2400 fr.

14) Un capitaliste emprunte 8000 fr. à un intérêt assez modéré et il trouve occasion de placer lui-même 23000 fr. à un intérêt plus haut, ce qui lui donne un profit net par an de 905 fr. Il emprunte encore aux mêmes conditions 9400 fr., et place d'un autre côté 17500 fr., et ce dernier placement lui rapporte un bénéfice net de $539\frac{1}{2}$ fr. annuellement. A quels intérêts a-t-il pris et replacé l'argent?

R. A $4\frac{1}{2}$ et à $5\frac{1}{2}$ pour cent.

15) On cherche le poids de deux masses de fer. On sait que les $\frac{2}{5}$ de la première pèsent 96 kilogr. de moins que les $\frac{3}{4}$ de l'autre, et que $\frac{5}{8}$ de celle-ci pèsent justement autant que les $\frac{4}{9}$ de la première. Combien chaque masse pèse-t-elle?

R. La première 720; la seconde 512 kilogr.

16) Un bassin d'eau contenant 210 mesures, peut se remplir par deux tuyaux. On a trouvé que le premier tuyau, ayant été ouvert pendant 4 heures, et le second pendant 5 heures, ont fourni ensemble 90 mesures. Une seconde fois, où le premier tuyau a été ouvert pendant 7 heures, et l'autre pendant $3\frac{1}{2}$, ils ont donné ensemble 126 mesures. Combien d'eau chaque tuyau fournit-il par heure? et combien d'heures faudra-t-il pour remplir le bassin par les deux tuyaux à la fois?

R. Le premier tuyau donne 15 mesures et le second 6 mesures par heure; il faut 10 heures pour remplir le bassin.

17) Un Viennois a 500 pièces de monnaie de 17

et de 7 creutzers, faisant ensemble 112 florins 40 creutzers (le florin se divise en 60 creutzers). Combien de pièces de chaque espèce a-t-il?

R. 326 pièces de 17, et 174 pièces de 7 creutzers.

18) On a deux sortes de marchandise. 8 kilogr. de la première et 19 de la seconde coûtent ensemble 18 fr. $20\frac{5}{6}$ c.; de plus 20 kilogr. de la première et 16 de la seconde coûtent ensemble 25 fr. $83\frac{1}{3}$ c. Combien coûte le kilogr. de chacune?

R. La première $79\frac{1}{6}$ c.; la seconde $62\frac{1}{2}$ c.

19) 15 aunes de Silésie et 33 de Leipsic ensemble, égalent $39\frac{1}{2}$ aunes de Brabant; et encore, 24 aunes de Silésie avec 55 de Leipsic font 65 aunes de Brabant. Quels sont les rapports de l'aune de Silésie, et de celle de Leipsic à celle de Brabant? Quel est celui des deux premières entre elles, et de combien pour cent diffèrent-elles?

R. L'aune de Silésie est à celle de Brabant comme 5 est à 6; et l'aune de Leipsic comme 9 est à 11, l'aune de Silésie est a celle de Leipsic comme 55 à 54, et cette première est de $1\frac{23}{27}$ pour cent plus longue que l'aune de Leipsic.

20) $17\frac{1}{2}$ pieds de Danzig et 19 de Berlin font ensemble $34\frac{3}{4}$ pieds du Rhin, et encore 5 pieds de Danzig avec $9\frac{1}{2}$ de Berlin égalent $13\frac{53}{56}$ pieds du Rhin. Quel sont les rapports de ces mesures entr'elles? et de combien pour cent le pied de Danzig diffère-t-il de celui de Berlin?

R. Le pièd de Danzig est à celui du Rhin comme 32 est à 35: et celui de Berlin est au pied du Rhin comme 75 est à 76: le pied de Danzig est au pied de Berlin, comme 2432 à 2625: Enfin ce dernier est de $7\frac{569}{608}$, ou $7\frac{14}{15}$ environ pour cent plus long que le pied de Danzig.

21) 40 milles de France font $12\frac{1}{2}$ milles d'Allemagne de plus que 53 milles anglais. 10 milles de France avec $26\frac{1}{2}$ milles d'Angleterre ensemble égalent $11\frac{3}{4}$ milles d'Allemagne. Quels sont leurs rapports entre eux?

R. Le mille français est à celui d'Allemagne comme 3 est à 5; et le mille anglais est à ce dernier comme 23 est à 106: le mille de France est au mille d'Angleterre comme 318 est à 115.

22) On a échangé 250 louis contre 512 ducats et 7 fr. 20 c. On a encore échangé aux mêmes cours, 160 louis contre 328 ducats et 80 c. A quel prix chaque pièce a-t-elle été évaluée?

R. Le louis à 24 fr. 40 c.; le ducat à 11 fr. 90 c.

23) Un voyageur a parcouru la France, l'Allemagne et l'Angleterre, et y a dépensé 33300 fr.: savoir, en France 7540 fr.; en Allemagne 1520 écus, et en Angleterre 820 livres sterling. Interrogé sur le cours auquel il a payé ces monnaies étrangères il répond que 5 livres sterling ont coûté 12 francs de plus que 27 écus. Quel est le cours de l'une et de l'autre monnaie?

R. Celui de la livre sterling 24 fr.; celui de l'écu, 4 fr.

24) Quelqu'un a deux chevaux, et deux selles dont l'une coûte 150 et l'autre seulement 6 fr. S'il met la plus chère sur le premier cheval, et l'autre sur le second, ce dernier vaudra 24 fr. de moins que le premier; mais s'il met la mauvaise selle sur le premier cheval, et la plus chère sur le second, celui-ci vaudra $3\frac{3}{4}$ fois autant que le premier. Combien a coûté chaque cheval?

R. Le premier 90, le second 210 fr.

25) Quelle est la fraction qui donne $\frac{1}{3}$ quand on ajoute 1 au numérateur, et $\frac{1}{4}$ si l'on ajoute 1 au dénominateur?

R. $\frac{4}{15}$.

26) Quelle est la fraction qui donne $\frac{1}{4}$ en soustrayant 3 du numérateur et du dénominateur, et $\frac{1}{2}$ en ajoutant 5 en haut et en bas?

R. $\frac{7}{19}$.

27) *B* a placé 12600 fr. de plus que *A* et à 1 pour cent d'intérêts plus haut et retire 730 fr. d'intérêts par an de plus que lui. *C* a placé 3000 fr. de plus que *A* et à 2 pour cent d'intérêts de plus, et retire 380 fr. par an d'intérêts de plus que lui. Quelle somme chacun a-t-il prêtée et à quels intérêts?

R. *A* a prêté 10000 fr. à 4, *B* 22600 fr. à 5 et *C* 13000 fr. à 6 pour cent.

28) Une société a dépensé dans une auberge une certaine somme, chacun autant que l'autre. S'il y avait eu 5 personnes de plus et que la dépense eût

été de 75 c. de plus par personne, elle aurait été de 39 fr. 25 c. plus considérable. Mais s'il s'y était trouvé 3 personnes de moins, et que la dépense eût été de 50 c. de moins par personne, elle se fût montée à 20 fr. 50 c. de moins. De quel nombre de personnes la société était-elle composée, et quel était l'écot de chacune?

R. 14 personnes; l'écot de chacune 5 fr.

29) Chaque page d'un ouvrage imprimé doit contenir un nombre déterminé de lignes, et chaque ligne, un nombre fixé de lettres. Trois lignes par page et quatre lettres par ligne de plus donneraient dans chaque page 224 lettres de plus. Au contraire deux lignes par page et trois lettres par ligne de moins donneraient 145 lettres de moins dans chaque page. Quel est le nombre fixé de lignes et de lettres?

R. 29 lignes et 32 lettres.

30) Trouver deux nombres tels que si l'on ajoute à l'un a, et à l'autre b, le produit des deux sommes surpasse de c le produit des deux nombres mêmes. Mais que si l'on augmente un des nombres de a', et l'autre de b', le produit de ces deux sommes soit de c' plus haut que le produit des nombres mêmes. Comment exprimer ces nombres?

R. Par $\dfrac{a'c-ac'+aa'(b'-b)}{a'b-ab'}$,

$$\frac{bc'-b'c+bb'(a-a')}{a'b-ab'}.$$

Les trois problèmes 27, 28, 29 sont-ils compris dans celui-ci, et quelles sont les valeurs des lettres a, b, c, a', b', c' dans ceux-là?

31) Il n'y a pas long-temps, dit quelqu'un que le boisseau de froment coûtait 6 fr. et celui de seigle 5 fr. 25 c. de moins qu'à présent. Le prix du froment était alors à celui du seigle comme 10 est à 7; aujourd'hui ce rapport est comme 4 est à 3. Quels sont les prix actuels du froment et du seigle?

R. Du froment 21 fr.; du seigle 15 fr. 75 c. par boisseau.

32) On a deux tonneaux et dans chacun une certaine quantité de vin. Pour les rendre égales, on verse du premier tonneau dans le second, autant que celui-ci contient déjà; puis on reverse de ce second dans le premier autant qu'il y était resté de vin: enfin une troisième fois on verse du premier tonneau dans le second autant qu'il est resté de vin dans ce dernier. Après tous ces versemens il se trouve 16 mesures de vin dans chaque tonneau. Combien de mesures contenaient-ils d'abord?

R. Le premier 22, le second 10 mesures.

33) Supposons que dans le problème précédent, les nombres égaux de mesures qui se trouvent à la fin dans les deux tonneaux sont $= a$. Combien de mesures y aura-t-il eu d'abord dans chaque tonneau?

R. Dans le premier $\frac{11}{8}a$, dans le second $\frac{5}{8}a$ mesures.

34) Un marchand de vin en a de deux sortes.

En mêlant 3 bouteilles du meilleur avec 5 bouteilles du moins bon, il pourra le laisser à 82 c. la bouteille. Mais s'il mêle $3\frac{3}{4}$ bouteilles du meilleur avec $7\frac{1}{2}$ bouteilles de l'autre, il pourra le donner à 80 c. Combien coûte la mesure de chaque sorte?

R. Le meilleur vin 1 fr. 12 c., l'inférieur 64 c.

35) Soit en général le prix du mélange de a bouteilles du premier vin avec b bouteilles du second $= h$ cent., et de plus a' bouteilles du premier avec b' bouteilles du second $= h'$ cent.: combien a coûté la bouteille de chaque sorte de vin?

R. Le prix du premier est $\frac{(a+b)b'h-(a'+b')bh'}{ab'-a'b}$, celui du second, $\frac{(a'+b')ah'-(a+b)a'h}{ab'-a'b}$ centimes.

36) 37 kilogrammes d'étain, mis dans l'eau, y perdent 5 kilogr. *) de leur poids, et 23 kilogr. de plomb y en perdent 2. Une composition de ces deux métaux pesant 120 kilogr. perd dans l'eau 14 kilogr. Quelle quantité de chaque métal cette composition contient-elle?

R. 74 kilogr. d'étain et 46 kilogr. de plomb.

37) 21 kilogr. d'argent perdent dans l'eau 2 kilogrammes, et 9 kilogr. de cuivre y perdent 1 kilogr.; une composition de ces deux métaux, pesant dans l'air 148 kilogr., perd dans l'eau $14\frac{2}{3}$ kilogr. Combien y a-t-il de chaque métal dans la composition?

R. 112 kilogr. d'argent et 36 de cuivre.

---

*) Nous laissons au maître le soin d'expliquer la théorie de la pesanteur spécifique des corps.

38) Un morceau de métal donné qui pèse p kilogrammes, perd dans l'eau a kilogr. Mais il est composé d'un mélange de deux autres métaux A et B, et l'on sait que p kilogr. de A perdent dans l'eau b kilogr., et que p kilogr. de B perdent c kilogr. Quelle quantité de chaque métal se trouve-t-il dans le morceau?

R. $\frac{(c-a)p}{c-b}$ kilogr. de A, et $\frac{(a-b)p}{c-b}$ kilogramm. de B.

39) D'après Vitruve la couronne du roi de Syracuse Hiéron pesoit 20 livres, et perdait dans l'eau près de $1\frac{1}{4}$ livres. Supposé qu'elle fût un mélange d'or et d'argent et que 19,64 livres d'or perdent dans l'eau 1 livre, et 10,5 livres d'argent y perdent aussi une livre: combien d'or et d'argent la couronne contenait-elle?

R. 14,77 ······ livres d'or, et d'argent 5,22 ····· livres. Ce problème est-il contenu dans le précédent et quelles sont ici les valeurs de p, a, b, c?

40) Le plomb est 11,324 fois plus pesant que l'eau: le liège ne pèse que 0,24 et le bois de sapin 0,45 fois autant que l'eau. On veut réunir ensemble du plomb et du liège, de manière à former un corps qui pèse 80 kilogr. et précisément autant qu'un morceau de sapin du même volume, et qui par conséquent puisse surnager. Combien de plomb et combien de liège faudra-t-il joindre ensemble?

R. 38,14··· kilogramm. de plomb, avec 41,85 ··· kilogr. de liège.

41) On doit joindre ensemble deux matières dont l'une est p fois et l'autre p' fois aussi pesante que l'eau, de telle manière que le corps qui en résultera soit p'' fois aussi pesant que l'eau et pèse q kilogr. Combien prendra-t-on pour cela de chacune de ces matières?

R. $\frac{qp(p'-p'')}{p''(p'-p)}$ kilogr. de la première et $\frac{qp'(p''-p)}{p''(p'-p)}$ de la seconde matière.

Quelles sont les limites de p'', pour que ce problème soit possible?

42) On cherche deux nombres dont la différence soit à leur somme comme 2 est à 3, et dont la somme soit à leur produit comme 3 est à 5. Quels sont-ils?

R. 2 et 10.

43) Trouver deux nombres dont la somme soit m fois et le produit n fois aussi grand que leur différence.

R. $\frac{2n}{m-1}$, $\frac{2n}{m+1}$.

44) Quels sont les deux nombres dont la somme est 13, et la différence des carrés, 39?

R. 5 et 8.

45) Soit la somme de deux nombres $= a$, et la différence de leurs carrés $= b$, quels seront ces nombres?

R. $\frac{a^2+b}{2a}$, $\frac{a^2-b}{2a}$.

46) La somme de deux nombres est a, le quo-

tient qu'ils donnent en divisant l'un par l'autre, est b; quels sont-ils?

R. $\frac{a}{b+1}$, $\frac{ab}{b+1}$.

47) On demande à quelqu'un son âge, celui de son père et celui de son grand-père: il répond, mon âge et celui de mon père font ensemble 56 ans; celui de mon père avec celui de mon grand-père font 100 ans, et l'âge de mon grand-père joint au mien donne 80 ans. Quel est l'âge de chacun?

R. Le fils a 18 ans; le père 38; le grand-père 62.

48) Les sommes de trois nombres pris deux à deux sont a, b, c, quels sont-ils?

R. $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a+c-b}{2}$, $\frac{b+c-a}{2}$.

49) A, B, C, doivent ensemble 2190 fr.; aucun des trois n'est en état de payer seul toute la somme: mais en se réunissant ils le pourront de la manière suivante. B joindra les $\frac{3}{7}$ de ce qu'il a à tout ce que A possède; ou bien C réunira les $\frac{5}{9}$ de son argent à celui de B; ou enfin A joindra les $\frac{2}{3}$ de ce qu'il possède à tout l'argent de C. Quelle est la fortune de chacun d'eux?

R. A a 1530 fr., B 1540 fr., C 1170 fr.

50) A et B ne possèdent ensemble que les $\frac{2}{3}$ de ce que possède C; B et C ensemble ont 6 fois autant que A, et si B avait 680 fr. de plus qu'il n'a, il possèderait autant que A et C ensemble. Combien chacun d'eux a-t-il?

R. A 200, B 360, C 840 fr.

51) J'ai trois bourses dont chacune contient une certaine somme d'argent. Si je tire de la première 20 fr., et que je les mette dans la seconde, celle-ci contiendra 4 fois autant de francs qu'il en est resté dans l'autre. Si j'ôte de la seconde bourse 60 fr. pour les mettre dans la troisième, celle-ci contiendra $1\frac{3}{4}$ fois autant que ce qui est resté dans la seconde. Mais si je prends de la troisième bourse 40 fr. que je mets dans la première, il restera encore, dans cette troisième, $2\frac{7}{8}$ fois autant d'argent qu'à présent dans la première. Quel est le contenu de chaque bourse?

R. Il y a dans la première 120, dans la seconde 380, dans la troisième 500 fr.

52) *A*, *B*, et *C*. comparent leur fortune. *A* dit à *B*, si tu me donnes 700 fr., j'aurai le double de ce qu'il te restera: *B* dit à *C*, si tu me donnais 1400 fr., j'aurais trois fois autant que tu aurais gardé; enfin *C* dit à *A*: donne moi 420 fr., et j'aurai 5 fois autant d'argent qu'il t'en restera. Combien chacun possède t-il?

R. *A* 980, *B* 1540, *C* 2380 fr.

53) On cherche trois nombres tels que si l'on soustrait du premier 4 pour les ajouter au second, le reste sera à la somme comme 1 est à 2. Si l'on soustrayait du second 10 pour les ajouter au troisième, le reste serait à la somme comme 3 est à 10. Mais si l'on soustrait du premier 5 pour les donner au troisième, le reste sera à la somme comme 3 est à 11. Quels sont ces nombres?

R. 20, 28 et 50.

54) *A*, *B*, *C*, ont ensemble 1820 fr. Si *B* donne 200 fr. à *A*, celui-ci aura 160 fr. de plus qu'il n'en restera à *B*; si *B* reçoit de *C* 70 fr., ils auront chacun une somme égale: combien ont-ils chacun?

R. *A* 400; *B* 640; *C* 780 fr.

55) Trois personnes ont ensemble dépensé une somme, qu'aucune des trois ne peut acquitter seule. *A* dit à *B*: donne-moi le quart de ce que tu as, et je pourrai tout payer: *B* dit à *C*: avec le huitième de ton argent je pourrai aussi payer le tout. *C* dit à *A*: quoique je n'aie que 4 fr. j'acquitterai aussi notre dépense, si tu me donnes la moitié de ton argent. Quelle somme ont-ils dépensée et combien d'argent ont *A* et *B*?

R. On a depensé $6\frac{1}{2}$ fr.: *A* a 5, et *B*, 6 fr.

56) On a trois lingots d'argent de différens titres, savoir: à 0,9, à 0,75 et à 0,65 de fin. Si l'on fond le lingot du titre de 0,9 avec celui du titre de 0,75, il en résultera un lingot à 0,8 de fin; et le résultat sera le même, si l'on fond le même lingot à 0,9 de fin avec celui de 0,65. Les trois lingots pèsent ensemble $36\frac{2}{3}$ kilogr. Combien pèse chacun des trois?

R. Le lingot au titre de 0,9 pèse 10 kilogr., celui de 0,75 pèse 20 kilogr., et celui de 0,65 pèse $6\frac{2}{3}$ kilogr.

57) Quelqu'un paie une somme de 257 fr. 60 c. en 5 ducats 7 fréderics d'or et 2 guinées; plus une somme de 446 fr. 40 cent. en 4 ducats, 9 fréderics et 8 guinées; enfin une autre somme de 372 fr. 40 c.

en 12 ducats, 6 fréderics et 4 guinées. A quel cours chacune de ces pièces a-t-elle été comptée, le cours étant le même dans les trois paiements?

R. Le ducat à 11 fr. 80 c.; le fréderic à 20 fr. 80 c. et la guinée à 26 fr. 50 c.

58) Un marchand a trois magasins renfermant chacun de trois espèces de grains. Le premier contient 96 hectolitres de froment, 36 de seigle et 60 d'orge; le second renferme 36 hectolit. de froment, 120 de seigle et 84 d'orge; le troisième, 72 hectol. de froment, 108 de seigle et 156 d'orge. Le contenu du premier magasin est évalué à 2936 fr.; celui du second à 3248 fr., et le troisième à 4520 fr. Quelle valeur a chaque sorte de grain?

R. L'hectolitre de froment à $18\frac{2}{3}$ fr.; l'hectolitre de seigle à 14 fr., et celui de l'orge a $10\frac{2}{3}$ fr.

59) *A*, *B*, *C*, achètent du café, du sucre et du thé aux mêmes prix. *A* paie 62 fr. 40 c. pour $7\frac{1}{2}$ kilogrammes de café, 3 kilogr. de sucre et $2\frac{1}{4}$ kilogr. de thé. *B*, donne 89 fr. 20 c. pour 9 kilogr. de café, 7 kilogr. de sucre et 3 de thé. *C* paie 84 fr. 20 c. pour 2 kilogr. de café, $5\frac{1}{2}$ de sucre et 4 de thé. Combien leur a coûté le kilogr. de chaque objet?

R. Le café 2 fr. 40 c.; le sucre 2 fr. 80 c.; le thé 16 fr.

60) Trois maçons *A*, *B*, *C*, ont un mur à construire. *A* et *B* ensemble l'achèveraient en 12 jours: *B* et *C* en 20 jours seulement, et *A* et *C* réunis en emploieraient 15. Quel serait le temps nécessaire pour

chacun à part, et quel temps emploieraient-ils s'ils travaillaient tous trois ensemble?

