druhý misto prwnjho; čtwrtý pak mjsto třetjho, a třetj misto čtwrtého, nezrussj se proporcý.

Důkaz. Kdykoli se má dokázati které prawdy, která se tkne proporcý arytmetycké, ať se ona obecně wyobrazý, totiž skrz $a \div a \pm d = b \div b \pm d$. Přisadjme k prwnjmu a k třetjmu audu $\pm m$, k druhému pak a k čtwrtému $\pm f$, nabudeme $a \pm m \div a \pm d \pm f = b \pm m \div b \pm d \pm f$. Zagisté tato proporcý nenj zrussena, protože gest w obau srownánjch stegný rozdjl $\pm d \pm f \mp m$. Ted proměňme třetj aud s druhým, a druhý s třetjm, kterau prácy latinjcy alternando gmenugj, nabudeme $a \div b = a \pm d \div b \pm d$, tato proporcý nenj zrussena, nebť obau srownánj gest stegný rozdjl; aby se nabylo rozdjlu w prwnjm srownánj, musyloby se a od b odnjti, a zbude rozdjl $b - a$; odegmeme také třetj aud od čtwrtého, a nabudeme $b \pm d - a \mp d$. Poněwadž pak se zmařj $\pm d$, a $\mp d$, zbude týž rozdjl $b - a$. Ano když se pjsse prwnj aud mjsto druhého, druhý mjsto prwnjho, čtwrtý pak mjsto třetjho a třetj mjsto čtwrtého, proporcý se nezrussj; tuto prácy nazýwagj latinjcy invertendo. My gi wykonagjce, nabudeme $a \pm d \div a = b \pm d \div b$, kdež se nalézagj owssem opět stegná srownánj, poněwadž magj stegný rozdjl w prwnjm srownánj gest owssem rozdjl $a - a \mp d = \mp d$, a rowně w druhém $b - b \mp d = \mp d$.

102. Každé nespogené proporcý gest summa zewnitřnjch audů rowná summě audů wnitřnjch; proporcý pak spogené gest summa zewnitřnjch audů dwakrát wětssj, než geden aud prostřednj.

Důkaz. Každá proporcý nespogená pjsse se obecně $a \div a \pm d = b \div b \pm d$. Abychom nabyli summy zewnitrnjch, neb konečných audů, musýme addowati prwnj aud k čtwrtému, summa bude $a + b \pm d$. Aby se nabylo summy wnitřnjch audů přidá se druhý

aud

aud k třetjmu, a nalezne se summa $= b + a \pm d$. Gest owssem tato summa wnitřnjch audů stegná s summau zewnitřnjch. Protože obsahugj w sobě obě stegné djly, ačkoli ne w stegném pořádku.

Ginač: Zagisté dle důwodu ted připomenutého wždy gest druhý aud složený z prwnjho a z rozdjlu, který má před sebau buď znamenj + neb —, a tak také gest gest čtwrtý aud složen z třetjho audu, a z téhož rozdjlu. N, gestli přidám k čtwrtému audu prwnj, mám summu, w které se nalézá prwnj aud, pak třetj, potom rozdjl; přidámli pak druhý aud k třetjmu, nabudu podobně summy, w njž se obsahugj tjž djlowé, totiž třetj aud, prwnj, a rozdjl. Gsauli pak w obau summách stegnj djlowé, musegj býti owssem též summy wespolek stegné.

W proporcý pak spogené gest summa zewnitřnjch audů dwakrát wětssj, než geden aud prostřednj.

Důkaz. Takowá proporcý wůbec takto se představuge $a \div a \pm d = a \pm d \div a \pm 2d$. Učiňme ted summu zewnitřnjch audů, to gest, z prwnjho a poslednjho, bude $a + a \pm 2d$, neb když budeme addowati $2a \pm 2d$. Nenjli tato dwakrát wětssj než prostřednj aud $a \pm d$? Protežeby se musyl tento dwakrát wzýti, kdyby měl býti stegný s tau summau; neb zagisté $2 \times (a \pm d) = 2a \pm 2d$. Pročež kdyby se prwnj aud někteté spogené proporcý gmenowal g, a poslednj f, tedyby musyl býti owssem prostřednj $\frac{g+f}{2}$.

103. K třem daným welikostem proporcý arytmetycké čtwrtau proporcyonálnj nalezti.

Prawidlo. Druhá welikost se přičte k třetj, a odegme se od té summy welikost prwnj daná, zbytek gest žádaná čtwrtá proporcyonálnj welikost.

Dů-

Důkaz. Poněwadž gest druhá welikost neb aud z prwnj welikosti neb audů a z rozdjlu složena, pročež když k nj přidáme třetj aud neb welikost, máme summu, w njž se nalézá prwnj aud, třetj, a rozdjl; pakli od této summy aud prwnj odegmeme, zbytek zagisté gest třetj welikost neb aud, a rozdjl. Gest pak summa z třetjho audu, a rozdjlu čtwrtý proporcyonálnj aud, pročež řečené prawidlo gest prawé.

Ginák. Proporcý nespogená se pjsse $a \div a \pm d = b \div b \pm d$. Addugme tedy třetj aud k druhému, nabudeme $b + a \pm d$, od té summy odegmeme a, zbude $b + a \pm d - a = b \pm d$. Nenjli to čtwrtý aud, kterého se nabude z daných třj?

Gesstě ginák. Ať gsau tři danj audowé a, b, c, a čtwrtý neznámý x, bude proporcý $a \div b = c \div x$. Z každé pak arytmetycké proporcý, (což ať newygde nikdý z paměti) dá se způsobiti rownost, když totiž prwnj aud k čtwrtému, a druhý k třetjmu přičteme, nabudeme dle (§. 102.) této rownosti: $a + x = b + c$. Chcemeli pak cenu welikosti x wěděti, musý x samé na lewé straně té rownosti před znamenjm stegnosti $=$ zůstati. Nedle gakým způsobem se dá a od x odlaučiti, bez proměny stegnosti připomenutých sum. Zagisté skrz prácy, kteráž stogj té naodpor, kterau gest spogeno a s x. Gest pak $a + x$ spogeno skrz addycý, což wygewuge $+$, mezy a a x psané, pročež na obau stranách té rownosti odegmauce a, dle axioma powědomého stegnosti nezrussjme, a nabudeme $a + x - a = b + c - a$; na lewé pak straně $a - a = o$, pročež $x = b + c - a$. Komu medle gest rowna žádaná čtwrtá welikost x? Zagisté $b + c - a$, to gest summa z druhé welikosti b a z třetj c, když se zmenssj tato summa o prwnj welikost. Gest tedy prawé to prawidlo, že se musý druhý aud k třetjmu

addo=

addowati, a od té summy prwnj aud odnjti, aby wyssel čtwrtý aud. Kdyby byl dán druhý aud b, třetj c, a čtwrtý d, a hledalo se prwnjho, měli bychom $y \div b = c \div d$, a z tohoby possla rownost $y+d = b+c$, z njž nalezneme dle předesslého způsobu $y = b+c-d$; prawidlo toto daufám, že každý bude mocy wypowědjti. Podobně kdyby se hledalo z daného prwnjho audu a, z druhého b, z čtwrtého d, třetjho audu z, měli bychom $a \div b = z \div d$, a z té proporcý rownost $a+d = b+z$. Pročežby bylo $a+d-b = z$ a t. d.

Přjklad. Budiž $a = 5$, $b = 7$, $c = 9$, tak gest $5 \div 7 = 9 \div x$; pročež $x = 7+9-5 = 11$. Zagisté tato proporcý $5 \div 7 = 9 \div 11$ gest prawá, protože gest w obém srownánj stegný rozdjl 2. Osteycham se zde wjc přjkladů připomjnati.

104. Mezy dwěma welikostmi prostřednj proporcyonálnj nalezti.

Prawidlo. Addugme dané welikosti, a dělme gich summu skrz 2, kwocyent bude žádaná prostřednj welikost.