R. Il faudrait à *A* seul 20 jours, à *B* 30, et à *C* 60 jours. Tous les trois réunis termineraient en 10 jours.

61) On prend trois ouvriers pour un certain travail. *A* et *B* réunis le termineraient en *a* jours, *A* et *C* en *b* jours et *B* et *C* en *c* jours. Quel temps chacun d'eux, travaillant seul, emploierait-il pour cet ouvrage; et dans quel temps auraient-ils fini en travaillant tous trois ensemble; supposé que, dans quelque circonstance qu'ils se trouvent, ils travaillent chacun avec la même activité.

R. *A* aura besoin de $\frac{2abc}{bc+ac-ab}$ jours; *B* emploiera $\frac{2abc}{bc+ab-ac}$ jours, et *C* emploiera $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ jours. Il faudrait à tous les trois ensemble $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$ jours.

62) Un réservoir d'eau peut être rempli par trois tuyaux *A*, *B*, *C*. Les tuyaux *A* et *B* le rempliraient en 70 minutes: *A* et *C*, en 84 et *B* et *C*, en 140 minutes. Quel temps faut-il à chaque tuyau à part; et quel temps emploieraient-ils tous trois à la fois?

R. Il faudrait à *A*, 105, à *B*, 210, et à *C*, 420 minutes. Les 3 à la fois rempliront le réservoir en 60 minutes.

Ce problème est-il compris dans le 61[e] et comment faudrait-il modifier ce dernier pour le conformer parfaitement au 62[me]?

63) Un orfèvre a trois lingots, chacun composé d'or, d'argent et de cuivre. Le premier lingot contient 0,1 kilogr. d'or, 0,3 d'argent et 0,6 de cuivre: le second a 0,4 kilogr. d'or, 0,56 d'argent et 0,96 de cuivre: le troisième est composé de 0,24 kilogr. d'or, 0,78 kilogr. d'argent et 0,48 de cuivre. Il veut prendre une partie de chacun de ces lingots pour composer un nouveau lingot, lequel devra consister en 0,2 kilogr. d'or, 0,46 d'argent et 0,52 de cuivre. Combien faudra-t-il prendre de chacun des trois lingots?

R. Du premier 0,2, du second 0,48, et du troisième 0,5 kilogr.

64) Trois soldats *A*, *B*, *C*, ont fait ensemble un butin, montant à 96 fr., qu'il veulent répartir entr'eux par portions égales. *A*, qui a entre ses mains la plus forte somme, donne à *B* et à *C* autant d'argent que chacun d'eux en a déjà: après cela *B* donne, de l'argent qu'il a à présent, à *A* et à *C* une somme égale à celle qu'ils ont, et enfin *C* en fait de même avec *A* et *B*. Il se trouve alors qu'ils ont chacun une somme égale. Combien avaient-ils d'abord?

R. *A*, 52; *B*, 28; *C*, 16 fr.

65) J'ai dans trois tiroirs d'une armoire 162 fr. distribués en sommes différentes. Pour que la même somme se trouve dans chacun, je mets, du premier, dans le second et dans le troisième, la moitié autant qu'il s'y trouve déjà; puis je mets de même du second dans les deux autres, et enfin du troisième dans le premier et dans le second, la moitié de ce qui s'y trouve actuellement. Alors les trois tiroirs ont cha-

cun une somme égale. Combien y avait-il d'abord dans chaque tiroir?

R. Dans le premier 70; dans le second 52; dans le troisième 40 fr.

66) *A*, *B*, *C*, jouent ensemble au pharaon. Au premier coup *A* tient la banque: *B* et *C* pontent chacun le tiers de son argent, et gagnent. *B* prend alors la banque, *A* et *C* mettent aussi le tiers de leur argent actuel et gagnent. Enfin *C* prend aussi la banque, et *A* et *B* gagnent aussi en pontant le tiers de ce qu'ils ont. Alors ils comptent leur argent et ils se trouvent avoir chacun 64 louis. Combien avaient-ils avant de se mettre au jeu?

R. Le premier 75; le second 63; le troisième 54 louis.

67) *A*, *B*, *C*, *D*, *E* jouent ensemble sous condition qu'à chaque coup, celui qui le perdra, paiera aux autres autant que ce qu'ils auront alors. *A* perd le premier, *B* perd après lui, *C* ensuite, puis *D*, et enfin *E*. Ils ont ainsi tous perdu, à tour de rôle, et cependant il leur reste à chacun une somme égale, savoir 32 fr. Combien avaient-ils en se mettant au jeu?

R. *A* 81, *B* 41, *C* 21, *D* 11, *E* 6 fr.

68) On veut récompenser la bravoure de 3 régiments, par une gratification de 10608 fr., de manière que chaque homme du régiment qui s'est le plus distingué ait 4 fr., et que le reste soit distribué par portions égales aux soldats des deux autres. D'après

le nombre d'hommes dont chaque régiment est composé, il se trouve que si c'est le premier qui reçoit 4 fr. par homme, il restera 2 fr. pour chaque soldat des deux autres; si c'est le second qui est préféré, il n'y aura pour les soldats du premier et du troisième que $1\frac{1}{3}$ fr. Si enfin c'est le troisième qui obtient la distinction, chaque homme des deux autres ne recevra que 1 fr. Combien d'hommes y a-t-il dans chaque régiment?

R. Dans le premier 780, dans le second 1716, dans le troisième 2028 hommes.

69) Trouver trois nombres tels que si l'on ajoute le premier à m fois des deux autres, la somme sera $= a$. Si c'est le second qu'on additionne à m' fois les deux autres, cette somme sera $= a'$; mais si c'est le troisième qu'on ajoute à m'' fois le premier et le second, la somme sera $= a''$. Quels sont ces nombres?

R. Soit $\frac{m}{m-1}+\frac{m'}{m'-1}+\frac{m''}{m''-1}=A$, $\frac{a}{m-1}+\frac{a'}{m'-1}+\frac{a''}{m''-1}=B$, les trois nombres sont $\frac{1}{m-1}\left(\frac{mB}{A-1}-a\right)$, $\frac{1}{m'-1}\left(\frac{m'B}{A-1}-a'\right)$, $\frac{1}{m''-1}\left(\frac{m''B}{A-1}-a''\right)$, et leur somme est $=\frac{B}{A-1}$.

70) Si pour généraliser encore davantage le problème précédent, on suppose plusieurs nombres au lieu de trois; quelles seront, dans ces cas, les expressions de ces nombres?

R. Soit $\frac{m}{m-1}+\frac{m'}{m'-1}+\frac{m''}{m''-1}+\frac{m'''}{m'''-1}$ $+\text{etc.}=A$, $\frac{a}{m-1}+\frac{a'}{m'-1}+\frac{a''}{m''-1}+\frac{a'''}{m'''-1}+\text{etc.}$ $=B$, les nombres cherchés seront: $\frac{1}{m-1}\left(\frac{mB}{A-1}-a\right)$, $\frac{1}{m'-1}\left(\frac{m'B}{A-1}-a'\right)$, $\frac{1}{m''-1}\left(\frac{m''B}{A-1}-a''\right)$, $\frac{1}{m'''-1}\left(\frac{m'''B}{A-1}-a'''\right)$, etc. et la sômme de tous les nombres sera $=\frac{B}{A-1}$.

71) Trois nombres font ensemble 83. Si l'on soustrait 7 du premier et du second, les restes seront comme 5 est à 3: et si l'on soustrait 3 du second et du troisième, les restes seront comme 11 est à 9. Quels sont ces nombres?

R. 37, 25, et 21.

72) On cherche trois nombres tels que si l'on ajoute 6 au premier et au second, leurs sommes seront entr'elles comme 2 est à 3: et si l'on ajoute 5 au premier et au troisième, les sommes seront comme 7 est à 11. Mais si l'on soustrait 36 du second et du troisième, les restes seront comme 6 est à 7. Quels sont ces nombres?

R. 30, 48, 50.

73) Un certain nombre a trois chiffres qui sont en proportion arithmétique. Si l'on divise ce nombre par la somme des trois chiffres pris ensemble, le quotient sera 48. Mais si on soustrait de ce nombre,

198, il restera un nombre composé des mêmes chiffres, mais en ordre inverse. Quel est le nombre cherché?

R. 432.

XVI. *Problèmes pour les équations du second degré à une, ou à plusieurs inconnues.*

1) Quel est le nombre dont la moitié, multipliée par le tiers, fait 864?

R. 72.

2) Quel est le nombre dont la septième et la huitième partie multipliées l'une par l'autre, et le produit étant divisé par 3, donnera pour quotient $298\frac{2}{3}$?

R. 224.

3) On cherche un nombre qui ajouté à 94, puis soustrait de 94, donne deux nombres dont le produit est 8512.

R. 18.

4) Quels sont les deux nombres dont le produit est 750, et le quotient est $3\frac{1}{3}$?

R. 50 et 15.

5) Soit le produit de deux nombres $= a$, leur quotient $= b$. Comment exprimer ces nombres?

R. Par $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

6) Quels sont les deux nombres dont la somme des carrés est 13001, et la différence des carrés 1449?

R. 85 et 76.

7) Soit la somme des carrés de deux nombres $= a$, et la différence de ces carrés $= b$. Quelles sont les expressions de ces nombres?

R. $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$, $\sqrt{\frac{a-b}{2}}$.

8) Quels sont les nombres qui étant l'un à l'autre comme 3 est à 4, ont pour somme de leurs carrés 324900?

R. 342. 456.

9) Quels sont les nombres qui ont le rapport de m à n et pour la somme de leurs carrés le nombre b?

R. $\frac{m\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, $\frac{n\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

10) Quels sont les nombres qui ayant le rapport de m à n, ont pour différence de leurs carrés le nombre b?

R. $\frac{m\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$, $\frac{n\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$.

11) Un certain capital est placé à 4 pour cent d'intérêts annuels: Si l'on multiplie le nombre des fr. de ce capital par le nombre de fr. des intérêts de cinq mois, on aura $117041\frac{2}{3}$ fr. Quel est ce capital?

R. 2650.

12) Un marchand a trois sortes de marchandises qui coûtent ensemble 552 fr. 50 c. Le kilogramme de chacune lui coûte le même nombre de décimes qu'il en a de kilogrammes; mais il a de la seconde sorte

un tiers de plus que de la première, et il a de la troisième $3\frac{1}{2}$ fois plus que de la seconde. Combien de kilogr. a-t-il de chaque sorte?

R. 15 de la première; 20 de la seconde, 70 de la troisième.

13) Quelqu'un a une certaine marchandise. S'il vend le kilogr. à $2\frac{3}{5}$ fois autant de décimes qu'il a de kilogr., il recevra une somme qui excèdera autant 15 fr. 50 c., qu'il recevrait de moins que cette dernière somme, s'il ne vendait sa marchandise que la moitié du nombre de décimes qu'il y a de kilogr. Combien y a-t-il de kilogr.?

R. 10 kilogr.

14) Je suppose un certain nombre, que je multiplie par $2\frac{1}{3}$ et j'ajoute 7 au produit: je multiplie encore le résultat par l'octuple du nombre supposé, puis je divise ce produit par 14, je soustrais du quotient mon nombre quadruplé, et j'ai pour résultat 2352. Quel nombre ai-je supposé?

R. 42.

15) On cherche trois nombres tels que le produit du premier par le second soit $= a$, le produit du premier par le troisième $= b$ et la somme des carrés du second et du troisième soit $= c$. Quels sont ces nombres?

R. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c}}$, $a\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}$, $b\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}$.

16) Quels sont les trois nombres qui, multipliés

deux à deux l'un par l'autre, puis les produits divisés par le troisième donnent les quotiens a, b, c?

R. $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, $\sqrt{bc}$.

17) Trois nombres sont tels, que le produit du premier par le second, le produit de celui-ci par le troisième et celui du troisième par le premier, donnent les nombres a, b, c. Quels sont ces nombres?

R. $\sqrt{\frac{ac}{b}}, \sqrt{\frac{ab}{c}}, \sqrt{\frac{bc}{a}}$.

18) On a cinq nombres dont le premier étant multiplié par le second, celui-ci par le troisième et ainsi de suite, et enfin le cinquième multiplié par le premier donnent les produits a, b, c, d, e. Quels sont ces nombres?

R. $\sqrt{\frac{ace}{bd}}, \sqrt{\frac{abd}{ce}}, \sqrt{\frac{bce}{ad}}, \sqrt{\frac{acd}{be}}, \sqrt{\frac{bde}{ac}}$.

19) Mais si, au lieu de cinq nombres, il y en a sept, dont les produits seront a, b, c, d, e, f, g, quels sont ces nombres?

R. $\sqrt{\frac{aceg}{bdf}}, \sqrt{\frac{abdf}{ceg}}, \sqrt{\frac{bceg}{adf}}, \sqrt{\frac{acdf}{beg}}, \sqrt{\frac{bdeg}{acf}}, \sqrt{\frac{acef}{bdg}}, \sqrt{\frac{bdfg}{ace}}$.

On trouve de pareilles expressions pour un nombre quelconque impair des inconnues; mais non pas sans restrictions pour un nombre pair: Pourquoi? — et à quelles conditions doivent satisfaire les nombres a, b, c, d, e, etc. si la question doit être possible?

20) Quels sont les deux nombres dont l'un est de 8 plus grand que l'autre et dont le produit est 240?

R. 12 et 20.

21) La somme de deux nombres doit être $= a$ et leur produit $= b$, quels sont-ils?

R. $\dfrac{a+\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$, $\dfrac{a-\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$.

22) Trouver un nombre dont le carré le surpasse de 306; quel est-il?

R. 18.

23) On cherche un nombre tel que la somme de son quintuple et du produit de son tiers par son quart, surpasse le nombre 200 d'autant que le nombre cherché est au dessous de 280. Quel est ce nombre?

R. 48.

24) Un homme dont on demande l'âge, répond: ma mère m'a mis au monde à la fin de sa vingtième année: Le produit du nombre actuel de ses années et du nombre des miennes, surpasse de 2500 la somme des nombres de nos années ensemble. Quel âge a cet homme?

R. 42 ans.

25) Un marchand a deux sortes de thé, de poids et de prix différents. Le poids de la première sorte est à celui de l'autre comme 4 est à 3. Le kilogr. de la première coûte la moitié autant de décimes qu'elle pèse de kilogr.; et la seconde coûte 6 décimes

le kilogr. de moins que la première. Le montant du tout est de 2168 fr. Combien pèse chaque sorte?

R. La première sorte pèse 160, la seconde 120 kilogr.

26) Un marchand a trois pièces de drap dont la seconde contient 3 mètres et la troisième 5 mètres de plus que la première. Le mètre de cette première coûte précisément autant de décimes qu'elle mesure de mètres; le mètre de la seconde coûte 1 fr., et celle de la troisième pièce coûte 2 fr. de plus que le mètre de la première. Le total du prix est 953 fr. Combien de mètres a la première pièce?

R. 50 mètres.

27) Trouver quelle somme de francs ont sur elles trois personnes *A*, *B*, *C*, d'après les données suivantes. *A* a autant de fois 5 fr. que *B* en a de fois 9 et que *C* en a de fois 10. Si ensuite on multiplie le nombre de francs de *A* par celui de *B*, et les fr. de *B*, par le nombre de ceux de *C*, et qu'on ajoute ces deux produits à la somme qu'ils possèdent tous les trois ensemble on aura le nombre de 8832. Combien chacun a-t-il?

R. *A* 40, *B* 72, *C* 80 fr.

28) On achète pour 60 fr. de mouchoirs, tous au même prix. Si, pour la même somme, on avait reçu 3 mouchoirs de plus, ils auraient été d'un fr. la pièce meilleur marché. Combien de mouchoirs a-t-on achetés?

R. 12.

29) Un homme charitable veut faire distribuer par parts égales 108 fr. aux pauvres d'une petite ville; mais comme 6 de ceux à qui ce secours était destiné n'en ont plus besoin, il revient à chacun des autres 25 centimes de plus par tête que la part assignée auparavant. Combien de pauvres y avait-il d'abord?

R. 54.

30) Un père a laissé à ses enfants une fortune de 46800 fr. qui doivent leur être distribués également. Mais il arrive que, d'abord après le décès du père, deux des enfants meurent aussi; de sorte qu'à présent chacun de ceux qui restent recevra 1950 fr. de plus qu'il n'eût eu sans cet événement. Combien d'enfants cet homme avait-il?

R. 8 enfants.

31) Si l'on divise le nombre donné c par un nombre à trouver et par un autre nombre plus grand de a, la différence des deux quotiens sera $= d$. Quel est le nombre cherché?

R. $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{ac}{d}\right)}$.

Les trois problèmes précédents sont-ils compris dans ce dernier?

32) 20 personnes, hommes et femmes, dépensent ensemble 48 fr.; savoir, les hommes 24 et les femmes 24. Mais il se trouve que chaque homme dépense un franc de plus qu'une femme. Combien d'hommes y a-t-il?

R. 8.

33) Quelqu'un paie pour un cheval une certaine somme: il le revend ensuite 56 louis, et il y gagne autant de louis pour cent que le cheval lui avait coûté. Combien le cheval lui a-t-il coûté?

R. 40 louis.

34) Un marchand fait venir une pièce d'étoffe dont les frais de transport montent à 4 pour cent du prix d'achat sur les lieux. Il la revend 390 francs, et gagne à ce marché autant pour cent que le douzième du prix d'achat. Quel était ce prix d'achat?

R. 300 fr.

35) Deux paysannes ont apporté ensemble 140 oeufs au marché. L'une en a plus que l'autre, et elles reçoivent pourtant, par la vente, chacune la même somme d'argent. La première dit à l'autre, si j'avais eu ton nombre d'oeufs et que je les eusse vendus à mon prix, j'en aurais tiré 3 fr. 60 c.: peut-être, répond la seconde, mais si j'avais eu les tiens, j'en aurais tiré, en les vendant à mon prix, 6 fr. 40 c. Combien d'oeufs avaient-elles chacune?

R. L'une 80; l'autre 60.

36) Deux marchands débitent d'une étoffe, chacun un certain nombre de mètres, l'un trois mètres de moins que l'autre, et reçoivent ensemble 105 francs. Le premier dit au second: j'aurais pu de ton étoffe faire, à mon prix, 72 fr. De la tienne, repart l'autre, je n'aurais, à mon prix modique, tiré que $37\frac{1}{2}$ fr. Combien ont-ils vendu de mètres chacun?

R. L'un 15 mètres, l'autre 18, ou l'un 5, l'autre 8.

37) Deux voyageurs, A et B, partent en même temps de deux endroits C et D; A part de C pour D, et B, de D pour C. Ils se rencontrent en route, et causent du chemin qu'ils ont déjà fait et de celui qu'ils ont à faire encore. Il se trouve que A a fait 30 milles de plus que B, et que dans la proportion de leur vitesse, A peut compter qu'il atteindra le lieu D dans 4 jours. B n'arrivera au lieu C que dans neuf jours. Quelle distance y a-t-il entre C et D?

R. 150 milles.

38) Soit, dans le problème ci-dessus, d le chemin que A a parcouru de plus que B; a, le temps nécessaire à A pour terminer sa route, et b celui que B emploiera pour finir la sienne. Comment exprimer la distance entre C et D?

R. $\frac{d(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$.

39) Deux marchands mettent ensemble 50000 fr. dans une affaire, chacun une somme différente. L'un laisse sa mise cinq mois, l'autre deux mois seulement et chacun, l'affaire étant terminée, reçoit une somme égale en capital et bénéfice, 45000 fr. Quelle était la mise de chacun?

R. L'un 20000, l'autre 30000 fr.

40) Deux personnes ont mis ensemble dans une opération de commerce 20000 fr. L'un a laissé ses fonds pendant 17 mois, et reçoit à la fin de l'affaire 17100 fr. en capital et bénéfice: l'autre qui n'a laissé son argent que 12 mois, reçoit aussi pour capital et

39) … Quel était le capital versé par
somm…
… R. L'un avait mis 12000, l'autre 8000 fr.

41) Quels sont les deux nombres dont la somme est 41, et la somme des carrés 901?
R. 15 et 26.

42) Quels sont les nombres dont la somme est $= a$ et la somme des carrés $= b$?*)
R. $\frac{a+\sqrt{(2b-a^2)}}{2}$ et $\frac{a-\sqrt{(2b-a^2)}}{2}$.

Dans quel cas ces expressions deviennent-elles imaginaires?

43) Quels sont les deux nombres dont la différence est 8 et la somme des carrés 544?
R. 12 et 20.

44) Quels sont les deux nombres dont le produit est 255, et la somme des carrés 514?
R. 15 et 17.

45) Comment partager le nombre 16, de manière que le produit des deux parties, réuni à la somme de leurs carrés, fasse 208?
R. En 4 et 12.

46) Partager 39 en deux nombres tels que la somme des troisièmes puissances des deux soit 17199?
R. En 15 et 24.

---

*) Je ne donnerai que peu de problèmes généraux de ce genre, parce qu'on peut aisément les réduire en équations telles qu'on en trouve aux pages 127 à 132.

47) On demande à un commis quels sont ses appointements? Ils sont tels, répond-il, que si j'y ajoute 1578 et en retranche 142 écus et qu'ensuite je tire les racines troisièmes de la somme et du reste, ces racines différeront de 10. Quels sont ses appointements?

R. 150 écus.

48) Quel est le nombre qui, ajouté à sa racine carrée, donne 1332?

R. 1296.

49) Quel est le nombre, qui surpasse sa racine carrée de $48\frac{3}{4}$?

R. $56\frac{1}{4}$.

50) Comment partager deux nombres a et b, chacun en deux parties telles qu'une des parties de a soit à une de celles de b comme m est à n, et que les deux autres parties aient pour produit p?

R. Soit $\frac{na+mb\pm\sqrt{[(na-mb)^2+4mnp]}}{2mn}=A$,

alors une des parties de a est $= mA$ et une de celles de b est $= nA$.

51) Soient, comme dans le problème précédent, les deux nombres a et b à décomposer de manière que les premières parties soient dans le rapport de m à n, et que la somme des carrés des deux autres parties soit $= s$. Comment faut-il les partager?

R. Soit

$$\frac{am+bn\pm\sqrt{[(m^2+n^2)s-(an-bm)^2]}}{m^2+n^2}=A,$$

la première partie de a est $= mA$ et la première partie de $b = nA$.

52) On cherche deux nombres dont la différence, jointe à la différence de leurs carrés donne 150, et dont la somme jointe à la somme de leurs carrés donne 330. Quels sont ces nombres?

R. 9 et 15.

53) Quels sont les deux nombres dont la somme, le produit et la différence de leurs carrés soient égaux?

R. $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

54) On a trois nombres en proportion continue; leur somme est 126, leur produit est 13824. Quels sont-ils?

R. 6, 24, 96.

55) On cherche un nombre de trois chiffres, tel que la somme des carrés de chacun de ces chiffres pris comme unités, soit = 104, et que le carré du chiffre du milieu soit de 4 plus grand que le double du produit des deux autres chiffres; que, de plus, après avoir soustrait 594 du nombre cherché, le reste soit exprimé par les mêmes trois chiffres de ce nombre cherché, mais dans l'ordre inverse. Quel est ce nombre?

R. 862.

. . . .

Il ne faut pas toujours introduire les quantités cherchées elles-mêmes comme inconnues. Cela pourrait donner quelquefois des équations d'un degré plus haut que n'exige la solution, et c'est-ce qu'il faut éviter le plus possible: Il vaut mieux chercher premièrement quelque combinaison des inconnues, comme, par exemple, leur somme, leur différence, leur produit, la somme de leurs carrés, la différence de ces carrés etc. Après, on peut chercher les quantités mêmes. Cela étant un point important de l'algèbre qu'on ne peut trop avoir sous les yeux, je vais présenter un nombre suffisant de ces sortes de problèmes: dans la suite il s'en présentera encore plusieurs.

. . . .

56) On cherche deux nombres dont la différence étant multipliée par celle de leurs carrés, donne le nombre 160, et dont la somme étant multipliée par la somme des mêmes carrés, donne 580. Quels sont-ils?

R. La somme des deux nombres est 10, et leur produit 21: donc les nombres mêmes sont 7 et 3.

57) On demande deux nombres tels que leur somme jointe à leur produit fasse 34, et que la somme de leurs carrés surpasse de 42 celle des nombres mêmes. Quels sont-ils?

R. La somme des deux nombres est 10; leur produit 24; donc les nombres mêmes sont 4 et 6.

58) Si, pour généraliser le problème précédent, l'on met a au lieu de 34, et b au lieu de 42, par quelle formule exprimera-t-on alors les nombres cherchés?

R. Soient $-1\pm\sqrt{(4b+8a+1)}=2A$, $2a+1\mp\sqrt{(4b+8a+1)}=2B$, les deux nombres cherchés seront $\frac{A+\sqrt{(A^2-4B)}}{2}$, $\frac{A-\sqrt{(A^2-4B)}}{2}$,

59) Quels sont les deux nombres dont la somme est $= a$, et la somme de leurs quatrièmes puissances $= b$?

R. Soit d la différence des deux nombres cherchés, d est $= \sqrt{[-3a^2 \pm \sqrt{(8a^4 + 8b)}]}$; donc les nombres mêmes sont $\frac{a+d}{2}$, $\frac{a-d}{2}$.

60) La somme de deux nombres est $= a$, la somme de leurs cinquièmes puissances $= b$. Quels sont-ils?

R. Le produit p des deux nombres est $= \frac{1}{2}\left[a^2 \pm \sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}\right]$, donc les nombres mêmes sont $\frac{1}{2}[a + \sqrt{(a^2 - 4p)}]$, $\frac{1}{2}[a - \sqrt{(a^2 - 4p)}]$.

61) La somme de deux nombres est égale à a; leur produit, multiplié par la somme de leurs carrés, est $= b$. Quels sont ces nombres?

R. Supposons le produit des deux nombres $= p$, on a $p = \frac{1}{4}[a^2 \pm \sqrt{(a^4 - 8b)}]$; donc les nombres mêmes sont $\frac{1}{2}[a + \sqrt{(a^2 - 4p)}]$, $\frac{1}{2}[a - \sqrt{(a^2 - 4p)}]$.

62) La somme de deux nombres, ajoutée à celle de leurs carrés, est $= a$; la somme des carrés, prise m fois, et ajoutée au produit des deux nombres, pris n fois, est $= b$. Quels sont ces nombres?

R. La somme s et le produit p des deux nombres seront donnés par les équations $ns^2 + (n - 2m)s = 2b + (n - 2m)a$, $2p = s^2 + s - a$. Si l'on a trouvé de ces équations s et p, les deux nombres se trouveront par la résolution de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

chacun de ces nombres a donc quatre valeurs différentes.

63) Dans une proportion géométrique la somme des deux termes moyens est $= a$; la somme des deux extrêmes est $= b$, et la somme des carrés des quatre termes est $= c$; quelle sera cette proportion?

R. Le produit des deux termes moyens, qui est égal au produit des deux extrêmes, sera $\frac{a^2+b^2-c}{4}$, donc la proportion cherchée sera:

$$\tfrac{1}{2}[b-\sqrt{(c-a^2)}] : \tfrac{1}{2}[a-\sqrt{(c-b^2)}]$$
$$:: \tfrac{1}{2}[a+\sqrt{(c-b^2)}] : \tfrac{1}{2}[b+\sqrt{(c-a^2)}].$$

64) La différence des deux termes moyens d'une proportion géométrique est $= a$, celle des deux extrêmes est $= b$, et la somme des carrés de tous les quatre termes $= c$. Trouver la proportion?

R. Le produit des deux termes extrêmes ou des moyens est $= \frac{c-a^2-b^2}{4}$; donc la proportion est:

$$\tfrac{1}{2}[-b+\sqrt{(c-a^2)}] : \tfrac{1}{2}[-a+\sqrt{(c-b^2)}]$$
$$:: \tfrac{1}{2}[+a+\sqrt{(c-b^2)}] : \tfrac{1}{2}[+b+\sqrt{(c-a^2)}].$$

65) Dans une proportion géométrique le produit des deux termes extrêmes ou des deux moyens est $= a$, la somme des quatre termes est $= b$ et la somme de leurs carrés $= c$; quelle est cette proportion?

R. Si, pour abréger, on pose $\pm\sqrt{(8a+2c-b^2)} = A$, la somme des deux termes moyens sera $\frac{b-A}{2}$ et la somme des deux extrêmes sera $\frac{b+A}{2}$, donc la proportion cherchée sera:

$$\tfrac{1}{4}[b+A-\sqrt{(2c-8a+2bA)}] : \tfrac{1}{4}[b-A-\sqrt{(2c-8a-2bA)}]$$
$$:: \tfrac{1}{4}[b-A+\sqrt{(2c-8a-2bA)}] : \tfrac{1}{4}[b+A+\sqrt{(2c-8a+2bA)}].$$

66) Le produit des termes extrêmes ou des termes moyens d'une proportion géométrique est $= a$; la différence entre la somme des extrêmes et celle des moyens est $= b$, et la somme des carrés des quatre termes $= c$: quelle est la proportion?

R. Soit encore $\pm\sqrt{(8a+2c-b^2)} = A$, alors $\frac{A-b}{2}$ est la somme des moyens et $\frac{A+b}{2}$ la somme des extrêmes, et de-là la proportion cherchée:

$$\tfrac{1}{4}[A+b-\sqrt{(2c-8a+2bA)}] : \tfrac{1}{4}[A-b-\sqrt{(2c-8a-2bA)}]$$
$$:: \tfrac{1}{4}[A-b+\sqrt{(2c-8a-2bA)}] : \tfrac{1}{4}[A+b+\sqrt{(2c-8a+2bA)}].$$

Pour $a=18$, $b=2$, $c=130$ est $2 : 3 :: 6 : 9$

Pour $a=270$, $b=20$, $c=3922$ est $5 : 9 :: 30 : 54$

67) Dans une proportion géométrique le produit des termes extrêmes ou celui des moyens est $= a$, la somme de tous les termes est $= b$, et la différence des sommes des carrés des extrêmes et des moyens $= c$: quelle est la proportion?

R. La somme des deux termes moyens est $\frac{b^2-c}{2b}$, donc la somme des deux extrêmes est $\frac{b^2+c}{2b}$, et de-là la proportion cherchée:

$$\frac{b^2+c-\sqrt{[(b^2+c)^2-16ab^2]}}{4b} : \frac{b^2-c-\sqrt{[(b^2-c)^2-16ab^2]}}{4b}$$
$$:: \frac{b^2-c+\sqrt{[(b^2-c)^2-16ab^2]}}{4b} : \frac{b^2+c+\sqrt{[(b^2+c)^2-16ab^2]}}{4b}$$

68) On cherche trois nombres en proportion continue dont la somme soit $= a$, et la somme des carrés $= b$; quels sont ces nombres?

R. Le terme moyen de la proportion cherchée est $\frac{a^2-b}{2}$, les deux termes extrêmes sont donc:

$$\frac{a^2+b-\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{4a}, \frac{a^2+b+\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{4a}.$$

Quelles sont les limites de b si le problème doit être possible?

69) Dans une proportion continue la somme des trois termes est $= a$, et le reste qu'on obtient en soustrayant le carré du terme moyen, de la somme des carrés des extrêmes est $= b$. Quelle est la proportion?

R. Soit le terme moyen g, on a

$$g = \frac{-a \pm \sqrt{(3a^2-2b)}}{2};$$

de-là on trouve pour les termes extrêmes

$$\tfrac{1}{2}[a-g\pm\sqrt{(a^2-2ag-3g^2)}],\ \tfrac{1}{2}[a-g\mp\sqrt{(a^2-2ag-3g^2)}].$$

70) Dans une progression géométrique de quatre termes la somme de tous les quatre termes est $= a$ et la somme de leurs carrés $= b$. Quelle est cette progression?

R. Soit s la demi-somme et d la demi-différence des deux termes moyens, on aura

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{[b^2+2a^2(a^2-b)]}}{4a}, \text{ et } d = s\sqrt{\frac{a-4s}{a+4s}};$$

de-là se trouvent les deux termes moyens $s-d$, $s+d$, et les deux extrêmes $\frac{(s-d)^2}{s+d}$, $\frac{(s+d)^2}{s-d}$.

71) Dans une progression géométrique de quatre termes, la différence des sommes des deux termes extrêmes et des deux moyens, $= a$, et la différence des sommes des carrés des deux extrêmes et des carrés des deux moyens, $= b$, sont données. Quelle est la progression?

R. Soit s la demi-somme des deux termes moyens et d, leur demi-différence, on aura $s = \frac{b-a^2}{4a}$, $d = \frac{b-a^2}{4\sqrt{(2b-a^2)}}$; de-là on trouve les termes moyens $s-d$, $s+d$ et les extrêmes $\frac{(s-d)^2}{s+d}$, $\frac{(s+d)^2}{s-d}$.

72) Dans une progression géométrique de quatre termes la différence des sommes du second et du quatrième terme, et du premier et du troisième terme, $= a$, la somme des carrés des quatre termes, $= b$, sont données. Quelle est la progression?

R. Soit la demi-différence des deux termes moyens $= d$, leur demi-somme $= s$, on aura $d = \frac{b \pm \sqrt{[b^2+2a^2(a^2-b)]}}{4a}$, $s = d\sqrt{\frac{a+4d}{a-4d}}$. Cela donne, comme dans les deux précédents problèmes, les termes moyens et les extrêmes.

73) Dans une progression géométrique de quatre termes la somme de ces quatre termes $= a$, la différence des sommes des carrés des extrêmes et des carrés des termes moyens $= b$, sont données. Quelle est la progression?

R. La demi-somme des termes moyens est $s =$

$\frac{a^2-b}{4a}$, leur demi-différence $d=\pm s\sqrt{\frac{b}{8as+b}}$, d'où l'on trouve le reste comme dans les trois problèmes précédents.

74) Soient, dans une progression géométrique de quatre termes, la somme des deux extrêmes $=a$, celle des deux moyens $=b$; quelle est cette progression?

R. Soit le quotient de la progression, e, on aura $e=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)\,(a+3b)}}{2b}$, et le premier terme sera $=\frac{a}{e^3+1}=\frac{b}{e^2+e}$.

75) Soient, dans une proportion géométrique la somme des moyens $=a$, celle des extrêmes $=b$, la somme des cubes des quatre termes $=c$; quelle est cette proportion?

R. Soit p le produit des termes extrêmes et des moyens, p sera $=\frac{a^3+b^3-c}{3(a+b)}$, et la proportion sera:

$$\tfrac{1}{2}[b-\sqrt{(b^2-4p)}] : \tfrac{1}{2}[a-\sqrt{(a^2-4p)}]$$
$$:: \tfrac{1}{2}[a+\sqrt{(a^2-4p)}] : \tfrac{1}{2}[b+\sqrt{(b^2-4p)}].$$

76) Soient, dans une proportion géométrique, la somme de tous les termes $=a$, celle de leurs carrés $=b$, celle de leurs cubes $=c$. Quelle est-elle?

R. Le produit des termes moyens ou des extrêmes est $p=\frac{a^3-3ab+2c}{6a}$, la différence des sommes des deux extrêmes et des deux moyens est $d=\pm\sqrt{\frac{a^3-6ab+8c}{3a}}$; donc la somme des deux extrêmes est $=\frac{a+d}{2}$, la somme des deux moyens $=\frac{a-d}{2}$; donc la proportion est:

$$\tfrac{1}{4}[a+d-\sqrt{[(a+d)^2-16p]}]:\tfrac{1}{4}[a-d-\sqrt{[(a-d)^2-16p]}]$$
$$::\tfrac{1}{4}[a-d+\sqrt{[(a-d)^2-16p]}]:\tfrac{1}{4}[a+d+\sqrt{[(a+d)^2-16p]}]$$

77) Soient, dans une proportion géométrique, la différence entre la somme des extrêmes et celle des moyens $=a$, la différence des sommes des carrés des termes extrêmes et des termes moyens $=b$, enfin la différence entre les sommes de leurs cubes $=c$; quelle proportion est-ce?

R. La somme de tous les termes est $=\frac{b}{a}$; de là la somme des extrêmes est $s=\frac{b+a^2}{2a}$, et la somme des moyens $s'=\frac{b-a^2}{2a}$. Le produit des extrêmes ou des moyens est $p=\frac{a^4+3b^2-4ac}{12a^2}$. Quand on aura trouvé s, s' et p, on aura pour la proportion cherchée:

$$\tfrac{1}{2}[s-\sqrt{(s^2-4p)}]:\tfrac{1}{2}[s'-\sqrt{(s'^2-4p)}]$$
$$::\tfrac{1}{2}[s'+\sqrt{(s'^2-4p)}]:\tfrac{1}{2}[s+\sqrt{(s^2-4p)}].$$

78) Soient, dans une proportion géométrique, le produit des deux moyens ou des deux extrêmes $=a$, la somme de tous les termes $=b$, et la somme de leurs cubes $=c$; quelle est la proportion?

R. Soit, pour abréger, $\pm\sqrt{\frac{4c+12ab-b^3}{3b}}=A$, la somme des extrêmes sera $\frac{b+A}{2}$, et $\frac{b-A}{2}$ la somme des moyens. Cela donne pour la proportion cherchée:

$$\tfrac{1}{4}[b+A-\sqrt{[(b+A)^2-16a]}]:\tfrac{1}{4}[b-A-\sqrt{[(b-A)^2-16a]}]$$
$$::\tfrac{1}{4}[b-A+\sqrt{[(b-A)^2-16a]}]:\tfrac{1}{4}[b+A+\sqrt{[(b+A)^2-16a]}].$$

79) Soient, dans une proportion géométrique, la somme des deux extrêmes $=a$, celle des moyens $=b$, et la somme des cubes des quatre termes $=c$; quelle est la proportion?

R. Soient, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{4c-a^3-4b^3+3a^2b}{3(a+b)}}=A,\ \sqrt{\frac{4c-4a^3-b^3+3ab^2}{3(a+b)}}$$

$=B$, on a $\frac{a-A}{2}:\frac{b-B}{2}::\frac{b+B}{2}:\frac{a+A}{2}$ pour la proportion cherchée.

80) Comment résoudra-t-on les deux équations ci-après dans lesquelles x', x'', sont les inconnues?

$$(x'+x'')\ (1+x'x''+x'^2x''+x'x''^2+x'^2x''^2)$$
$$+x'x''=a$$
$$x'x''\ (x'+x'')\ (x'+x''+x'x'')\ (x'+x''+x'x''$$
$$+x'^2x''+x'x''^2)=b.$$

R. Si l'on fait dans ces deux équations les substitutions successives: $x'+x''=y'$, $x'x''=y''$; $y'+y''=z'$; $y'y''=z''$; $z'+z''=w'$, $z'z''=w''$; on trouve à la fin $w'+w''=a$, $w'w''=b$. Donc les quantités cherchées seront données par les quatre équations du second degré suivantes:

$$w^2-aw+b=0,$$
$$z^2-w'z+w''=0,$$
$$y^2-z'y+z''=0,$$
$$x^2-y'x+y''=0.$$

La première donne w', w''; la seconde z' z''; la troisième y', y''; et enfin la quatrième x', x''. De cette manière on obtient successivement:

$$w'=\frac{a\pm\sqrt{(a^2-4b)}}{2}, \quad w''=\frac{a\mp\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$$

$$z'=\frac{w'\pm\sqrt{(w'^2-4w'')}}{2}, \quad z''=\frac{w'\mp\sqrt{(w'^2-4w'')}}{2}$$

$$y'=\frac{z'\pm\sqrt{(z'^2-4z'')}}{2}, \quad y''=\frac{z'\mp\sqrt{(z'^2-4z'')}}{2}$$

$$x'=\frac{y'\pm\sqrt{(y'^2-4y'')}}{2}, \quad x''=\frac{y'\mp\sqrt{(y'^2-4y'')}}{2}$$

et par conséquent pour x', ainsi que pour x'', seize valeurs différentes.

Si l'on avait essayé de résoudre les équations proposées par la voie ordinaire, on serait tombé, en éliminant une des inconnues, dans une équation du seizième degré.

XVII. *Problèmes pour les équations de degrés supérieurs.*

1) Quel est le nombre dont le tiers multiplié par le carré du nombre donne 1944?

R. 18.

2) Quel est le nombre dont la moitié, le tiers et le quart multipliés ensemble, donne, en ajoutant 32 au produit, 4640?

R. 48.

3) On cherche un nombre tel que si l'on divise sa quatrième puissance par le huitième du nombre et

qu'on déduise 167 du quotient, le reste sera 12000? Quel est ce nombre?

R. $11\frac{1}{2}$.

4) Quelqu'un achète des citrons dans un certain nombre de caisses, lesquelles contiennent chacune trois fois autant de citrons qu'il y a de caisses: il paie pour chaque citron deux fois autant de centimes qu'il y a de caisses, et donne en tout 164 fr. 64 c. Combien de citrons a-t-il achetés?

R. 588.

5) Quelques marchands s'associent pour une affaire; chacun y met mille fois autant de francs qu'ils sont d'associés. Ils gagnent 2560 fr., et il se trouve qu'ils ont gagné autant pour cent que la moitié de leur nombre. Combien y avait-il de marchands?

R. 8.

6) Un capitaliste place 10000 fr. à intérêts, et capitalise chaque année les intérêts; au bout de trois ans le capital s'est accru jusqu'à $11576\frac{1}{4}$ fr. Quel était l'intérêt annuel?

R. 5 pour cent.

7) On cherche trois nombres tels que si l'on multiplie le carré du premier par le second nombre, on a 112; et si l'on multiplie le carré du second par le troisième nombre, on a 588; enfin si l'on multiplie le carré du troisième par le premier nombre, on a 576. Quels sont ces nombres?

R. 4, 7, 12.

8) Trouver trois nombres tels que le carré du premier multiplié par le second nombre donne le

nombre a, le carré du second nombre par le troisième, b, et que le carré du troisième par le premier donne c. Quels sont ces nombres?

R. $\sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}$, $\sqrt[9]{\frac{b^4a}{c^2}}$, $\sqrt[9]{\frac{c^4b}{a^2}}$.