Důkaz. Ať gest prwnj daná welikost a, druhá c, mezy nimi se žádá welikosti proporcyonálnj prostřednj x. Musý tedy býti $a \div x = x \div c$. Z čehož pogde rownost $2x = a+c$. Chcemeť pak mjti cenu gednoho x, pročež třeba 2 od 2 x odlaučiti; medle čjmž to způsobjme? — Zagisté tjm, což stogj naodpor té prácy, skrz niž sau 2 s x spogeny, tato pak gest multyplikacý, pročež skrz dywizý od 2 oswobodjme x, a stegnosti nezrussjme, když též na obau stranách rownosti včinjme, dle powědomého axioma, nabudeme tedy $\frac{2x}{2} = \frac{a+c}{2}$, neb skutečně na

lewé

lewé straně dywidugjce bude $x = \frac{a+c}{2}$. Toho důkazu nebylo giž ani třeba, neb sme dokázali, že gest summa konečných audů w spogené proporcý dwakrát wětssj, než prostřednj aud, pročež gest gegj polowice stegná s prostřednjm audem.

Přjklad. Ať gest $a = 8$, $c = 16$, bude $x = \frac{8+16}{2}$ $= \frac{24}{2} = 12$, a gest zagisté $8 \div 12 = 12 \div 16$. Protože se nalézá rozdjl w prwnjm srownánj 4, a týž také w druhém srownánj.

105. Poznamenánj. Kterak gest §. 103. vžitečný, sezná pozorný čtenář, když budeme o logarytmjch, to gest, takowých počtech mluwiti, kterých vžjwánj obrátj každau multyplikacý w addycý, a každau dywizý w subtrakcý. Vžitek §. 104. gest také welmi znamenitý, neb když gest w které přjpadnosti wjc welikostj dáno, a nenj přjčiny, abychom gednu spjš, než kteraukoli ginau wzali, bljžilibychom se gak k neywětssj, tak y k neymenssj neywjc; obyčeg máme mezy těmito prostřednj proporcyonálnj wzýti. Ku přjkladu: některý statek nese gistého roku neywětssj vžitek dwa tisýce reynských, giná léta wždy menssj, neymenssj pak buď ssest set, abychom se tedy gak k onomu, tak y k tomuto neywjc bljžili, wezmeme prostřednj proporcyonálnj vžitek mezy těmito, genž bude $= \frac{2000 + 600}{2} = 1300$, kterýž počet se dá tak přigjti, gakoby nesl tolik reynských ten statek každý rok. Podobná přjpadnost se nalézá také při barometru, to gest, takowém nástrogi, který gest z sklené trubky, w njž gest rtut. Ta trubka gest swrchu zawřena, a dole rtuti stogjcý otewřena; w této trubce nesmj býti žádného

powětřj. Rtut w nj brzy wystupuge, brzy padá dle powětřj, když gest ono giž těžssj, giž lehčj. Žádalliby kdo wěděti, gak wysoko obyčegně na kterém mjstě ku přjkladu w Praze rtut w té trubce stáwá, musylibychom prostřednj weyssku mezy neywětssj a neymenssj wzýti, když sme prwé wsselikého stupowánj a snižowánj rtuti skrz mnohá léta pozorowali, a tak nabudeme žádané obyčegné weyssky rtuti pro Prahu, kterau latinjcy nazýwagj altitudo barometri media. Z takowé prostřednj weyssky barometru seznáme, které mjsto gest wyšssj, než které giné; čjm menssj gest ta prostřednj weysska barometrowá, tjm wyšssj gest mjsto, w kterém se nalézá. Zkussenost pak nás včj, že gest tato w Čechách mnohem menssj, než w mnohých okolnjch kraginách, z čehož saudjme, že ležj české králowstwj welmi wysoko, pročež požjwá welmi čistého a zdrawého powětřj. Nalezenj prostřednj proporcyonálnj welikosti mezy dwěma danýma také gest potřebné w wyměřenj piwnjho neb winného sudu. Sud zagisté nenj wálec, protože má w prostředku břicho, může pak se mjti za wálec, který gest prostřednj arytmetycký mezy wálcem, gehož zpodnj planina (basis) gest dno, a mezy wálcem, gehož zpodek (basis) gest z okrsslku břicha; weysska pak gest stegná s dýlkau sudu, gakauž y také musegj mjti oba teď gmenowanj wálcowé.