9) Mais si l'on cherche quatre nombres tels qu'ils donnent les produits a, b, c, d, en multipliant successivement le carré de chaque nombre par le nombre suivant, et à la fin le carré du quatrième par le premier nombre; quels seront ces quatre nombres?

R. $\sqrt[15]{\frac{a^8c^2}{b^4d}}$, $\sqrt[15]{\frac{b^8d^2}{c^4a}}$, $\sqrt[15]{\frac{c^8a^2}{d^4b}}$, $\sqrt[15]{\frac{d^8b^2}{a^4c}}$.

(Il se trouve des formules pareilles pour cinq, six et plusieurs nombres; on peut encore aussi généraliser davantage ce problème; ce qu'on laisse au lecteur.)

10) Un tonneau plein contient 81 mesures de vin; on en tire une certaine quantité qu'on remplace par une même quantité d'eau; puis l'on tire du tonneau, après ce mélange, le même nombre de mesures que la première fois, qu'on remplace de même. On fait quatre fois cette opération jusqu'à ce qu'enfin dans le tonneau il ne reste que 16 mesures de vin pur, le surplus n'étant que de l'eau. Combien de mesures a-t-on tirées chaque fois?

R. 27.

11) Quels sont les deux nombres dont la différence est 4, et dont le produit multiplié par leur somme donne 1386?

R. 7 et 11.

12) Quelqu'un achète un vase d'argent qui pèse précisément autant de livres que chaque livre, contient d'onces d'argent fin. Il paie pour ce vase 1372 fr., en donnant, pour chaque once d'argent fin qu'il contient, 7 fr. de moins que le vase ne coûterait si chaque livre de son poids se payait un franc. Combien de livres pèse-t-il?

R. 14 livres.

13) Quelques officiers sont en campagne avec un détachement composé d'infanterie et de cavalerie. Chacun d'eux a sous ses ordres en cavaliers, trois fois, et en fantassins, sept fois le nombre des officiers. Chaque cavalier a deux et chaque fantassin 22 cartouches de plus qu'il n'y a d'officiers, et ils ont ensemble 15360 cartouches. Quel est le nombre des officiers?

R. 8.

14) On demande à quelqu'un combien il a dépensé aujourd'hui? Aujourd'hui, répond-il, 4 francs de plus qu'avant-hier, et hier, le double d'avant-hier. Si je multiplie l'un par l'autre les nombres de francs que j'ai dépensés ces trois jours, et que j'ajoute 756 au produit, j'aurai 134 fois le nombre de francs que j'ai dépensés aujourd'hui. Combien est-ce?

R. 6, ou 9 fr.

15) Quelques négociants réunissent, pour une affaire, une certaine somme. Chacun donne 10 fois autant de ducats qu'ils sont d'associés. Ils font en total un bénéfice de 288 ducats; et ce que chacun gagne pour cent sur sa mise surpasse de 8 le nombre de négociants. Combien étaient-ils?

R. 12.

16) Quelques négociants réunissent un capital de 8240 fr. Chacun d'eux y ajoute quarante fois autant de francs qu'ils sont de négociants. Ils gagnent autant pour cent qu'il y a d'associés. Alors on partage le profit, et chacun d'eux reçoit pour sa part dix fois autant de francs qu'il y a de partageants; mais il y a alors un reste de 224 fr. Combien y avait-il de négociants?

R. 7, ou 8, ou 10.

17) Quatre personnes A, B, C, D ont chacune un certain nombre de francs: B a un franc de plus que A, C en a un de plus que B, et D un de plus que C. Si l'on multiplie ces 4 nombres l'un par l'autre le produit est de 1168 plus grand que le cube du nombre de francs que D possède. Combien chacun a-t-il d'écus?

R. A a 5, B 6, C 7, D 8 fr.

18) Quelqu'un a un certain nombre d'ouvriers, savoir trois fois autant que chacun reçoit de décimes de salaire par jour. Ils travaillent ensemble cent jours de moins que leur salaire total d'un jour ne donne de décimes, et reçoivent pour ce temps 6000 fr. Combien d'ouvriers y a-t-il? et combien de jours ont-ils travaillé?

R. 30 ouvriers et 200 jours.

19) On a deux nombres dont la somme est 63. Si l'on divise le plus grand par le plus petit et qu'on multiplie le quotient par le plus grand, qu'ensuite on ajoute $20\frac{1}{4}$ au produit, on aura un cube parfait dont

la racine sera le septième, moins un, du plus grand nombre. Quels sont ces deux nombres?

R. 35 et 28.

20) Un bassin se remplit par quatre tuyaux en $115\frac{1}{5}$ minutes. Mais s'il fallait le remplir par chaque tuyau séparément, le second prendrait quatre, le troisième 8 et le quatrième 12 heures de plus que le premier. En combien de temps celui-ci remplirait-il le bassin?

R. En 4 heures.

21) On cherche trois nombres par les données suivantes: la somme du premier et du second est $= a$, la somme des carrés du second et du troisième est $= b$, et celle des cubes du premier et du troisième $= c$. Quelle est l'équation qui détermine ces nombres?

R. Soit x le premier des trois nombres cherchés, l'équation sera

$$[b-(a-x)^2]^3=(c-x^3)^2,$$

qui est à résoudre. Quand on aura trouvé x, les deux autres nombres se trouveront facilement. On peut regarder un problème comme résolu, dès que, comme ici, on l'a réduit à la résolution de l'équation la plus simple que ce problème peut admettre, quoique nous ne soyons pas toujours en état de résoudre exactement cette équation même.

22) La somme de deux nombres est $= a$; celle de leurs sixièmes puissances $= b$; comment trouver ces nombres?

R. Le produit p des deux nombres est donné par l'équation $2p^3-9a^2p^2+6a^4p-a^6+b = 0$. (Qu'on se rappelle dans ce problème et dans les suivants l'observation page 222):

23) La somme de deux nombres est $= a$; celle de leurs septièmes puissances $= b$; comment trouver ces deux nombres?

R. Le produit p des deux nombres est donné par l'équation $7ap^3 - 14a^3p^2 + 7a^5p - a^7 + b = 0$.

En général on peut toujours réduire les deux équations $x + y = a$, $x^{2n} + y^{2n} = b$ ou $x^{2n+1} + y^{2n+1} = b$, à une équation, du n^{me} degré en p, dont la loi se peut aussi exprimer généralement.

24) La différence de deux nombres, prise m fois et ajoutée à leur produit pris n fois donne a: la différence des mêmes nombres, multipliée par la somme des carrés des deux quantités, donne b; quelles sont ces quantités?

R. Les équations $ny^3 - 2my^2 + 2ay - nb = 0$, $nz = a - my$ donnent la différence $= y$ et le produit $= z$ des deux quantités. Quand on aura trouvé, par ces équations, les valeurs de y et z, on aura aussi les quantités mêmes par la résolution d'une équation du second degré. Ces deux quantités sont proprement données par des équations du sixième degré; mais ces équations sont, comme on voit, réductibles en d'autres du troisième et du second degré.

25) La somme de trois nombres est $= a$; la somme des produits de ces nombres multipliés deux à deux $= b$, et le produit de tous les trois $= c$. Quels sont ces nombres?

R. Ils sont les trois racines de l'équation $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

26) Soient données la somme de trois nombres $= a$, la somme des produits de ces nombres multipliés deux à deux $= b$ et la somme des six produits de chaque nombre par le carré de l'un des deux autres, $= c$. Trouver ces nombres.

R. Le produit des trois nombres cherchés est $= \frac{ab - c}{3}$, et par conséquent $x^3 - ax^2 + bx - \frac{ab - c}{3} = 0$ est l'équation qui donne les trois nombres en même temps.

27) Soit la somme de trois nombres $= a$; la somme de leurs carrés $= b$; celle de leurs cubes $= c$; comment trouver les trois nombres?

R. La somme des produits, deux à deux, est $= \frac{a^2 - b}{2}$, et le produit de tous les trois $= \frac{2c + a^3 - 3ab}{6}$. Donc l'équation

$$x^3 - ax^2 + \frac{a^2 - b}{2}x - \frac{2c + a^3 - 3ab}{6} = 0$$ donne tous les trois nombres.

28) La somme des carrés de deux nombres est $= a$; la somme de leurs cubes $= b$: quels sont-ils?

R. Soit s la somme des deux nombres, elle sera donnée par l'équation $s^3 - 3as + 2b = 0$. Quand on aura trouvé s, les nombres mêmes se trouveront facilement: ils sont donnés par l'équation $x^2 - sx + \frac{s^2 - a}{2} = 0$.

29) La somme des produits de trois nombres multipliés deux à deux, est $= a$; celle des carrés $= b$;

le produit des trois nombres $= c$. Comment trouvera-t-on ces nombres?

R. La somme des trois nombres est $= \pm\sqrt{(2a+b)}$; donc l'équation qui donne les trois nombres sera:

$$x^3 \mp x^2\sqrt{(2a+b)} + ax - c = 0.$$

30) La somme des produits de trois nombres multipliés deux à deux, est $= a$; celle des carrés $= b$; celle des cubes $= c$. Comment trouvera-t-on ces nombres?

R. La somme des trois nombres est $= \pm\sqrt{(2a+b)}$, le produit de tous les trois $= \frac{1}{3}[c \pm (a-b)\sqrt{(2a+b)}]$. Donc l'équation

$$x^3 \mp x^2\sqrt{(2a+b)} + ax - \tfrac{1}{3}[c \pm (a-b)\sqrt{(2a+b)}] = 0,$$

donnera tous les nombres en même temps.

31) La somme des produits de trois nombres multipliés deux à deux, est $= a$; la somme des carrés $= b$; la somme des six produits de chaque nombre par le carré de l'un des deux autres $= c$. Comment trouvera-t-on ces nombres?

R. La somme des trois nombres est $= \pm\sqrt{(2a+b)}$, leur produit $= \frac{1}{3}[\pm a\sqrt{(2a+b)} - c]$; donc ils sont donnés par l'équation

$$x^3 \mp x^2\sqrt{(2a+b)} + ax - \tfrac{1}{3}[\pm a\sqrt{(2a+b)} - c] = 0.$$

32) On cherche trois nombres en proportion continue dont la somme soit $= a$ et la somme des cubes $= b$. Comment les trouvera-t-on?

R. Soit y le terme moyen de la proportion: il sera donné par l'équation $3y^3 - 3a^2y + a^3 - b = 0$. Soit w une racine de cette équation, les racines de l'équation.

$$x^2-(a-w)x-\frac{b-w^3}{3(a-w)}+\frac{(a-w)^2}{3}=0$$

seront les deux termes extrêmes.

Si $a=21$, $b=1971$, on a $y^3-441y+2430=0$. Les trois racines de cette équation sont 6, $-3+\sqrt{414}$, $-3-\sqrt{414}$. Si $w=6$, on a l'équation $x^2-15x+36=0$, dont les racines 3 et 12 donnent les deux termes extrêmes. La proportion continue cherchée sera donc 3: 6: 12.

33) Dans une progression géométrique de quatre termes on connait la différence des deux extrêmes $=a$, et la somme des deux moyens $=b$. Quelle progression est-ce?

R. Soit y le quotient de la progression, il se trouve par l'équation $by^3-ay^2-ay-b=0$. Quand on l'aura trouvé, le premier terme sera $=\frac{b}{y^2+y}$ $=\frac{a}{y^3-1}$.

34) Mais quelle sera cette progression si la somme des deux termes moyens est $=a$, et la somme des carrés des deux extrêmes $=b$?

R. Soit la différence des deux moyens $=d$, en posant $d^2=y$, l'équation $y^3+(15a^2-2b)y^2+(15a^4+4a^2b)y+a^4(a^2-2b)=0$ donne y. Ayant trouvé y, et par suite d, le quotient de la progression sera $=\frac{a+d}{a-d}$, et le premier terme $=\frac{(a-d)^2}{2(a+d)}$.

....

Si quelques relations entre les racines d'une équation à laquelle se réduit la solution d'un problème sont connues, soit par la nature du problème, soit par quelque autre moyen, cette équation pourra toujours, avec peu d'exceptions, se réduire en une autre équation d'un degré inférieur. Le problème suivant éclaircira cela en quelque sorte.

....

35) Soient données $2m$ quantités par l'équation $x^{2m}+ax^{2m-1}+bx^{2m-2}+cx^{2m-3}+\ldots\ldots+kx+l=0$; mais on sait d'avance que les sommes de ces quantités, prises deux à deux, sont toutes égales. Comment cette équation peut-elle être réduite en d'autres de degrés inférieurs?

R. La somme d'une couple de racines de cette équation est $=-\frac{a}{m}$. En l'ordonnant suivant les puissances de $x^2+\frac{ax}{m}$, et en posant $x^2+\frac{ax}{m}=y$, on aura une équation en y du degré m. On prouvera cela par la décomposition des équations en facteurs simples; ce qui n'a pas de difficulté, et qu'on laisse au lecteur.

De cette sorte d'équations est par exemple $x^4-10x^3+18x^2+35x-12=0$. Posons $x^2-5x=y$, et transformons l'équation donnée en $(x^2-5x)^2-7(x^2-5x)-12=0$. Les deux équations $y^2-7y-12=0$, $x^2-5x-y=0$, donneront les quatre valeurs cherchées de x, savoir:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(39+2\sqrt{97})}}{2},\quad x=\frac{5\pm\sqrt{(39-2\sqrt{97})}}{2}.$$

Supposons qu'on sache d'avance que l'équation $x^6-12x^5+42x^4-16x^3-79x^2-68x-18=0$, a trois couples de racines de sommes égales; soit $x^2-4x=y$, et donnons à cette équation la forme $(x^2-4x)^3-6(x^2-4x)^2+17(x^2-4x)-18=0$, alors les deux équations $y^3-6y^2+17y-18=0$, $x^2-4x=y$, donneront les six racines cherchées. Les trois valeurs de y sont 2, $2+\sqrt{-5}$, $2-\sqrt{-5}$; donc x a les six valeurs suivantes:

$$2\pm\sqrt{6},\ 2\pm\sqrt{(6+\sqrt{-5})},\ 2\pm\sqrt{(6-\sqrt{-5})}.$$

Il sera d'ailleurs toujours facile de donner à l'équation la forme désirée, à l'aide des coefficients indéterminés.

XVIII. *Problèmes indéterminés.*

Si les conditions d'un problème ne donnent pas autant d'équations qu'il y a d'inconnues, le problème est indéterminé.

Soient données m équations de la forme $ax+a'x'+a''x''+a'''x'''+\text{etc.}=k$, entre les M inconnues $x\ x'\ x''\ x'''$, etc., et soit $M>m$; on aura, en éliminant $m-1$ de ces inconnues, une équation de la même forme, mais qui ne contient plus que $M-m+1$ inconnues. Or, pour résoudre une telle équation, on n'a qu'à exprimer une de ces quantités inconnues par toutes les autres, et à donner ensuite à ces dernières des valeurs numériques arbitraires.

Si l'on avait par ex. l'équation $3x+5x'-7x''=17$, on trouverait $x''=\frac{3x+5x'-17}{7}$. Ici on pourrait prendre x et x' à volonté, ce qui donnerait x''.

Mais quelquefois il est donné encore d'autres conditions qui ne peuvent guère s'exprimer par équations; ce qui rend la chose beaucoup plus difficile. Par ex.: si l'on demande que x, x', x'', etc., soient tous des nombres entiers, et que de plus ils soient tous positifs etc. On peut dans ce cas toujours supposer que les coefficients k, a, a', a'', a''', etc., sont tous des nombres entiers; car, dans le cas contraire, on peut faire disparaître les fractions, en multipliant les équations par un facteur.

L'équation $ax + a'x' = 1$, sous condition que x et x' soient des nombres entiers, peut toujours être résolue, soit d'après la méthode enseignée dans la plupart des livres élémentaires, soit par les fractions continues. Ce dernier procédé se trouve dans nos articles VI. VII. page 99, et est bien plus facile que l'autre. Si l'on a trouvé, d'une manière quelconque, $x = p$, $x' = q$, de sorte que $ap + a'q = 1$, on peut mettre en général $x = p + a'n$, $x' = q - an$; puis on peut prendre pour n un nombre entier positif ou négatif quelconque.

L'équation $ax + a'x' = k$ donne alors $x = kp + a'n$, $x' = kq - an$. Donc l'équation $ax + a'x' + a''x'' + a'''x''' +$ etc. $= k$, donne $x = (k - a''x'' - a'''x''' -$ etc.$)\,p + a'n$, $x' = (k - a''x'' - a'''x''' -$ etc.$)\,q - an$, où l'on peut poser pour n, x'', x''', x'''', etc., tous les nombres entiers, positifs ou négatifs.

De cette manière on peut réduire les m équations ci-dessus avec les M quantités inconnues, à l'équation $ax + a'x' = 1$; et celle-ci est toujours résoluble, à moins que a et a' n'aient un diviseur commun. Pour que l'équation $ax + a'x' + a''x'' +$ etc. $= k$

soit résoluble il faut qu'il se trouve parmi les coefficients a, a', a'', a''', etc. au moins deux qui n'ont pas un diviseur commun.

....

1) Quels nombres, divisés par 3, laissent 1 de reste, et 2, si on les divise par 5?

R. 7, 22, 37, 52, 67, 82, etc. En général tous les nombres de la forme $15n+7$.

2) Quels nombres laissent 5 de reste, si on les divise par 8, et 4 si on les divise par 11?

R. 37, 125, 213, 301, 389 etc. en général tous ceux de la forme $88n+37$.

3) Quels sont les nombres qui, se divisant exactement par 9, donnent un reste de 8 si on les divise par 14?

R. 36, 162, 288, 414, 540 etc. en général tous ceux de la forme $126n+36$.

4) Une paysanne porte au marché un nombre d'oeufs, entre 100 et 200; elle est incertaine si elle doit les vendre par douzaine ou par quinzaine, parce que, dans le premier cas il lui en restera 10, mais dans le second seulement 4. Combien a-t-elle d'oeufs?

R. 154.

5) Un jeune garçon a des noix, entre 100 et 400; il veut les partager en tas égaux. S'il forme ces tas de 13, il aura un reste de 9; s'il en met 17 dans chaque tas, il lui en restera 14. Combien y a-t-il de noix?

R. 269.

Ces deux derniers problèmes sont-ils à proprement parler du nombre des indéterminés?

6) Quels sont les nombres qui, divisés par 3, 7 et 10, laissent respectivement les restes 2, 3 et 9?

R. 59, 269, 479, 689, 899, etc., et généralement tous les nombres de la forme $210n+59$.

7) Quels nombres, divisés par 6, 12, et 15, laissent respectivement les restes 1, 1, 10?

R. 25, 85, 145, 205, 265, etc., en général tous les nombres de la forme $60n+25$.

8) Quels sont les nombres qui, divisés par 5, 6, 7, 8, donnent pour reste 3, 1, 0, 5?

R. 133, 973, 1813, 2653, 3493, etc., et en général tous les nombres de la forme $840n+133$.

9) Quels sont les nombres qui, divisés par 4, 6, 9, 15, laissent, pour les trois premiers, le reste 3, et pour le quatrième diviseur, le reste 12?

R. 147, 327, 507, 687, etc., en général tous ceux de la forme $180n+147$.

10) Un colonel dit: mon régiment n'a pas 2000 hommes; je puis le faire marcher par rangs de 5, 6 et 7 hommes de front, sans qu'un seul reste; mais si je voulais le mettre par rangs de 11 ou de 13, j'aurais, dans le premier cas, 9 hommes de trop, et dans le second, il m'en manquerait 8. De combien d'hommes est le régiment?

R. de 1890.

11) Un capitaine veut former en colonne sa compagnie qui a entre 100 et 200 hommes. S'il la dis-

pose par rangs de 2, 4, 8 ou 10 hommes, il lui en reste toujours un de trop; mais s'il la fait marcher sur 6 ou sur 12 hommes, il en aura chaque fois 5 de reste. Combien d'hommes y a-t-il dans la compagnie?

R. 161.

12) Un joueur compte deux fois de suite les ducats qu'il a gagnés; la première fois trois à trois, ce qui lui laisse deux ducats de reste; et la seconde fois 5 à 5, ce qui lui en laisse un. Alors il se remet à jouer, perd 6 ducats, et il compte ce qu'il a par 7, puis par 11, et il lui en reste 3 chaque fois. Combien de ducats avait-il gagnés d'abord?

R. 86, ou 1241, ou 2396 etc.

13) Trouver deux nombres tels que le premier étant multiplié par 17 et le second par 26, le produit du premier soit de 7 plus grand que celui du second. Quels sont ces nombres?

R. 5 et 3, ou 31 et 20, ou 57 et 37 etc.

14) On fond un certain nombre de canons de deux différents calibres. Ceux du premier pèsent chacun 16 quintaux, et ceux du second 25, et cependant ces derniers ont consommé un quintal de métal de moins que les premiers. Combien y a-t-il eu de canons fondus de chaque calibre?

R. Du premier calibre 11, et 7 du second, ou encore 36 du premier et 23 du second et ainsi de suite.

15) Un homme a échangé à Vienne des pièces de 7 creutzers contre des pièces de 17, et il lui est resté deux florins ou 120 creutzers (le florin se di-

vise en 60 creutzers). Combien a-t-il échangé de pièces de 7 creutzers contre celles de 17?

R. 22 contre 2, ou 39 contre 9, ou 56 contre 16 etc.

16) On cherche trois nombres tels que si l'on multiplie le premier par 7, le second par 9, et le troisième par 11, le premier produit sera de 1 moindre que le second et de 2 plus grand que le troisième. Quels sont les nombres cherchés?

R. 5, 4, 3; ou 104, 81, 66; ou 203, 158, 129, etc.

17) Une société d'hommes, de femmes et d'enfants font une partie de plaisir. Chaque homme dépense 19 décimes, chaque femme 10, et chaque enfant 8. Les hommes ensemble ont dépensé 7 décimes de plus que les femmes, et 15 de plus que les enfants. Quel était le nombre des uns et des autres?

R. 13 hommes, 24 femmes, 29 enfants, ou 53 hommes, 100 femmes et 124 enfants etc.

18) Partager 142 en deux nombres, dont l'un puisse se diviser exactement par 9, l'autre par 14. Quels seront-ils?

R. 72 et 70.

19) Partager 1591 en deux parties divisibles, l'une par 23, l'autre par 34?

R. 1081 et 510, ou 299 et 1292.

20) Quelles sont les deux parties du nombre 4890, dont la première, étant divisée par 37, laisse 3 de reste, et la seconde, étant divisée par 54, laisse 6?

R. 780 et 4110, ou 2778 et 2112, ou 4776 et 114.

21) Une société d'hommes et de femmes a dé-

pensé ensemble 87 fr. 60 c.; chaque homme paie 1 fr. 90 c. et chaque femme 1 fr. 30 c. Combien y avait-il d'hommes et de femmes?

R. 3 et 63, ou 16 et 44, ou 29 et 25.

22) Un cultivateur achète des chevaux et des boeufs pour 1770 écus, à raison de 31 écus par cheval, et de 21 par boeuf. Combien a-t-il acheté des uns et des autres?

R. 9 et 71, ou 30 et 40, ou 51 et 9.

23) Quelqu'un achète pour 400 écus 124 cochons, chèvres et brebis, à $4\frac{1}{2}$ écus par cochon, $3\frac{1}{6}$ par chèvre, et $1\frac{1}{4}$ par brebis. Combien en a-t-il achetés de chaque espèce?

R. 17, 99, 8; ou 40, 60, 24; ou 63, 21, 40.

24) Comment partager 30 en trois parties telles que si l'on multiplie la première par 7, la seconde par 19, et la troisième par 38, la somme des trois produits soit 745?

R. 6, 11, 13.

25) Partager 100 en trois parties telles que si l'on multiplie la première par 17, la seconde par 11, et la troisième par 3, la somme des produits soit 880. Quelles seront-elles?

R. 2, 69, 29; ou 6, 62, 32; ou 10, 55, 35 et ainsi de suite; il y a en tout 10 solutions différentes.

26) On cherche trois nombres entiers tels que si l'on multiplie le premier par 5, le second par 13, et le troisième par 18, la somme des produits soit 997. Mais que si l'on multiplie le premier par 11, le se-

cond par 20 et le troisième par 37, la somme des produits soit 1866. Quels sont ces nombres?

R. 16, 29, 30.

27) Une paysanne a vendu 76 pièces de volailles, savoir des oies à 2 fr., des poulets à 1 fr. 5 c. des canards à 70 c. et des pigeons à 40 c. la pièce; elle a retiré en tout 70 fr. 70 c. Combien de chaque espèce a-t-elle vendu?

R. 2 oies, 46 poulets, 24 canards et 4 pigeons; ou aussi 10 oies, 30 poulets, 16 canards et 20 pigeons etc.

28) Trente personnes, hommes, femmes et enfants, font ensemble une dépense de 139 fr. 20 c. On paie comme suit; chaque homme 8 fr. 40 c.; chaque femme 3 fr. 30 c., et chaque enfant 60 c. Combien y a-t-il des uns et des autres?

R. 10 hommes, 16 femmes et 4 enfants.

29) Trouver deux nombres dont la somme et le produit soient égaux.

R. Soient x et y les deux nombres cherchés, x sera arbitraire et y sera $= \frac{x}{x-1}$.

30) On cherche deux nombres dont la somme soit à leur produit comme m est à n.

R. Soient x et y les nombres cherchés, x sera arbitraire et $y = \frac{nx}{mx-n}$.

31) Quels sont les deux nombres entiers dont la somme et le produit ensemble montent à 139?

R. 1 et 69, 3 et 34, 4 et 27, 6 et 19, 9 et 13.

32) Quels sont les deux nombres entiers dont le produit est de 100 plus grand que leur double différence?

R. 10 et 10, 14 et 8, 22 et 6, 30 et 5, 46 et 4, 94 et 3.

33) Comment décomposer la fraction $\frac{230}{77}$ en deux autres dont les dénominateurs soient 7 et 11?

R. En $\frac{5}{7}$ et $\frac{25}{11}$, ou en $\frac{12}{7}$ et $\frac{14}{11}$, ou en $\frac{19}{7}$ et $\frac{3}{11}$.

34) On cherche deux nombres dont les carrés fassent ensemble un autre carré. Quels sont-ils?

R. Soient p et q deux nombres quelconques, l'un des nombres cherchés sera $= p^2 - q^2$ et l'autre $= 2pq$, par ex. 3 et 4, 6 et 8, 5 et 12, etc.

35) Soient a et c deux nombres rationnels; comment trouver les valeurs rationnelles de x et y pour lesquelles $a^2x^2 + cy^2$ soit un carré parfait?

R. $x = cn^2 - m^2$, $y = 2amn$; car alors on aura $a^2(cn^2 - m^2)^2 + c(2amn)^2 = a^2(cn^2 + m^2)^2$. Ici on peut prendre des nombres rationnels quelconques pour m et n, a et c étant donnés, et par là on aura les valeurs de x et y.

36) Quelle valeur peut avoir la quantité x si la formule $a^2x^2 + c$ doit être un carré parfait?

R. $x = \frac{cn^2 - m^2}{2amn}$; car $a^2\left(\frac{cn^2 - m^2}{2amn}\right)^2 + c = \left(\frac{cn^2 + m^2}{2mn}\right)^2$.

37) Soient a, b, c, trois nombres rationnels; quels nombres rationnels pourront être x et y si la formule $a^2x^2 + bxy + cy^2$ doit être un carré parfait?

R. $x = m^2 - cn^2$, $y = bn^2 - 2amn$; car alors on aura $a^2(m^2 - cn^2)^2 + b(m^2 - cn^2)(bn^2 - 2amn) + c(bn^2 - 2amn)^2 = (am^2 - bmn + acn^2)^2$.

38) Trouver x sous condition que $a^2x^2 + bx + c$ soit un carré parfait.

R. $x = \frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}$; car on a $a^2\left(\frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}\right)^2 + b\left(\frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}\right) + c = \left(\frac{am^2 - bmn + acn^2}{bn^2 - 2amn}\right)^2$.

39) Quelle valeur aura x, si la formule $ax^2 + bx + c^2$ doit être un carré parfait?

R. $x = \frac{bn^2 - 2cmn}{m^2 - an^2}$; car on a $a\left(\frac{bn^2 - 2cmn}{m^2 - an^2}\right)^2 + b\left(\frac{bn^2 - 2cmn}{m^2 - an^2}\right) + c^2 = \left(\frac{cm^2 - bmn + acn^2}{m^2 - an^2}\right)^2$.

40) Soit $x = w$ une des valeurs de x pour laquelle la formule $ax^2 + bx + c$ est un carré parfait, comment trouver les autres valeurs de x?

R. Il faut substituer $w + py$ au lieu de x, dans la formule donnée, et par là elle se changera en une autre de la forme $fy^2 + gy + h^2$: cette formule est un carré parfait si $y = \frac{gn^2 - 2hmn}{m^2 - fn^2}$. Donc, la formule donnée elle-même est un carré parfait, si $x = w + \frac{p(gn^2 - 2hmn)}{m^2 - fn^2}$.

41) Supposons que la formule $ax^2 + bxy + cy^2$ puisse être décomposée en deux facteurs rationnels $mx + ny$, $m'x + n'y$, et que, par conséquent, $b^2 - 4ac$ soit un carré parfait; comment trouver les valeurs de x, y qui rendent $ax^2 + bxy + cy^2$ égal à un carré parfait?

R. $x = np^2 - n'q^2$, $y = m'q^2 - mp^2$; car on aura $mx + ny = (m'n - mn')q^2$ et $m'x + n'y = (m'n - mn')p^2$, donc $ax^2 + bxy + cy^2 = (mx + ny)(m'x + n'y) = (m'n - mn')^2 p^2 q^2$.

42) Comment résoudre l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$, si A n'est pas un carré parfait, mais tout autre nombre positif quelconque, et que x et y doivent être des nombres entiers?

R. La solution de cet important problème est contenue dans les propositions 3 et 4 page 105. Les valeurs de x et y ne sont autre chose que le numérateur et le dénominateur de la valeur approximative donnée à l'endroit cité. Par ex.: pour $A = 106$, on a $x = 4005$, $y = 389$; pour $A = 124$, on a $x = 4620799$, $y = 414960$; pour $A = 133$, on a $x = 2588599$, $y = 224460$. Ces nombres énoncés sont les moindres qu'on puisse trouver. Ce procédé a d'abord été enseigné par Lagrange; il est toujours sûr et d'une exécution bien plus facile que celui de Pell qu'on trouve dans Euler.

43) Soient $x = m$, $y = n$, des valeurs connues de x et y, en nombres entiers qui satisfont à l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$, où A désigne un nombre entier; comment trouver d'autres valeurs de x et y en nombres entiers qui satisfassent également à cette équation?

R. $$x = \frac{(m + n\sqrt{A})^p + (m - n\sqrt{A})^p}{2}$$

$$y = \frac{(m + n\sqrt{A})^p - (m - n\sqrt{A})^p}{2\sqrt{A}}$$

L'irrationnalité disparaît en développant.

Si $p = 0$ on a $x = 1$, $y = 0$

Si $p=1$, on a $x=m$, $y=n$, qui sont les valeurs déjà connues.

Si $p=2$, on a $x=m^2+An^2$, $y=2mn$.

Si $p=3$, on a $x=m^3+3Amn^2$, $y=3m^2n+An^3$.

Si $p=4$, on a $x=m^4+6Am^2n^2+A^2n^4$, $y=4m^3n+4Amn^3$.

et ainsi de suite.

Comment réduire le problème; savoir de transformer, si cela est possible, la formule $fx^2+gxy+hy^2$ en un carré parfait, à la résolution de l'équation $x^2-Ay^2=1$ en nombres entiers?

44) On cherche trois nombres tels que leur somme totale, ainsi que leurs sommes deux à deux, soient des carrés parfaits. Quels sont-ils?

R. 41, 80, 320; ou 22, 42, $68\frac{1}{4}$, et une infinité d'autres.

45) Quels sont les nombres dont la différence soit égale à celle de leurs cubes?

R. $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{7}$; $\frac{8}{13}$ et $\frac{7}{13}$; $\frac{16}{19}$ et $\frac{5}{19}$, et une infinité d'autres.

46) Quels restes peut laisser un nombre carré, quand on le divise par 2, 3, 4, 5, 6, etc.?

R. Pour les diviseurs 2, 3 et 4, on a les restes 0, 1; par 5 on a les restes 0, 1, 4; par 6 on a les restes 0, 1, 3, 4; par 7 on a les restes 0, 1, 2, 4; par 8 on a les restes 0, 1, 4; par 9 on a les restes 0, 1, 4, 7; par 10 on a les restes 0, 1, 4, 5, 6, 9, etc.

La formule $3x^n+2$, peut-elle jamais être un carré parfait, x étant entier? La formule $14x^n+3$, peut-elle bien aussi se réduire en carré parfait?

47) Quels restes peut donner un nombre cube en le divisant par 7, 8, 9?

R. Pour 7 on a les restes 0, 1, 6; pour 8 on a les restes 0, 1, 3, 5, 7; pour 9 on a les restes 0, 1, 8.

Les formules $8x^n+6$, $18x^n+7$ peuvent-elles jamais être des cubes parfaits, x étant entier?

48) Trouver deux nombres tels que la somme de leurs carrés soit un produit de deux facteurs dont chacun soit lui-même une somme de deux carrés.

R. L'équation identique

$$(mm'+nn')^2+(mn'-nm')^2=(m^2+n^2)(m'^2+n'^2)$$

contient la solution de ce problème; on y peut mettre pour m, n, m', n', tous les nombres entiers et fractionnaires quelconques.

49) Comment trouver quatre carrés tels que leur somme soit un produit de deux facteurs dont l'un soit une somme de trois carrés, et l'autre une somme de deux carrés?

R. L'équation identique

$$(mm'+nn')^2+(mn'-nm')^2+(pm')^2+(pn')^2= (m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2)$$

satisfait à cette condition.

50) Comment trouver quatre carrés tels que leur somme puisse être décomposée en deux facteurs, dont chacun soit une somme de trois carrés?

R. L'équation identique

$$(mm'+nn'+pp')^2+(mn'-nm')^2+(mp'-pm')^2 +(np'-pn')^2=(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)$$

contient la réponse à cette question.

51) Comment trouver quatre carrés dont la somme soit composée de deux facteurs desquels chacun soit lui-même une somme de quatre carrés?

R. L'équation identique

$$(mm'+nn'+pp'+qq')^2+(mn'-nm'+pq'-qp')^2$$
$$+(mp'-pm'+qn'-nq')^2+(np'-pn'+mq'-qm')^2$$
$$=(m^2+n^2+p^2+q^2)(m'^2+n'^2+p'^2+q'^2)$$

résout la question.

52) Quelles valeurs peuvent avoir x, y, si la formule x^2+Ay^2 doit être un produit de deux facteurs de la même forme?

R. $x=mm'+Ann'$, $y=mn'-nm'$; car on a $(mm'+Ann')^2+A(mn'-nm')^2=(m^2+An^2)(m'^2+An'^2)$.

53) Soient a, a', a'', etc., les restes des divisions des nombres A, A', A'', etc., par k, ces nombres pourront être exprimés par $nk+a$, $n'k+a'$, $n''k+a''$, etc. Le reste de la division du produit $AA'A''$ etc., par k est donc le même que celui du produit $a\,a'\,a''$ etc. Comment trouver promptement par là le reste de la division d'une puissance très-élevée par un nombre donné?

R. Il faut décomposer la puissance donnée en des puissances inférieures, et chercher les restes de celles-ci: le produit de ces restes, divisé par k, donne alors le reste demandé. On peut commencer par la seconde puissance, et passer peu-à-peu à la quatrième, huitième etc. Par ex. le reste de 543^{113} divisé par 257, ou, ce qui est la même chose, le reste de 29^{113} est $=57$.

....

„Soient p un nombre premier, et A un autre

„non divisible par p; la puissance A^{p-1}, divi-
„sée par p laissera toujours 1, pour reste."

Comment ce théorème très-important dans la théorie des nombres se démontre-t-il?

. . . .

54) Soit p un nombre premier, et m un nombre très-grand, comment trouver à l'aide du théorème précédent encore plus brièvement que ci-dessus, le reste d'une puissance A^m?

R. Si m divisé par $p-1$ donne le reste r, le reste de A^m sera le même que celui de A^r, et $r<p-1$.

55) Un journal parlait dernièrement de l'énorme grandeur du nombre exprimé par la double puissance $9^{9^9}=9^{387420489}$. On faisait divers réflexions sur ce sujet, et en effet ce nombre surpasse tout ce que peut concevoir l'imagination la plus hardie; car, d'après mon calcul, il ne faut pas moins de 369693100 chiffres pour écrire ce nombre immense, ce qu'on trouve aisément par les logarithmes. Or quel reste peut enfin laisser ce nombre immense, en le divisant par les nombres premiers 11, 13, 17, 19?

R. La division par 11 laisse le reste 5, par 13 laisse le reste 3, par 17 laisse le reste 9, par 19 laisse le reste 16.

56) Quel reste laisse la puissance $A^{\frac{p-1}{2}}$ divisée par p; en supposant que p soit un nombre premier, et que A ne soit pas divisible par p?

R. Ou $+1$, ou -1; donc 1, ou $p-1$.

57) Soient p un nombre premier, et $a, b, c, d \cdots\cdots t, u$, des nombres entiers positifs ou négatifs. Combien y aura-t-il tout au plus de valeurs entières de x entre 0 et p, pour lesquelles l'expression $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots\cdots + tx + u$ soit divisible par p?

R. Tout au plus m, à moins que tous les coefficients $a, b, c, \cdots\cdots u$, ne soient divisibles par p, en quel cas une valeur quelconque satisfait à la condition supposée. Pourquoi?

Comment peut-on au moyen des valeurs de x entre 0 et p, lesquelles rendent cette formule divisible par p, exprimer, par un nombre limité de formules, toutes les autres valeurs qui ont cette même propriété?

58) Si pour x, y on ne peut mettre que des nombres entiers rationnels, la formule $ax^2 + bxy + cy^2$, dans laquelle a, b, c, sont des nombres donnés, ne peut pas exprimer un nombre quelconque, mais seulement une certaine classe de nombres entiers convenables à cette formule. Comment transformer une telle formule en une autre $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$, de manière que les deux formules expriment les mêmes nombres?

R. Prenons deux nombres entiers m, n, quelconques, qui n'aient point de diviseur commun. Cherchons en ensuite deux autres, m', n', qui résolvent l'équation indéterminée $mn' - nm' = \pm 1$, et dont il y a, comme on sait, une infinité; puis posons $x = mx' + ny'$, $y = m'x' + n'y'$, et substituons ces valeurs dans la formule $ax^2 + bxy + cy^2$, celle-ci se transformera en une autre $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$ qui aura la propriété demandée.

Il est remarquable qu'on aura toujours $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c'$. Pourquoi? On donne le nom de **déterminante** à la quantité $b^2 - 4ac$, parce que c'est d'elle que dépend la nature de la formule. C'est elle aussi qui, par son signe fait voir si la formule $ax^2 + bxy + cy^2$ peut se décomposer en deux facteurs réels $kx + ly$, $k'x + l'y$, ou non.

. . . .

Les problèmes indéterminés appartiennent à cette belle et intéressante partie de l'arithmétique pure, où les nombres sont considérés non comme quantités absolues, mais relativement aux propriétés qui les distinguent les unes des autres. Pour approfondir cet objet, il faut étudier les derniers chapitres de l'**Algèbre d'Euler**, la **Théorie des nombres de Legendre** et les **Disquisitiones arithmeticae de Gauss**.

Dans la lecture de ces deux derniers ouvrages, j'appellerai surtout l'attention sur le théorème connu sous le nom de **théorème de la réciprocité**, dont Mr. Gauss, outre la démonstration qui se trouve dans son ouvrage, a donné encore une autre démonstration plus simple, que Mr. Legendre a admise dans sa seconde édition. J'ignore si elle se trouve encore ailleurs. La voici.

Si p et q sont des nombres premiers quelconques, le reste de la division de $q^{\frac{p-1}{2}}$ par p sera le même que celui de $p^{\frac{q-1}{2}}$ par q. Savoir, tous les deux $+1$, ou -1, si les nombres premiers p, q, ne sont pas tous les deux de la forme $4n+3$. Mais s'ils sont de cette forme, les restes sont des signes opposés, savoir, l'un $+1$, et l'autre -1, et réciproquement.

Le 58e problème est la base d'une théorie fort étendue des facteurs trinomes, sur lesquels les deux ouvrages que nous venons de citer, offrent beaucoup d'observations remarquables et nouvelles.

XIX. *Problèmes sur les progressions et les nombres figurés.*

1) Un maître engage un domestique et lui promet 150 fr. de gages pour la première année, et pour chaque année suivante toujours $22\frac{1}{2}$ fr. de plus. Combien ce domestique, après 17 ans de service, recevra-t-il pour la 17e année, et combien pour les 17 ans ensemble?

R. Pour la 17e année 510 fr.; pour les 17 ans, 5610 fr.

2) Quelqu'un dépense aujourd'hui 8 fr.; puis il augmente chaque jour sa dépense de 75 c. Combien dépensera-t-il le 16e jour, et combien dans les 16 jours en tout?

R. Le 16e jour 19 fr. 25. c.; en tout 218 fr.

3) On veut creuser un puits de 30 mètres de profondeur: on paie à l'ouvrier 25 fr. 50 c. pour le premier mètre, puis successivement pour chaque pied suivant 25 c. de plus que pour le précédent. Combien paie-

ra-t-on pour le 30^{me} mètre, et combien pour les 30 mètres ensemble?

R. 32 fr. 75 c. et 873 fr. 75 c.

4) On place 3500 fr. à 4 pour cent d'intérêts annuels, et l'on ajoute chaque année 300 fr. au capital: à combien monteront, au bout de 24 ans, les intérêts du capital primitif grossi par l'augmentation annuelle?