Opět: W městském stawitelstwj, neb archytektuře, to gest, w uměnj, kterakby se stawenj městské slussně postawilo, to nalezenj prostřednj welikosti gest mezy dwěma danýma newyhnutedlné. Sám Bůh stawitel celého swěta neywýborněgssj zgewil to Ssalomaunowi, gakž to w pjsmě čteme, aby dal při Gerusalemském chrámu swětnice takto stawěti. Dýlka gich aby dwakrát byla wětssj, nežli ssjř; weysska pak aby byla prostřednj arytmetycká proporcyonálnj welikost mezy dýlkau a

ssjřj;

ssjřj; ku přjkladu: kdyby byla ssjř ssesti sáhů, musyla=by býti dýlka dwanácti sáhů, a weyssta $= \frac{6+12}{2} = \frac{18}{2} = 9$ sáhů. A zagisté takowá swětnice bude dle prawidla stawena, podlé kterého dal Ssalomaun chrám stawěti.

O srownánj a proporcý geometrycké.

106. Co gest srownánj geometrycké, a gaké gest geho znamenj?

Toto srownánj gest wztaženj gedné welikosti k druhé z toho ohledu, abychom wěděli, kolikrát wězý gedna w druhé, neb gaký djl gest gedna z druhé. Poněwadž pak se nelze toho ginák dowěděti, leč skrz dywizý, pročež znamenj tóho srownánj sau dwa punktowé, geden na druhém psanj (:), kteřj se stawj mezy prwnjm a druhým, neb předcházegjcým a následugjcým audem. Kdyby tedy byl prwnj aud a, a druhý b, byloby srownánj mezy nimi a:b, cožby se čtlo: a přirownáwá se k b. Giné znamenj geometryckého srownánj gest, když ge gako některý lomek wyobrazýme, kterého čtedlnjk gest druhý aud, a gmenowatel prwnj. Tjm způsobem byloby teď připomenuté srownánj $= \frac{b}{a}$.

107. Která srownánj geometrycká gsau stegná?

Stegná geometrycká srownánj gsau ta, která magj stegný kwocyent, genž wegde, když se druhý aud prwnjm zdywiduge; ku přjkladu: $3:6 = 4:8$. Poněwadž w prwnjm srownánj kwocyent gest dwě, a w druhém týž, proto sau stegná tato srownánj.

108. Poznamenánj. Když se bezewsseho adjectivum srownánj neb proporcý slowy wypowjdá, mjnj se wždy srownánj geometrycké, a tak také proporcý. Vměnj toto gest welmi wzácné a potřebné. Z té přjčiny Latinjcy gmenugj srownánj ratio, které slowo také rozum wyznamenáwá, gakoby chtěli řjcy, že komu gest toto vměnj neznámé, rozumu nemá. Zagisté myslliti nic giného nenj, než gednu wěc k druhé přirownáwati, a z toho přirownánj slussně vsuzowati. Wssecka prawidla, gichž w každodennjm počjtánj vžjwáme (gako R gula de Tri), magj zde swůg základ. Vměnj, gakby se wystawěl byt pewný, pohodlný, a pěkný, neginač lze nabyti, než powědomostj wlastnosti srownánj a proporcý. Každý stawitel má mjti před očima tělo člowěčj, kterak ge způsobil neywyšssj twůrce Bůh. Zagisté ti audowé, kteřj se nalézagj gen po gednom, v přjkladu: nos, vsta a t. d. sau w prostředku, kteřj pak sau po dwau, ty stwořil Bůh po stranách, a syc w gedné wzdálenosti od prostřednjch, v přjkladu: oči, vssi, ruce, nohy a t. d. Každý djl k druhému, a také k celému tělu má swau slussnau proporcý. Kde tedy při kterém domu magj státi dwéře? — snad po straně? — Okno gedno snad má býti wyšssj, neb menssj, neb wzdáleněgssj od prostředka, než druhé? a t. d.

109. Když gest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, gest také $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, kde gest třeba wěděti, že lze znamenj stegnosti gedno neb druhé srownánj buď předsaditi, neb zasaditi.