R. A 6672 fr.

5) Un voyageur, désirant d'arriver en 19 jours à sa destination, se hâte de manière que chaque jour il fait un quart de mille de plus que la veille. Supposé qu'il ait fait le dernier jour $14\frac{1}{2}$ milles, combien de milles aura-t-il faits le premier jour; et combien dans tout son voyage?

R. Le premier jour 10 milles en tout $232\frac{3}{4}$ milles.

6) Quelle est la différence d'une progression arithmétique de 22 termes dont le premier est 1 et le dernier 15?

R. $\frac{2}{3}$.

7) Combien y a-t-il de termes dans une progression arithmétique dont la différence est 3, le premier terme 5 et le dernier 302?

R. 100.

8) On demande à un commis quels sont ses appointements? J'ai, dit-il, actuellement 2750 fr.; en entrant dans ma place, je ne reçus que 500 fr. pour la première année, mais on m'a accordé chaque année ensuite 150 fr. de supplément à ce que j'avais eu la précédente. Depuis combien d'années est-il placé?

R. Depuis 16 ans.

9) Un débiteur, ne pouvant payer à la fois une dette de 12950 fr., convient avec son créancier de le payer par termes d'un mois en commençant par 600 fr., et en ajoutant chaque mois suivant 50 fr. au paiement du mois précédent. Dans combien de mois la dette sera-t-elle éteinte? et quel sera le paiement du dernier mois?

R. En 14 mois; le dernier mois 1250 fr.

10) La physique enseigne que tout corps tombant dans le vide parcourt dans la première seconde de sa chute un espace d'environ 4,89 mètres, mais dans chaque seconde suivante la chute s'accélère successivement de 9,78 mètres sur la précédente. Supposons un corps tombé en 20 secondes; combien de pieds aura-t-il parcourus dans la dernière seconde, et combien dans tout le temps de sa chute?

R. 190,71 et 1956 mètres.

11) Mais combien de temps aura-t-il mis à parcourir sous les mêmes conditions, un espace de 4400 mètres?

R. 30 secondes, à-peu-près.

12) Un homme dit: j'ai économisé cette année 78 écus et mis à part un capital de 1350 écus depuis que j'ai ma place, en épargnant chaque année sur mes appointements deux écus de plus que la précédente. Combien d'années y a-t-il qu'il est en place, et combien a-t-il épargné la première année?

R. Il est placé depuis 25 ans, et a épargné 30 écus la première année.

13) Quelqu'un est condamné à payer 800 fr. d'a-

mende en divers termes, dont le premier sera de 20 fr. avec l'obligation d'y ajouter toujours une certaine somme fixe, et de manière qu'au dernier terme il aura 80 fr. à payer. En combien de termes l'amende doit-elle être acquittée et quel est le supplément convenu pour chaque terme?

R. 16 termes; et chaque fois 4 fr. de plus.

14) 15 rangées de boulets sont posées l'une sur l'autre dans un parc d'artillerie. On demande à un canonnier combien il se trouve de boulets dans la rangée du fond. Vous pouvez aisément le calculer, répond-il. Il y a dans la pile entière 4200 boulets, et chaque couche, depuis la plus basse jusqu'à la plus haute, contient toujours 20 boulets de moins que celle sur laquelle elle est posée. Combien y a-t-il de boulets dans la couche du fond?

R. 420.

15) Un météorologue trouve parmi ses observations que du 8 au 19 juin d'une certaine année, le thermomètre avait monté chaque jour d'un demi degré, et que la moyenne de ces diverses hauteurs avait été $18\frac{3}{4}$ degrés. A quel degré se trouvait le thermomètre le 8 juin?

R. Au 16^{me}.

16) Une compagnie de grenadiers doit avoir une gratification après un assaut où elle s'est distinguée. Cette gratification doit être distribuée de manière que le soldat qui a monté le premier à l'assaut aura une somme fixée; le second une certaine somme de moins; le troisième autant de moins que le second, et ainsi de suite,

toujours en diminuant jusqu'au dernier. Il se trouve que deux soldats blessés n'ont pu assister à la distribution, et l'on remet leur part à deux de leurs camarades; mais ceux-ci mêlent ces deux parts dans une même bourse avec les leurs, et ne savent plus ensuite ce qu'il revient à chacun des quatre. L'un a reçu pour lui et son camarade blessé 92 fr., et se souvient qu'il était le second et que le blessé était le septième; l'autre a reçu en tout 71 fr. et se rappelle d'avoir été le onzième et que son camarade blessé était le quatrième en rang dans la distribution. Combien revient-il à chacun des quatre?

R. Au second $54\frac{3}{4}$ fr.; au quatrième $47\frac{3}{4}$; au septième $37\frac{1}{4}$ et au onzième $23\frac{1}{4}$.

17) On a dix-huit nombres en progression arithmétique. La somme des deux du milieu est $31\frac{1}{2}$. Le produit du premier et du dernier est $85\frac{1}{2}$. Quel est le premier nombre; et quelle est la différence de cette progression?

R. Le premier nombre, 3. La différence $1\frac{1}{2}$.

18) Deux personnes partent au même moment de deux lieux différents *A*, *B*, éloignés de 170 milles l'un de l'autre pour se réunir à un rendez-vous. En marchant ainsi l'un au-devant de l'autre, celui qui est parti de *B* fait 4 milles par jour; le second n'a fait que deux milles la première journée, mais chaque jour ensuite il fait un demi-mille de plus que le jour précédent. Sur quel point se rencontreront-ils?

R. A 102 milles du lieu *A*.

19) Un homme a 500 fr. par an d'appointements

dont il ne dépense rien, et qu'il a, dès la première année, placés chaque fois à 5 pour cent d'intérêts par an; il a aussi laissé les intérêts sans en rien retirer. Dans combien d'années cet homme aura-t-il amassé 6875 fr.?

R. Dans 10 ans.

20) On dispose souvent, dans les parcs d'artillerie, les boulets en piles triangulaires, tellement que le dernier boulet d'en haut pose sur trois boulets, ces trois sur 6, ces six sur 10 et ainsi de suite; et généralement que les nombres des boulets dans les différentes couches, à partir de la pointe, sont les nombres trigonaux de 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 et ainsi de suite. Combien de boulets se trouvera-t-il dans la couche triangulaire du fond, en supposant que chaque côté de cette couche contienne n boulets; et combien s'en trouvera-t-il dans la pyramide entière?

R. $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ dans la couche d'en bas et $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ dans toute la pyramide.

Par ex. Pour $n=30$ la couche du fond contient $\frac{30 \cdot 31}{1 \cdot 2} = 465$ boulets, et toute la pyramide $\frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4960$ boulets.

21) Mais si la pyramide du problème précédent se trouve tronquée et qu'il y ait dans chaque côté de la couche supérieure m boulets, combien y aura-t-il de boulets dans le tas?

R. $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

22) Les boulets sont aussi quelquefois empilés en pyramides quadrangulaires, de sorte que chaque couche forme un carré, et que les nombres des boulets dans les différentes couches, à commencer par celle du haut, sont les nombres carrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc., si donc il se trouve, dans chaque côté de la couche formant la base, n boulets et par conséquent n^2 boulets dans toute cette couche, combien y aura-t-il de boulets entassés dans la pyramide entière et combien dans la même pyramide tronquée, si le côté de la dernière couche supérieure contient m boulets?

R. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$ dans la pyramide complète, et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{m(m+1)(2m+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$ dans la tronquée.

23) Pour empiler un grand nombre de boulets, on donne d'ordinaire à chaque couche la forme d'un rectangle. Il ne se trouve dans la couche supérieure qu'une file de m boulets laquelle repose sur deux rangées de $m+1$ boulets chacune; cette seconde sur trois rangées de $m+2$ boulets, et ainsi de suite, dans chaque couche plus bas une rangée, et à chaque rangée un boulet, de plus. De cette manière les couches contiendront successivement les nombres de boulets suivants: $m, 2(m+1), 3(m+2), 4(m+3), 5(m+4)$, etc., et dans la n^{me} couche $n(m+n-1)$. Combien de boulets se trouvera-t-il dans toute la pile de n couches?

R. $\frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$.

24) On élève aussi quelquefois les piles des bou-

lets, d'une autre manière, en couches rectangulaires, lesquelles, pour conserver l'équilibre, ont besoin d'être appuyées de deux côtés à d'autres piles, ou qu'on les soutienne par quelque autre moyen. Il y a au haut m boulets en une rangée; sous celle-là, deux rangées, chacune de $m-1$ boulets, et sous ces dernières, trois rangées chacune de $m-2$ boulets et ainsi de suite: de manière que les nombres des boulets dans les couches sont: m, $2(m-1)$, $3(m-2)$, $4(m-3)$, $5(m-4)$, et ainsi de suite; ainsi il y aura dans la n^{me} couche $n(m-n+1)$ boulets. Combien de boulets y aura-t-il dans la pile de n couches?

R. $\frac{n(n+1)\ (3m-2n+2)}{1\ \cdot\ 2\ \cdot\ 3}$.

25) Quand une pile de ce genre ne peut être appuyée que d'un côté, on donne à chaque couche suivante une rangée de plus; mais le nombre de boulets de chaque rangée reste le même. Les nombres des boulets dans les différentes couches sont alors m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, et ainsi de suite; par conséquent pour la n^{me} couche nm boulets. Combien de boulets la pile aura-t-elle?

R. $\frac{mn(n+1)}{1\cdot 2}$.

26) Si le nombre de boulets contenus dans une pyramide triangulaire complète est s, quelle équation faut-il résoudre pour trouver le nombre des couches, ou le nombre des boulets d'un côté de la couche d'en bas?

R. L'équation $n^3+3n^2+2n-6s=0$.

27) Mais quelle sera l'équation pour une pyramide quadrangulaire?

R. $2n^3+3n^2+n-6s=0$.

28) Quelqu'un met 6 centimes à la loterie *), et comme il ne gagne pas, il met la seconde fois 18 cent.; puis ayant encore perdu il met la troisième fois 54 c.; enfin il triple à chaque nouveau tirage sa dernière mise. Combien, en continuant ainsi, aura-t-il à mettre au douzième tirage, et combien faudrait-il qu'il gagnât pour recouvrer tout l'argent qu'il a déboursé?

R. Sa douzième mise sera de 10628 fr. 82 c. Il faudrait qu'il gagnât 15943 fr. 20 c.

29) Un roi des Indes nommé Sheran, selon Asephad, auteur arabe, voulant donner à Sessa, inventeur du jeu d'échecs une récompense, lui dit de la choisir. Celui-ci demanda la somme de grains de froment qui résulteraient d'un grain sur la première case de l'échiquier, 2 sur la seconde, 4 sur la troisième et ainsi de suite, en doublant toujours à chaque nouvelle case le nombre de grains de la précédente, jusqu'à la 64me case. Le calcul fait, on trouva, à la grande surprise du roi, une somme énorme. Quelle était elle?

R. 18446744073709551615, quantité de bled que, d'après un calcul modéré, la terre entière produirait à peine en 70 ans, en la supposant toute cultivée en froment.

30) On a semé un boisseau de froment, dont la

*) La loterie dont il est question ici, est celle appelée Lotto, à 90 numéros dont on en tire 5.

récolte entière a été aussi semée l'année suivante; on a encore ressemé cette seconde récolte pour la troisième année, et l'on a continué à semer de nouveau chaque récolte entière jusqu'à la dixième année. On suppose que dans la dixième année on a récolté 1048576 boisseaux, et l'on demande de combien de fois chaque grain de bled doit s'être augmenté à chaque moisson, en supposant que chaque année cette augmentation ait été la même?

R. De 4 fois.

31) Dans un pays favorisé par les circonstances, la population s'est accrûe annuellement dans une proportion toujours égale, et tellement que, dans un espace de quatre ans elle s'est élevée de 10000 à 14641 ames. De combien la population a-t-elle augmenté chaque année?

R. D'un dixième.

32) Interpoler entre 1 et 3 dix termes en progression géométrique. Quel sera le second terme de cette progression?

R. $\sqrt[11]{5} = 1{,}105\ldots\ldots$

33) Quel est le quotient d'une progression géométrique de 32 termes dont le premier sera 5 et le dernier 80. Quelle sera la somme de cette progression, et quel en sera le vingtième terme?

R. Le quotient 1,0935……; la somme 881,62……; le vingtième terme 27,351……

34) La somme des six premiers termes d'une progression géométrique de sept termes est $157\frac{1}{2}$; la somme des six derniers, 315. Quels sont ces termes?

R. $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

35) Dans une progression géométrique de 5 termes, on connait la somme des termes pairs $= a$, et la somme des impairs $= b$. Quelle est la progression?

R. Soient A, B, C, D, E, les 5 termes de la progression cherchée, le terme du milieu sera

$C = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2+4a^2)}}{2}$; de là on aura de plus

$$A = \frac{[a - \sqrt{(a^2-4C^2)}]^2}{4C}, \qquad B = \frac{a - \sqrt{(a^6-4C^2)}}{2},$$

$$D = \frac{a + \sqrt{(a^2-4C^2)}}{2}, \qquad E = \frac{[a+\sqrt{(a^2-4C^2)}]^2}{4C}.$$

36) La somme des termes pairs d'une progression géométrique de quatre termes est $= a$; celle des impairs $= b$; quelle est la progression?

R. Le quotient de la progression est $= \frac{a}{b}$, le premier terme $= \frac{b^3}{a^2+b^2}$, par où on la trouve.

37) La somme des termes pairs d'une progression géométrique de $2n$ termes est $= a$, la somme des impairs est $= b$; quelle est la progression?

R. Le quotient est $= \frac{a}{b}$, le premier terme

$$= \frac{b^{2n-1}}{a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + a^{2n-6}b^4 + \dots\dots\dots + b^{2n-2}}$$

$$= \frac{b^{2n-1}(a^2-b^2)}{a^{2n}-b^{2n}}.$$

38) Dans une progression géométrique de six termes, on connait la somme des deux moyens $= a$,

et la somme des deux extrêmes $= b$. Comment trouver cette progression?

R. Soit p le produit des deux termes moyens, p sera $= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{5a \pm \sqrt{(4ab+5a^2)}}{5a-b}$. De p et de a on trouve les deux termes moyens $\frac{1}{2}[a-\sqrt{(a^2-4p)}]$, $\frac{1}{2}[a+\sqrt{(a^2-4p)}]$, et de là ensuite la progression cherchée.

39) Dans une progression géométrique on connaît la somme des termes $= a$, la somme de leurs carrés $= b$, et celle de leurs cubes $= c$. Comment trouver la progression?

R. Le quotient e de la progression est $= \frac{a^4+2ac-3b^2 \pm \sqrt{12a(ac-b^2)(a^2-c)}}{a^4+3b^2-4ac}$, le premier terme $= \frac{b(1+e)+a^2(1-e)}{2a}$. Du quotient, du premier terme, et de la somme des termes, on trouvera le nombre des termes et la progression même.

40) Dans une progression géométrique, on connaît la somme des termes $= a$, celle de leurs carrés $= b$, et celle de leurs quatrièmes puissances $= c$. Comment trouver cette progression?

R. Le quotient e de la progression est $= \frac{a^4b-b^3 \pm 2a\sqrt{(c-a^2b)(b^3-a^2c)}}{b^3+a^4b-2a^2c}$, le premier terme $= \frac{b(1+e)+a^2(1-e)}{2a}$. De là se trouve le nombre des termes et la progression même.

41) Soit la différence d'une progression arithmé-

tique de quatre termes $= d$; le produit de tous les termes $= a$. Comment trouver le premier terme?

R. Soit le premier terme $= x$, et le produit des deux extrêmes $= y$; on aura $x^2 + 3dx = y$, et la quantité inconnue y sera donnée par l'équation $y^2 + 2d^2y = a$. De là on trouve les quatre valeurs suivantes de x:

$$x = -\tfrac{3}{2}d \pm \sqrt{[\tfrac{5}{4}d^2 + \sqrt{(a+d^4)}]},$$
$$x = -\tfrac{3}{2}d \pm \sqrt{[\tfrac{5}{4}d^2 - \sqrt{(a+d^4)}]}.$$

42) Soit la différence d'une progression arithmétique de six termes $= d$; le produit de tous les termes $= a$. Comment trouver le premier terme?

R. Soit le premier terme $= x$, et le produit des deux extrêmes $= y$; on aura $x^2 + 5dx = y$, et la quantité inconnue se trouvera par l'équation $y^3 + 10d^2y^2 + 24d^4y = a$.

Le problème, de trouver une progression arithmétique de $2m$ termes dont la différence d est donnée et dont le produit de tous les termes soit égal à une quantité donnée a, peut être réduit généralement à la résolution d'une équation du second et du m^{me} degré. Car on n'a qu'à poser $x^2 + (2m-1)dx = y$, ce qui donnera pour y une équation du m^{me} degré. (Comparez avec celui-ci le problème 35 page 242).

XX. *Problèmes sur le calcul des intérêts de l'argent, avec quelques autres qui y tiennent.* *)

1) Un capital a est augmenté par les intérêts au taux de r par an: et ces intérêts restent accumulés, c. à d. que chaque année ils sont réunis au capital, et produisent à leur tour des intérêts. Quel sera la somme produite par ce capital au bout de n ans?

R. $a(1+r)^n$ ou, en dénotant $(1+r)$ par p, ap^n.

2) Un capital de 5000 fr. est placé à 4 pour cent d'intérêts annuels qui restent accumulés; quel sera-t-il au bout de 40 ans?

R. 24005 fr. 10 c. ··· à-peu-près.

3) Quel capital une somme de 3200 fr. placée à 3 pour cent, les intérêts accumulés, produira-t-elle au bout de 80 ans?

R. 34050 fr. 84 c.

4) Une forêt est évaluée à 32500 cordes de bois, et d'après l'expérience 100 cordes s'augmentent de 3 tous les ans. Combien de cordes, cette forêt, restée intacte, contiendra-t-elle au bout de 24 ans?

R. 66065,808 ······

5) On compte actuellement 200000 ames dans une province. Si la population augmente annuellement d'un

*) Dans ces problèmes je suppose que les intérêts des sommes placées sont réunis chaque année au capital, pour former à chaque époque un nouveau capital et de nouveaux intérêts; le calcul des intérêts simples étant déjà connu.

cinquantième, à combien d'ames s'élèvera-t-elle au bout de 100 ans?

R. A-peu-près à 1448927

6) A combien montera au bout de 10 ans un capital de 12000 fr., placé à raison de 6 pour cent l'an, si les intérêts sont calculés comme échus tous les six mois?

R. A-peu-près à 21673 fr. 30 c.

7) Combien d'années faudra-t-il laisser placé un capital de 3600 fr. à 5 pour cent d'intérêts pour qu'il produise une somme égale à un capital de 5000 fr. placé à 4 pour cent pendant 12 ans?

R. A-peu-près 16 ans.

8) Combien de temps un capital a placé à h pour cent d'intérêts devra-t-il rester pour égaler la somme d'un capital a' placé sur le pied de h' pour cent pendant n ans?

R. En désignant $1+\frac{h}{100}$ et $1+\frac{h'}{100}$ respectivement par p et p' on trouvera $\frac{\log a' + n \log p' - \log a}{\log p}$ ans.

9) Quel doit être un capital qui, placé à 4 pour cent, égale après 15 ans un capital de 4500 fr. placés à 6 pour cent pendant neuf années?

R. 4221 fr. à-peu-près.

10) Quel doit être un capital a pour que, placé à h pour cent, il égale après n ans, un capital a' placé à h' au bout de n' ans?

R. En dénotant $1+\frac{h}{100}$ et $1+\frac{h'}{100}$ respectivement par p et p', on aura $\log a = \log a' + n' \log p' - n \log p$. A l'aide de cette équation on trouve d'abord $\log a$, et de là ensuite le capital a.

11) Mais quel doit être le taux d'intérêts p, pour qu'un capital a soit après n ans égal à un capital a' qui aura été placé n' ans au taux de p' d'intérêts?

R. $\log p = \frac{\log a' + n' \log p' - \log a}{n}$.

12) Un homme est débiteur de 7963 fr. dont il doit payer les intérêts à 5 pour cent. Il rembourse au bout de 5 ans 576 fr., et au bout de 8 ans 498 fr. Quel sera, au bout de dix ans, le montant de la dette, les intérêts accumulés y compris?

R. Environ 11696 fr.

13) A combien monteront les intérêts payés au bout de 6 mois d'un capital placé à 5 pour cent, mais payables à la fin de l'année seulement? Quels seront les mêmes intérêts si on les paie dès 3 mois?

R. Les intérêts de 6 mois 2,4695..... et ceux de 3 mois 1,2272..... pour cent environ.

14) A combien monteront sur le pied de p d'intérêts par an les intérêts par $\frac{1}{n}$ année?

R. $100\,(\sqrt[n]{p}-1)$ pour cent.

15) En combien de temps un capital à 4 pour cent d'intérêts sera-t-il doublé par les intérêts capitalisés

chaque année? et en combien de temps sera-t-il triplé?

R. Il sera doublé en 17 à 18 ans, et triplé en 28 à 29.

16) En combien de temps devient-il m fois plus grand au taux p d'intérêts?

R. $\frac{\log m}{\log p}$ ans.

17) Un usurier prête 600 fr. pour lesquels il se fait donner un engagement de 800 fr., payables dans trois ans, sans intérêts; à combien d'intérêts annuels revient cet emprunt, les intérêts des intérêts de chaque année y compris?

R. Un peu au-dessus de 10 pour cent.

18) A quel taux les intérêts d'un capital a doivent-ils être, pour qu'au bout de n ans, il soit monté à A fr.?

R. $\log p = \frac{\log A - \log a}{n}$ (p exprime le taux des intérêts.)

19) On doit une somme de 3750 fr., payable dans 6 ans. On veut l'escompter aujourd'hui à raison de 4 pour cent par an, en comprenant les intérêts des intérêts dans le calcul. Combien aura-t-on à payer comptant?

R. 2963 fr. 60 c.

20) Quelle est la valeur, au comptant, d'un capital a qui n'est échu que dans n ans; les intérêts calculés sur le pied de p?

R. $\frac{a}{p^n}$.

21) Quel prix doit-on payer pour une tourbière qui rapporte 5000 fr. au bout de 20 ans, si le capital doit produire 4 pour cent l'an à l'acquéreur?

R. Un peu plus de 2281 fr.

22) On compte aujourd'hui 20000 ames dans une ville, dont on sait que la population s'est accrûe chaque année de $\frac{3}{100}$ mes. Quelle était sa population il y a 10 ans?

R. 14882 ames.

23) Une forêt est évaluée aujourd'hui à 30000 cordes, et l'on sait qu'elle s'est accrûe de 2 pour cent chaque année. Combien de cordes contenait-elle, il y a dix ans?

R. 24610 cordes.

24) Trois acheteurs se présentent pour une terre à vendre. Le premier en offre 30000 fr. comptant; le second 33500 fr. dans 3 ans sans intérêts; le troisième 40000 fr. dans 7 ans sans intérêts. Quelle est, de ces propositions, la plus avantageuse, en calculant à 5 pour cent les intérêts des intérêts perdus dans les deux dernières propositions; et de combien cette proposition surpasse-t-elle les deux autres réduites sur le pied du comptant?

R. La première proposition est la plus forte et passe la seconde de 1061 fr., et la troisième de 1573 fr. environ.

25) En combien d'années se sera décuplée la population d'une ville qui s'accroît chaque année de trois personnes sur cent?

R. En près de 78 ans.

26) Un capital de 800 fr., placé pendant six ans dans une affaire s'est trouvé accrû à cette époque jusqu'à 3600 fr. Quel a été le profit annuel de ce capital?

R. Environ $28\frac{1}{2}$ pour cent.

27) Un capital a est placé sur le pied de p d'intérêts, et augmenté chaque année du montant de ces intérêts; mais en même temps il est, aussi annuellement, diminué, ou grossi de la somme b. Quelle sera devenue cette somme au bout de dix ans?

R. $ap^n \pm \frac{b(p^n-1)}{p-1}$; le signe supérieur répond à l'augmentation; et le signe inférieur à la diminution.

28) Un capital de 6000 fr. est placé à 5 pour cent l'an; les intérêts restent chaque année joints au capital, qu'on augmente en outre de 500 fr. par an. A combien se montera le tout au bout de 10 ans?

R. A environ 16062 fr.

29) A combien se montera au bout de huit ans un capital de 3740 fr., placé comme dans le problème précédent, mais à 4 pour cent, et avec un supplément annuel de 450 fr.?

R. A 9264 fr. 80 c. environ.

30) Un homme doit une somme de 15467 fr. avec les intérêts annuels de 5 pour cent. Il paie chaque année 600 fr. à valoir; à combien, après dix ans, montera le reste de sa dette?

R. A environ 17647 fr.

31) On retire chaque année 400 fr. d'un capital

de 5000 fr. placé à 5 pour cent d'intérêts. Combien restera-t-il à recevoir au bout de 10 ans?

R. A-peu-près 3113 fr.

32) Un homme a pris l'engagement de payer, au 1er janvier de chaque année, 4000 fr.; mais il n'a rien payé du tout: à combien montera sa dette, au bout de 6 années, les intérêts étant annuellement ajoutés?

R. A environ 31593 fr.

33) Quelqu'un place à 4 pour cent d'intérêts un capital de 30000 fr.; il retire chaque année, de ces intérêts, 800 fr. pour sa dépense, et laisse le surplus comme accroissement du capital. A combien se montera-t-il au bout de 15 ans?

R. A près de 38009 fr.

34) Un homme a placé, à 5 pour cent d'intérêts, toute sa fortune, montant à 100000 fr. Mais ces intérêts ne suffisent pas pour sa dépense annuelle qui exige 6000 fr.; et il faut que chaque année il retire, outre ses intérêts, de quoi compléter ces 6000 fr. Si cet homme continue ainsi, dans combien d'années son capital entier sera-t-il consommé?

R. Dans 36 à 37 ans.

35) Un capital a est placé à h pour cent d'intérêts. Dans quel temps cette somme sera-t-elle égale à a', si le capital accrû chaque année des intérêts est, aussi annuellement, augmenté ou diminué de la somme b?

R. En désignant $1+\frac{h}{100}$ par p et le nombre de années par n on trouve

$n = \frac{\log[(p-1)a' \pm b] - \log[(p-1)a \pm b]}{\log p}$. Les signes supérieurs répondent à l'accroissement, et les signes inférieurs à la diminution.

36) Si, dans le problème précédent, on retire annuellement b du capital a; b étant plus grand que les intérêts du capital a; après combien d'années sera-t-il consommé?

R. En, $n = \frac{\log b - \log[b-(p-1)a]}{\log p}$ années.

37) Quelle est la valeur comptant ou le prix v d'une rente ou quotité d'une annuité r dont on doit jouir n ans, les intérêts comptés sur le pied de h pour cent l'an?

R. En dénotant $1+\frac{h}{100}$ par p on a $v = \frac{(p^n-1)r}{(p-1)p^n}$.

38) Un homme, qui a encore six ans à jouir d'une rente annuelle de 500 fr., veut la vendre. Combien peut-on lui en payer comptant en évaluant les intérêts à $3\frac{1}{2}$ pour cent par an?

R. Environ 2664 fr. 30 c.

39) Et quelle sera la valeur comptant ou le prix d'une rente annuelle de 350 fr., qui doit durer 8 ans, les intérêts calculés à 4 pour cent?

R. Quelque chose de plus que 2356 fr.

40) Combien pourra-t-on payer pour une rente annuelle de 400 fr., laquelle doit durer encore 12 ans, les intérêts calculés à 3 pour cent?

R. Un peu plus de 3981 fr.

41) Le prix ou la valeur au comptant d'une rente annuelle r pendant n ans, est v. Quelle est la rente?

R. $r = \frac{(p-1)p^n v}{p^n - 1}$.

42) Une dette échue aujourd'hui de 1200 fr., est prolongée, et doit se payer en 7 termes d'un an chacun et par sommes égales. Quel sera chaque paiement si l'on y comprend les intérêts à 4 pour cent?

R. Environ 200 fr.

43) Quelle sera la rente annuelle dont la jouissance pendant treize ans équivaudra à un capital de 20000 fr., les intérêts calculés à 4 pour cent?

R. Environ 2003 fr.

44) Quelqu'un a emprunté 20000 fr., et donné pour sûreté une forêt qui rapporte un revenu annuel net de 1500 fr. Pendant combien d'années le créancier devra-t-il jouir de ce revenu, pour être remboursé de son capital, les intérêts à 5 pour cent compris?

R. Près de 22 ans.

45) Un homme consacre 34580 fr., pour l'achat d'une rente annuelle de 2000 fr. Pendant combien de temps devra-t-il recevoir cette rente si les intérêts sont calculés à 4 pour cent?

R. Environ 30 ans.

46) Combien de temps devra courir une rente annuelle r, pour égaler un capital comptant v, placé à h pour cent d'intérêts?

XXI. *Problèmes sur les combinaisons et permutations, ainsi que du calcul des probabilités.*

1) Combien de fois 8 personnes placées à côté l'une de l'autre peuvent-elles changer de place, de manière à se trouver chaque fois dans un ordre différent?

R. 40320 fois.

2) Combien de permutations différentes peut-on faire des 24 lettres de l'alphabet?

R. 620448401733239439360000. D'après un calcul approximatif, tous les habitants qui peuplent la terre, ne pourraient ensemble, pendant un billion d'années, mettre par écrit toutes les permutations possibles des 24 lettres, lors même que chacun écrirait par jour 40 pages, chacune contenant 40 combinaisons.

3) Combien de complexions y a-t-il dans les permutations de *abcdefg* qui commencent par une des lettres *a, b, c, d, e, f, g*?

R. 720.

4) Combien y en aura-t-il de commencées par *ab*? combien par *abc*? combien par *abcd*?

R. 120 par *ab*, 24 par *abc*, 6 par *abcd*.

5) Combien y en aura-t-il qui conserveront l'ensemble des lettres *abcd* et dans l'ordre où nous les rangeons ici?

R. 24.

6) Et quel sera le nombre de celles qui contiendront les lettres $a, b, c, d,$ ensemble, mais sans qu'elles soient conservées dans cet ordre?

R. 576.

7) Combien de complexions y a-t-il entre les permutations $a^3b^5c^4$, ayant c^3 à la tête?

R. 504.

8) Combien, avec a^2b^2c à la tête?

R. 140.

9) Combien, où la lettre a aura une place fixe, la 4^{me} par exemple?

R. 6930.

10) Quelle est la somme des chiffres dans toutes les permutations de la complexion 12234?

R. 720.

11) Quelle est la somme des chiffres de chaque colónne verticale, les complexions étant écrites l'une sous l'autre?

R. 144.

12) Quelle est la somme des chiffres de chaque colonne verticale, les permutations de la complexion 2557789, étant écrites l'une sous l'autre?

R. 7740.

13) Combien d'ambes, de ternes, de quaternes et de quines contiennent 90 numéros?

R. 4005 ambes, 117480 ternes, 2555190 quaternes et 43949268 quines.

14) Combien, dans 60 numéros?

R. 1770 ambes, 34220 ternes, 487635 quaternes, et 5461512 quines.

15) On tire 15 cartes au hasard des 32 d'un jeu de piquet. De combien de manières cela peut-il se faire?

R. En 565722720.

16) Le produit $abcd$ peut être décomposé de trois manières en produits de deux facteurs, comme $ab\times cd$, $ac\times bd$, $ad\times bc$; le produit $abcdef$ offre 15 produits pareils, savoir $ab\times cd\times ef$, $ab\times ce\times df$, $ab\times cf\times de$, etc. De combien de manières pourra-t-on décomposer en produits partiels de deux facteurs le produit $abcdefg$ etc., celui-ci contenant $2n$ facteurs a, b, c, d, e, f, g, etc.?

R. De $\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(2n-1)2n}{(1\cdot 2)^n}$ manières.

17) De combien de manières le produit a, b, c, d, e, f, g, etc. composé des $3n$ facteurs a, b, c, d, e, f, g, etc., pourra-t-il être décomposé en produits partiels de trois facteurs?

R. De $\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(3n-1)3n}{(1\cdot 2\cdot 3)^n}$ manières.

18) De combien de manières le produit a, b, c, d, e, f, g, etc., composé des mn facteurs a, b, c, d, e, f, g, etc., pourra-t-il être décomposé en produits partiels de m facteurs?

R. De $\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(mn-1)mn}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots m)^n}$ manières.

19) Tout nombre entier N est, ou lui-même un nombre premier, ou un produit de nombres premiers, égaux et différents. Si donc a, b, c, etc., sont des nombres premiers, on pourra poser généralement

$N = a^m b^n c^p$ etc., m, n, p, etc., désignant tous les nombres entiers possibles, y compris zéro. Comment trouver à présent tous les nombres par lesquels N soit divisible? et combien de diviseurs y aura-t-il?

R. Soit, pour abréger, $1+a+a^2+\cdots\cdots+a^m = A$, $1+b+b^2+\cdots\cdots+b^n = B$, $1+c+c^2+\cdots\cdots+c^p = C$, etc.; les termes du produit: $A\,B\,C\,D$, etc., donneront tous les diviseurs du nombre N et il y aura $(m+1)(n+1)(p+1)$ etc., diviseurs différents. Par ex.: 360 étant égal à $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, le produit $4 \cdot 3 \cdot 2$ donne le nombre des diviseurs de 360, et les termes du produit $(1+2+4+8)(1+3+9)(1+5)$ donnent ces diviseurs mêmes savoir; 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

20) Comment trouver les nombres qui ont précisément un nombre donné n de diviseurs, ni plus, ni moins?

R. Soient a, b, c, etc., des nombres premiers quelconques: si n est un nombre premier, le nombre a^{n-1} est un nombre tel qu'on le demande. Si n est un nombre composé, il faut le décomposer en ses facteurs m', m'', m''' etc., simples ou non; on aura alors $a^{m'-1} b^{m''-1} c^{m'''-1}$ etc., pour le nombre cherché.

21) Nous appellerons polynome complet de la N^{me} dimension pour n quantités x, y, z, etc., celui qui renfermera toutes les combinaisons de ces n quantités, depuis la 0^{me} jusqu'à la N^{me} classe, la dernière inclusivement. Donc, par ex., un polynome de la quatrième dimension pour deux quantités sera: $a+bx+$

$b'y + cx^2 + c'xy + c''y^2 + dx^3 + d'x^2y + d''xy^2 + d'''y^3 + ex^4 + e'x^3y + e''x^2y^2 + e'''xy^3 + e''''y^4$. Combien de termes aura donc un polynome complet de la N^{me} dimension pour n quantités?

R. $\dfrac{(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+n)}{1\;.\;2\;.\;3\cdots\cdots n}$ termes.

22) Combien de ces termes resteront-ils, si l'on en retranche tous ceux qui sont divisibles par x^p?

R. $\dfrac{(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+n)}{1\;.\;2\;.\;3\cdots\cdots n}$

$-\dfrac{(N-p+1)(N-p+2)(N-p+3)\cdots(N-p+n)}{1\;.\;2\;.\;3\cdots\cdots n}.$

23) Combien en restera-t-il, si l'on retranche tous ceux qui sont divisibles par x^p et y^q?

R. $\dfrac{(N+1)(N+2)(N+3)\cdots(N+n)}{1\;.\;2\;.\;3\cdots\cdots n}$

$-\dfrac{(N-p+1)(N-p+2)(N-p+3)\cdots(N-p+n)}{1\;.\;2\;.\;3\cdots\cdots n}$

$-\dfrac{(N-q+1)(N-q+2)(N-q+3)\cdots(N-q+n)}{1\;.\;2\;.\;3\cdots\cdots n}$

$+\dfrac{(N-p-q+1)(N-p-q+2)\cdots(N-p-q+n)}{1\;.\;2\cdots\cdots n}.$

24) On suppose que parmi les n cas possibles d'un événement, il se trouve m cas favorables et par conséquent $n-m$ cas défavorables. Quelle est alors la probabilité d'un heureux succès, et quelle est celle du contraire?

R. $\dfrac{m}{n}$ pour le succès favorable: $\dfrac{n-m}{n}$ pour le succès malheureux.

Que signifient ces expressions, si $m = 0$? et si $m = n$?

25) Dans la loterie (loto), qu'on tirait autrefois à Berlin, et qui est aussi introduite en France, sur **90** numéros que contient la roue de fortune, on en tire 5 comme lots gagnants. Si l'on choisit au hasard 12 de ces numéros, et qu'on joue tous les ambes, ternes, quaternes et quines qui s'y trouvent, quelle probabilité aura-t-on de gagner une de ces chances?

R. Pour l'ambe, la probabilité est $= \frac{44}{267}$, pour le terne $= \frac{5}{267}$, pour le quaterne $= \frac{5}{5162}$, et pour le quine $= \frac{2}{110983}$.

26) Quelqu'un voulait prendre au loto des billets, chacun de 5 numéros, en nombre assez grand pour qu'il ne pût manquer d'avoir sur un de ses billets les cinq numéros sortants. Combien de billets aurait-t-il dû prendre en tout? Combien y en a-t-il qui auraient des quaternes? Combien qui auraient des ternes? Combien qui auraient des ambes? Combien qui auraient un seul extrait; et combien qui n'auraient pas même un simple extrait?

R. Le nombre des billets qu'il aurait dû jouer est de 43949268. Il s'y en trouve 425 qui auront des quaternes; 35700 qui auront des ternes; 987700 sortiront avec des ambes, 10123925 avec des extraits, et 32801517 n'auront rien du tout.

27) Quel est le rapport de la probabilité de tirer six numéros donnés sur 13 numéros qu'on aura mis dans une roue de fortune, à la probabilité de tirer huit cartes demandées, d'un jeu de piquet de 32 cartes, en supposant les cartes aussi bien que les nu-

méros mêlés au hasard: et dans le cas que le profit, à ces deux jeux, doive être le même, quelles ont dû être les mises respectives, pour que les deux jeux puissent être jugés également favorables, en ayant égard aux probabilités différentes?

R. La probabilité du gain au premier jeu, est à l'autre comme 11 est à 67425; donc les mises aux deux jeux devront être de même comme 11 à 67425.

28) De combien de manières peut-on placer 40 balles différentes en deux tas l'un de 7, l'autre de 33 balles?

R. de 18643560 manières.

29) Dans combien de combinaisons différentes peut-on placer 21 différentes balles en trois tas de 3, 7 et 11 balles?

R. En 42325920 manières.

30) De combien de manières peut-on placer 19 balles différentes en quatre de 2, 4, 5 et 8 balles?

R. De 523783260 manières.

31) En combien de combinaisons différentes peut-on partager les 32 cartes de piquet en trois tas, l'un de 12, le second de 9, et le troisième de 11 cartes?

R. En 37924165406400 combinaisons.

32) Au jeu de piquet chacun des deux joueurs reçoit 12 cartes, et les 8 autres restent comme cartes d'écart. Combien de jeux différents y a-t-il?

R. 28443124054800.

33) En combien de manières différentes peut-on

distribuer un jeu complet de 52 cartes entre quatre joueurs de whist, chacun recevant 13 cartes? c'est-à-dire, combien de jeux différents y a-t-il?

R. 53644737765488792839237440000.

34) Quelle est la probabilité que de 30 numéros qu'on aura choisis entre les 90 du loto, il en sortira un, mais seulement un?

R. $\frac{28025}{84194}$ c'est-à-dire à-peu-près $\frac{1}{3}$.

35) Et quelle est la probabilité que, de ces 30 numéros choisis, il en sorte deux, ni plus ni moins?

R. $\frac{171100}{505164}$ ou un peu plus de $\frac{1}{3}$.

36) Quelle est la probabilité qu'il en sorte précisément 3?

R. $\frac{82600}{505164}$ ou environ $\frac{8}{49}$.

37) Quelle est enfin la probabilité que les 5 numéros sortants soient contenus dans ces 30?

R. $\frac{273}{84194}$ ou environ $\frac{1}{308}$.

38) On tire au hasard 9 cartes d'un jeu de piquet bien mêlé: quelle probabilité y a-t-il qu'il s'y trouve 5 cartes d'une même couleur; de trèfle par ex.?

R. $\frac{12397}{584350}$ ou environ $\frac{1}{47}$.

39) Quelle est la probabilité que de 5 numéros choisis des 90 du loto, il en sorte 3, ni plus ni moins?

R. $\frac{2975}{3662439}$ ou environ $\frac{1}{1231}$.

40) Quelle probabilité y a-t-il qu'il se passe à la fois deux événements dont l'un a la probabilité $\frac{m}{n}$ et l'autre la probabilité $\frac{m'}{n'}$?

R. $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}$. Pourquoi?

41) Quelle est la probabilité que trois événements se passent à la fois, s'ils ont, à part, les probabilités $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$?

R. $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} \cdot \frac{m''}{n''} = \frac{mm'm''}{nn'n''}$.

42) On a mis 24 boules dans une boîte, savoir 6 blanches, 8 noires et 10 rouges; on en tire d'abord 7 au hasard; puis 3 des 17 restantes. Je parie que les sept seront toutes rouges, et que les trois seront blanches. Quelle en est la probabilité?

R. $\frac{5}{490314}$, donc l'espérance n'est pas grande.

43) Combien de coups divers peut-on amener avec deux, trois, quatre, et en général avec n dés?

R. Avec deux dés 36 coups; avec trois dés 216; avec quatre dés 1296; et en général avec n dés 6^n coups.

44) Quelle est la probabilité qu'on fera rafle avec quatre dés?

R. $\frac{1}{216}$.

45) Quelle est la probabilité qu'en jetant trois dés, deux seulement amèneront le même point?

R. $\frac{5}{12}$.

46) Quelle probabilité y a-t-il qu'en jetant quatre dés, deux et non davantage donneront le même point, et que les deux autres auront chacun un point différent? Quelle est la même probabilité avec cinq, avec six, avec sept, enfin avec huit dés?

R. Avec quatre dés la probabilité est $= \frac{5}{9}$; avec cinq dés $= \frac{25}{54}$; avec six dés $= \frac{25}{108}$; avec sept dés $= \frac{35}{648}$; avec huit dés $= 0$, c'est-à-dire que le cas n'est pas possible.