Důkaz. Známoť gest, že když množjme stegné welikosti stegnau welikostj, stegnost nerussjme. Budeme tedy multyplikowati $\frac{a}{b}$, též y $\frac{c}{d}$ skrz $\frac{bd}{ac}$, a na=

nabudeme $\frac{abd}{bac} = \frac{cbd}{dac}$. Pakli tyto lomky w neyžnižſſj wyřčenj zděláme, a napjſſjce druhý lomek nažpřed a prwnj zadu, dosáhneme $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Poněwadž pak tito lomcy dwě ſtegná ſrownánj předſtawugj, může ſe také pſáti $a:b = c:d$. Z čehož ſe tato zawjrka včinj, že když ſau dwa lomcy ſtegnj, nezruſſj ſe gich ſtegnoſti, třebasbychom pſali mjſto čtedlnjků gich gmenowatele, a mjſto gmenowatelů gich čtedlnjky, k. p. poněwadž $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, geſt také $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, a t. d.

110. Při každé multyplikacý ſe ſrownáwá tak gednička s gednjm faktorem, gako ſe druhý faktor ſrownáwá s produktem.

Důkaz. Budiž geden faktor F, druhý faktor f, produkt pak P. Powědomo geſt, že wycházý z multyplikowánj dwau faktorů produkt; pjſmena pak ſe weſpolek multyplikugj, když ſe poſtawj wedlé ſebe, pročež bude produkt z těch faktorů F f, tento pak produkt ſe předſtawuge také pjſmenem P, pročež ſe dosáhne této rownoſti: $Ff = P$. Ted dělme oba audy ſkrz f, a nezruſſjmek rownoſti dle axioma powědomého. Y nabudemek $\frac{Ff}{f} = \frac{P}{f}$, neb $F = \frac{P}{f}$. Prwnj celá welikoſt F může ſe způſobem lomku wyobrazyti, když napjſſeme pod nj 1, pročež budeme mjti rownoſt $\frac{F}{1} = \frac{P}{f}$. Sauli pak tito lomcy weſpolek ſtegnj, lzek z nich včiniti, gakž známo, proporcý, kteréž, ginác napjſſjce též lomky, nabudeme $1:F = f:P$, to geſt: gak ſe ſrownáwá gednička

dnička s gednjm faktorem, tak se druhý faktor srowná wá s produktem.

111. W každé dywizý tak se srownáwá dywizor s dywidendem, gako gednička s kwocyentem; neb, což gest gedno: Gmenowatel tak se srownáwá s čitedlnjkem, gako gednička s lomkem.

Důkaz. Budiž dywidend D, dělitel d, kwocyent Q. Poněwadž také znamenj dywizý gest přjmá čára wděलaná mezy dywidendem nad nj, a dělitelem pod nj psaným, z čehož wyplýwá kwocyent, pročež máme kwocyent předně skrz $\frac{D}{d}$, potom skrz Q wyobrazený; a tedy rownost $\frac{D}{d} = Q$ neb $\frac{D}{d} = \frac{Q}{1}$, ano y $\frac{d}{D} = \frac{1}{Q}$ (n. 109.), prwnj rownost gináč pjssjc nabudeme $d : D = 1 : Q$, t. g. dělitel se tak srownáwá s dywidendem, gako gednička s kwocyentem. Gest pak gmenowatel spolu dělitel, a čitedlnjk dywidend, též lomek kwocyent; pročež se také negináč srownáwá gmenowatel s čitedlnjkem, gako gednička s lomkem.

112. Co gest exponent některého srownánj?

Exponent některého srownánj gest ten kwocyent, který wycházý, když se dělj následugjcý aneb předcházegjcým. Zde třeba opáčiti, že gest cos giného exponent některé cyfry, takéž cos giného exponent některé mocnosti. Onen totiž na wrssku cyfry psaný okazuge gegj pořádek, tento pak okazuge kolikrát se má která welikost sebau množiti, pročež gsau oba od exponentu srownánj rozdjlnj.

113. Každé srownánj geometrycké obmezuge se předcházegjcým audem a exponentem. Gestli tedy předcházegjcý aud $= a$, a exponent $= m$, tedy bude následugjcý aud am, pročež srownánj $a : am$. Když následugjcý aud gest wětšj než předcházegjcý, exponent m buď celý počet, neb neprawý lomek wyznamenáwá. Kdyby pak aud následugjcý byl menšj, než předcházegjcý, m bude lomek prawý wyznamenáwati.