47) Quelle est la probabilité d'amener avec quatre dés 3 points égaux et non davantage?

R. $\frac{5}{54}$.

48) Quelle est la probabilité d'amener avec cinq dés trois points égaux et non davantage, et que les deux autres donnent chacun un point différent? Quelle est la même probabilité avec six, sept, huit et neuf dés?

R. Avec cinq dés la probabilité sera $= \frac{25}{162}$; avec six elle sera aussi de $\frac{25}{162}$; avec sept elle sera $= \frac{175}{1944}$; avec huit dés $= \frac{35}{1458}$; avec neuf $= 0$, c'est-à-dire impossible.

49) Est-il plus probable qu'on amènera deux six avec trois dés, que de rencontrer trois cartes de la même couleur en les tirant au hasard d'un jeu de piquet?

R. Le premier cas est plus probable, et sa probabilité est à celle du second cas, comme 775 est à 504.

50) On me propose deux jeux différents. Dans le premier, je dois, avec douze dés, amener huit points pareils et pas davantage; les quatre autres dés devant donner chacun un point différent. Dans le second jeu, je devrai tirer au hasard cinq cartes de la même couleur d'un jeu complet de 52 cartes. Quel jeu dois-

je choisir, comme le plus favorable? et dans quel rapport de probabilité se trouvent-ils?

R. Le second jeu est plus avantageux que le premier, et la probabilité du gain y est à celle du premier, comme 1259712 à 104125, c'est-à-dire comme $12\frac{1}{10}$ à 1 à-peu-près.

. . . .

XXII. *Problèmes divers.*

1) D'un jeu de 32 cartes, on en tire trois qu'on pose séparément, et l'on met sur chacune le nombre de cartes qui, ajouté aux points de cette carte posée dessous, complète le nombre de 15. Ces trois tas ainsi formés, il reste huit cartes. Quelle est la somme des points des trois cartes tirées?

R. 24.

2) On tire d'un jeu de a cartes, n cartes qu'on pose séparément sur la table; puis l'on met sur chacune un nombre de cartes tel que dans chaque tas la somme du nombre des points de la carte de dessous et du nombre des cartes mises sur celle-ci, soit égal à s. Il reste alors r cartes. Quelle est la somme des points des n cartes tirées?

R. $ns+n+r-a$.

3) On a acheté une pièce d'étoffe à raison de 7 écus pour 5 aunes; on la revend au prix de 16 écus pour 11 aunes, ce qui laisse un bénéfice de 24 écus. Combien la pièce contenait-elle d'aunes?

R. 440.

4) Deux voyageurs se mettent en route, *A* avec 100, *B*, avec 48 fr. Des voleurs leur prennent en chemin une partie de leur argent. *A* perd le double de *B*, et conserve pourtant trois fois autant d'argent que *B*. Combien a-t-on enlevé à chacun?

R. à *A* 88, à *B* 44 fr.

5) J'achète d'un relieur deux cahiers reliés, de papier blanc. Je paie l'un qui contient 48 feuilles, 2 fr. 10 c.; l'autre qui en contient 78, 2 fr. 85 c.. Le papier et la reliûre sont pareils. A combien a-t-on évalué la reliûre?

R. à 9 décimes.

6) Une somme de 156 fr. doit être partagée entre 16 jeunes gens d'âge différent; la distribution se fait par rang d'âge, à commencer par le plus jeune, et chacun d'eux reçoit, de plus que celui qui le précède dans cette distribution, une somme qui est toujours la même. Si, d'après cet arrangement, on a commencé par donner au plus jeune 6 fr., de combien chaque portion sera-t-elle augmentée? et combien recevra le plus âgé?

R. La différence $\frac{1}{2}$ fr.; l'aîné recevra $13\frac{1}{2}$ fr.

7) Une dette de 2363 fr. doit être acquittée en 34 termes; de manière qu'à chaque terme on paie 3 fr. de plus qu'au terme précédent. Quel devra être le premier paiement?

R. 20 fr.

8) Un bassin d'eau que deux tuyaux remplissent en 12 minutes, peut se remplir, par l'un des deux seuls, en 20 minutes. Quel temps faudrait-il à l'autre?

R. 30 minutes.

9) Quelqu'un achète pour 18 décimes un certain nombre de pommes et de poires, au prix d'un décime pour 4 pommes, et d'un décime aussi pour 5 poires. Il cède à un voisin et au même prix, la moitié des pommes et le tiers des poires; il reçoit 8 décimes. Combien de pommes et combien de poires a-t-il achetées?

R. 48 pommes et 30 poires.

10) Quel est le nombre qui étant ajouté à 15, puis à 27, puis à 45, donne trois nombres qui se trouvent en progression géométrique?

R. 9.

11) J'ai une progression arithmétique et une géométrique, chacune de trois termes. La somme totale des six termes fait 96. Le premier terme de la progression géométrique est le double du premier de la progression arithmétique: le second terme de la progression géométrique est le triple du second de l'autre; et le troisième terme de la progression géométrique, est six fois aussi grand que le troisième de la progression arithmétique. Quelles sont ces progressions?

R. 3, 6, 9; et 6, 18, 54.

12) A, B, C, voudraient acheter un tableau; mais ni l'un ni l'autre n'a assez d'argent. A demande à B et à C de lui prêter, pour le payer, la moitié de leur argent; B de son côté prie les deux autres de lui prêter seulement le tiers du leur. Mais C leur répond, avec le quart du vôtre je pourrai faire cet achat. Combien de louis chacun possède-t-il? et quel doit être le prix du tableau? On suppose les sommes sans fractions.

R. Le tableau doit coûter 17 louis, et dans ce cas *A* a 5 louis *B* 11 et *C* 13; ou bien il coûte 34 louis et *A* possède 10, *B* 22 et *C* 26 louis, et ainsi de suite.

13) Cinq amis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, voyageant ensemble ont dépensé dans l'auberge d'une ville une certaine somme qu'aucun ne peut acquitter seul, à moins d'emprunter une partie de l'argent des autres. Ils n'ont que des écus et point de monnaie. Il faudrait à *A*, le quart; à *B*, le cinquième; à *C*, le sixième; à *D*, le septième, et à E, le huitième de l'argent des quatre autres. Quelle est la somme possédée par chacun?

R. La dépense est au moins de 879 écus; *A* possède 319, *B* 459, *C* 543, *D* 599, *E* 639 écus; et ainsi de suite, car on peut, dans les mêmes proportions trouver d'autres nombres.

14) Quelques personnes, étrangères l'une à l'autre, entreprennent un voyage à frais communs, et louent une voiture pour 342 fr. Trois des voyageurs s'échappent sur la route, et chacun des autres se trouve avoir 19 fr. de plus à payer pour la voiture que n'était sa portion primitive. Combien de voyageurs y avait-il d'abord?

R. 9.

15) Quelqu'un a une barre d'or qu'il vend 4200 fr., prix qui lui donne de la perte. S'il en avait pu tirer 5700 fr., il aurait eu au contraire un profit quadruple de la perte qu'il a faite. Combien avait-il payé cette barre d'or?

R. 4500 fr.

16) Huit chevaux mis au vert sur une prairie de 400 perches carrées ont consommé en sept semaines toute l'herbe qui s'y trouvait d'abord et celle qui y a crû pendant leur séjour. Neuf autres chevaux mis sur un pré pareil en fourrage, mais de 500 perches carrées, l'ont épuisé en 8 semaines. Combien de chevaux pourrait-on nourrir pendant 12 semaines sur une prairie de la même nature et de 600 perches carrées?

R. 8 chevaux.

17) Un mari laisse, en mourant, sa femme enceinte et une fortune nette de 9000 fr. Son testament porte que si sa femme accouche d'un fils, il recevra de son bien une part triple de celle de la mère; mais si c'est une fille, celle-ci n'aura que la moitié de la part de la mère. La femme met au monde deux jumeaux, un fils et une fille. Comment se fera actuellement le partage?

R. On donnera à la mère 2000 fr., au fils 6000, et 1000 à la fille.

18) Un voyageur fait, le premier jour de son départ, un mille; le second jour deux milles, le troisième jour trois, le quatrième quatre milles, et ainsi de suite dans la même progression. Cinq jours après, un autre voyageur part du même lieu, et suit la même route en faisant douze milles par jour. Quel jour, à dater du départ du premier, les deux voyageurs se rencontreront-ils?

R. Le 8^me jour, et s'ils continuent de même, le premier, à son tour, atteindra le second, le quinzième jour.

19) Dans le problème précédent le premier voyageur fait le premier jour a milles, et chaque jour suivant d milles de plus que le précédent. Le second voyageur part n jours plus tard et fait chaque jour b milles. Après quel temps se rejoindront-ils?

R. Après

$$\frac{-(2a-2b-d)\pm\sqrt{[(2a-2b-d)^2-8bdn]}}{2d} \text{ jours.}$$

20) Trouver deux nombres tels que leur produit soit égal à leur somme, et que cette somme ajoutée à celle de leurs carrés, fasse $15\frac{3}{4}$?

R. Ces nombres sont 3 et $\frac{3}{2}$.

21) Un berger interrogé sur le nombre de ses moutons, répond: si je les compte par 4, par 6, ou par 9, j'en ai toujours trois de reste; si je les compte par 7 ou par 13, il en reste 1. Mais si je les compte par 11, il en reste 7. Combien a-t il de moutons?

R. 183, ou 36219 et ainsi de suite.

22) Deux canonniers, pourvus chacun d'une égale quantité de poudre, ont rempli ensemble 1000 cartouches de différents calibres. L'un dit à son camarade: si j'avais rempli autant de cartouches que toi, j'aurais consommé 18 quintaux de poudre; et moi, réplique le second, si j'avais rempli le même nombre de cartouches que toi je n'aurais eu besoin que de 8 quintaux de poudre. Combien de cartouches chacun d'eux a-t-il rempli et avec combien de poudre?

R. Le premier a rempli 400, le second 600 cartouches; chacun a employé 12 quintaux de poudre.

23) Combien de temps faudrait-il pour qu'un franc

placé à 5 pour cent l'an, les intérêts toujours joints au capital, donnât un capital de 1000 fr.?

R. 141 à 142 ans.

24) Quelqu'un a une pièce de vin contenant 100 bouteilles dont chacune coûte $1\frac{1}{2}$ fr. Il en tire une bouteille, et met de l'eau à la place; puis il tire encore une bouteille, et la remplace de même; combien de fois faudra-t-il répéter cette opération pour que le vin qui restera, ainsi mélangé, dans le tonneau ne vaille plus que 1 fr. la bouteille?

R. 40 à 41 fois.

25) Comment partager 70 en trois parties telles que les produits de la première par 7, de la seconde par 8, et de la troisième par 9 réunis, donnent 561?

R. En 1, 67, 2; ou 2, 65, 3; ou 3, 63, 4, et ainsi de suite.

26) Un maître d'arithmétique donne à un écolier deux nombres à multiplier l'un par l'autre, dont l'un est plus grand que l'autre de 75. L'opération faite, l'écolier doit en faire la preuve. En divisant le produit par le plus petit facteur, il en résulte pour quotient 227 et un reste de 113. Le maître trouve la multiplication fausse, et l'écolier, en la rectifiant, dit qu'en la faisant il n'a manqué qu'en comptant 1 de moins qu'il ne devait; mais le maître lui dit que c'est 1000, et non pas 1 seulement qu'il a oublié de compter. Quels nombres l'écolier avait-il à multiplier?

R. 159 et 234.

27) Le poids de l'eau pure dans une eau salée est a, et celui du sel qu'elle contient est b; donc le

rapport du sel à toute la masse est $= \frac{b}{a+b}$. Combien faudra-t-il ajouter d'eau pour que ce rapport soit $= g$?

R. $\frac{b}{g} - (a+b)$. L'unité du poids est la même que celle de a et b. Que signifie cette expression: si $\frac{b}{g} < a+b$, et par conséquent $\frac{b}{a+b} < g$?

28) Une certaine matière A est p fois aussi pesante que l'eau; une autre matière B n'est que p' fois plus pesante que l'eau; quelle quantité de la seconde matière B, devra-t-on mêler avec une quantité pesant g de la première A, pour que ce mélange soit p'' fois aussi pesant que l'eau; en supposant que p'' tombe entre p et p'?

R. $\frac{gp'(p-p'')}{p(p''-p')}$. L'unité est la même que celle de g.

29) Le plomb pèse 11,324.... fois autant que l'eau; le liége au contraire ne pèse que 0,24.... autant, et le sapin 0,45.... autant. Combien faudra-t-il joindre de liége à un morceau de plomb de 60 kilogrammes, pour composer une masse dont le poids et le volume soient égaux à ceux d'un morceau de sapin, capable par conséquent de flotter?

R. 65,846 .... kilogr.

30) Soient w et x des quantités dépendantes l'une de l'autre, de manière que si l'on donne à x les n valeurs déterminées a, a', a'', a''' etc., la quantité w prendra les n valeurs correspondantes déterminées w, w', w'', w''', etc. Comment pourra-t-on exprimer w

par un polynome de x, de manière à remplir les conditions données?

R. Soit w égal au polynome de n termes $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$ etc.; on y substitue successivement pour w et x les valeurs correspondantes, w, a; w', a'; w'', a''; w''', a'''; etc. On aura n équations qui donneront les coefficients A, B, C, D, E, etc.

31) Soient w, x, y, trois quantités dépendantes l'une de l'autre, de manière que leurs valeurs correspondantes soient w, a, b; w', a', b'; w'', a'', b''; w''', a''', b'''; etc. Comment exprimer w par un polynome de x et y? (voyez page 287).

R. On supposera $w=A+Bx+B'y+Cx^2+C'xy+C''y^2+Dx^3+D'x^2y+$ etc.; le second membre de l'équation ayant autant de termes qu'il y a de valeurs correspondantes. On substituera ensuite pour w, x, y, leurs valeurs correspondantes w, a, b; w', a', b'; w'', a'', b''; etc.; et l'on aura précisément autant d'équations qu'il en faut pour trouver les coefficients A, B, B', C, C', C'', D, D' etc.; donc on trouvera en effet ces coefficients.

32) Soient w, x, y, z quatre quantités dépendantes l'une de l'autre, de sorte que leurs valeurs correspondantes soient w, a, b, c; w', a', b', c'; w'', a'', b'', c''; etc.; comment exprimer w, par un polynome de x, y, z?

R. Il faut poser $w=A+Bx+B'y+B''z+Cx^2+C'xy+C''xz+C'''y^2+C''''yz+C'''''z^2+Dx^3+D'x^2y+D''x^2z+$ etc., et opérer comme dans les problèmes précédents.

Il faudrait procéder de la même manière, s'il y avait plusieurs quantités et plusieurs valeurs correspondantes. Ces problèmes sont d'une grande utilité dans la physique ainsi que dans toutes les parties des mathématiques appliquées: ils contiennent aussi les bases de plusieurs procédés analytiques et de formules d'interpolation.

33) Trouver un nombre dont le produit par le carré d'un autre nombre moindre que lui de 1, soit 1.

R. Le nombre se trouvera par l'équation $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$: la seule racine réelle de cette équation est 1,7548 .....

34) Quelle est la valeur de la fraction continue infinie

$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q+\text{etc.}}}}$$

tous les dénominateurs étant q?

R. $\dfrac{-q+\sqrt{(q^2+4)}}{2}$

35) Quelle est la valeur de la fraction continue périodique allant à l'infini

$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}$$

où les dénominateurs q, r, se répètent sans cesse?

R. $-\dfrac{r}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{r}{q}\right)}$.

36) Mais quelle valeur aura une fraction continue telle que la précédente, si, au lieu de deux dénominateurs q, r, il revient sans cesse, jusqu'à l'infini, trois dénominateurs q, r, s?

R. La valeur

$$=\frac{qrs+q+s-r-\sqrt{[(qrs+q+s+r)^2+4]}}{2(qr+1)}.$$

37) Quelle valeur aura encore une telle fraction, s'il se trouve quatre dénominateurs q, r, s, t, qui reviennent à l'infini?

R. $$-\frac{qrst+qr+qt+st-rs}{2(qrs+q+s)}+$$
$$\frac{\sqrt{[(qrst+qr+qt+st+rs+2)^2-4]}}{2(qrs+q+s)}.$$

Comment exprimer la loi de cette valeur, s'il revient périodiquement plus de quatre dénominateurs?

38) Soient donnés, dans une proportion géométrique, la somme des deux termes moyens $=a$, la somme des deux extrêmes $=b$, et la somme des quatrièmes puissances des quatre termes $=c$. Quelle est la proportion?

R. Soit d la différence des deux moyens, on a $d=\sqrt{[-a^2-2b^2\pm 2\sqrt{(c+2a^2b^2)}]}$, et la proportion cherchée est:

$$\tfrac{1}{2}[b-\sqrt{(b^2-a^2+d^2)}] : \tfrac{1}{2}(a-d)$$
$$:: \tfrac{1}{2}(a+d) : \tfrac{1}{2}[b+\sqrt{(b^2-a^2+d^2)}].$$

39) Soient donnés dans une proportion géométrique la somme de tous les termes $=a$, la somme de leurs carrés $=b$, et la somme de leurs quatrièmes puissances $=c$. Quelle est la proportion?

R. Soit le produit des deux termes extrêmes $=p$, lequel est égal au produit des deux moyens, et la différence des sommes des extrêmes et des moyens d; on a

$$p=\frac{a^2}{2}\pm\sqrt{\frac{a^4+2a^2b+b^2-2c}{8}},$$

et $d = \sqrt{(2b+8p-a^2)}$. Donc, les quatre termes de la proportion cherchée sont:

$$\tfrac{1}{4}\left[a-d-\sqrt{[(a-d)^2-16p]}\right]$$
$$\tfrac{1}{4}\left[a+d-\sqrt{[(a+d)^2-16p]}\right]$$
$$\tfrac{1}{4}\left[a+d+\sqrt{[(a+d)^2-16p]}\right]$$
$$\tfrac{1}{4}\left[a-d+\sqrt{[(a-d)^2-16p]}\right]$$

40) Un débiteur est tenu de payer les sommes a, a', a'', a''', etc., dans les termes n, n', n'', n''', mais il préfère d'acquitter sa dette entière $a+a'+a''+a'''$ $+$ etc., en une fois. Dans quel temps devra-t-il le faire, en supposant l'intérêt sur le pied de h pour cent, et que les intérêts des intérêts soient comptés?

R. Soient w, w', w'', w''', etc., les valeurs au comptant des paiements à termè, de sorte que

$$w = \frac{a}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^{n}}, \qquad w' = \frac{a'}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^{n'}},$$

$$w'' = \frac{a''}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^{n''}}$$ etc., l'expression

$$\frac{\log(a+a'+a''+a'''+\text{etc.})-\log(w+w'+w''+w'''+\text{etc.})}{\log\left(1+\frac{h}{100}\right)}$$

donne le temps cherché. L'unité de temps est la même que celle de n, n', n'', n''', etc.

41) Quelqu'un doit 40000 fr. qu'il ne peut payer comptant. Il convient avec son créancier de s'acquitter à la fin de chaque année d'une somme de 2500 fr.; les intérêts à 5 pour cent étant ajoutés annuellement à la dette. Il trouve qu'à la fin de la dernière année il sera redevable pour se libérer, de

quelque chose de moins que 2500 fr. Combien aura-t-il de moins à donner?

R. Environ 31,88 .... fr., de moins que 2500 fr.

42) On cherche quatre nombres tels, que leur somme soit $= a$; la somme de leurs carrés $= b$; la somme des douze produits de chaque nombre par le carré d'un des restants $= c$, et la somme des six produits du carré de chaque nombre par le carré d'un des restants $= d$. Comment trouver ces nombres?

R. La somme des produits des quatre nombres cherchés deux à deux est $= \frac{1}{2}(a^2 - b)$; la somme de leurs produits trois à trois $= \frac{1}{6}(a^3 - ab - 2c)$, et le produit de tous les quatre $= \frac{1}{24}(a^4 + 2a^2b - 3b^2 - 8ac + 12d)$. Donc les quatre nombres se trouvent par l'équation suivante:

$$x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}(a^2 - b)x^2 - \frac{1}{6}(a^3 - ab - 2c)x + \frac{1}{24}(a^4 + 2a^2b - 3b^2 - 8ac + 12d) = 0.$$

43) On cherche quatre nombres des données suivantes. Leur somme est $= a$; la somme de leurs carrés $= b$; la somme de leurs cubes $= c$; et la somme de leurs quatrièmes puissances $= d$. Comment trouver ces nombres?

R. La somme des produits des quatre nombres cherchés deux à deux est $= \frac{1}{2}(a^2 - b)$; la somme de leurs produits trois à trois est $= \frac{1}{6}(a^3 - 3ab + 2c)$, et le produit de tous les quatre $= \frac{1}{24}(a^4 - 6a^2b + 3b^2 + 8ac - 6d)$. Donc on trouvera les quatre nombres par l'équation suivante:

$$x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}(a^2 - b)x^2 - \frac{1}{6}(a^3 - 3ab + 2c)x + \frac{1}{24}(a^4 - 6a^2b + 3b^2 + 8ac - 6d) = 0.$$

De l'imprimerie des frères Unger.