Důkaz. Následugjcý aud gest dywidend, předcházegjcý gest dělitel, a exponent gest ten kwotus, který wycházý z této dywizý (dle §. 112.). Gest pak dywidend wždy stegný s produktem z dělitele w kwocyent, pročež gest wždy následugjcý aud stegný s produktem z předcházegjcýho audu w exponent. Gestli tedy předcházegjcý aud $= a$, a exponent m, tedy nelze, aby byl následugjcý aud giný, než am, pročež máme zde obmezené srownánj $a : am$.

Přjklad. Ať gest $a = 6$, $m = 3$, bude $a : am = 6 : 18$, nebť 18 zagisté $= 6 \times 3$ a t. d. Kdyby následugjcý aud měl býti menšj, než předcházegjcý, musylby se mjsto m celého počtu mjniti prawý lomek, Vp. $8 : 2$. Medle gaký tu gest exponent srownánj? Wždy owšem tento se nagde, když následugjcý aud se dělj předcházegjcým, pročež bude zde exponent $= \frac{2}{8}$ neb $\frac{1}{4}$, owšemť prawý lomek, srownánj pak $8 : 2$ gest stegné s tjmto $8 : 8 . \frac{2}{8}$, neb $8 : 2 = 8 : \frac{8 \times 2}{8}$.

114. Srownánj geometrycké se neměnj, když množjme neb děljme oba audy stegnau welikostj.

Důkaz prwnj. Každé takowé srownánj lze gako lomek psáti, gehož čtedlnjk gest následugjcý, a gmenowatel předcházegjcý aud; cena pak lomku se ne-

neměnj, když množjme neb děljme gak čtedlnjk, tak gmenowatel gednau welikoſtj; pročež ſe také cena ſrownánj neměnj, když gak s předcházegjcým, tak y s náſledugjcým audem podobně nakládáme, w p. $3:6 = 3 \times 4 : 6 \times 4 = 12 : 24$. Zagiſté w poſlednjm ſrownánj geſt týž exponent, který geſt w prwnjm, tedyk ſe nezměnilo ſrownánj prwnj ſkrz multyplikacý. Podobně $4:12 = \frac{4}{2} : \frac{12}{2} = 2:6 = \frac{2}{2} : \frac{6}{2} = 1:3$, které ſrownánj geſt ſtegné s prwnjm pro týž exponent.

Důkaz druhý. Každé ſrownánj ſe pjſſe wůbec $a:am$. Množme tedy oba audy ſkrz c, a nabudeme $ac:amc$. Prawjm, že $a:am = ac:amc$, protože gak w onom, tak y w tomto ſrownánj geſt ſtegný exponent m. Ted dělme oba audy welikoſtj d, bude $a:am = \frac{a}{d} : \frac{am}{d}$. Nedle gaký geſt exponent w druhém ſrownánj? toho nabudeme, když zděljme náſledugjcý aud $\frac{am}{d}$ ſkrz předcházegjcý $\frac{a}{d}$. Muſýme owſſem tento lomek $\frac{a}{d}$ gakož dělitel obrátiti, a gjm dywidend $\frac{am}{d}$ multyplikowati; pročež nabudeme $\frac{am}{d} \times \frac{d}{a} = \frac{amd}{da} = m$, kterýž exponent také má prwnj ſrownánj $a:am$.

115. **Co geſt proporcý geometrycká, gak neſpogená, tak y ſpogená; co konečnj a zewnitřnj; co proſtřednj, a wnitřnj audowé?**

Proporcý geometrycká geſt ſtegnoſt dwau ſrownánj geometryckých. Slowe neſpogená, když geſt ze čtyř rozličných audů; spogená pak, když gest druhý aud spolu také třetj. W spogené tedy sau gediné tři rozličnj audowé, prwnj prostřednj, a poslednj.

Konečnj audowé sau prwnj a poslednj. Prostřednj sau druhý a třetj.

116. Nespogená proporcý obmezuge se prwnjm, a třetjm audem, a exponentem; spogená pak gediné prwnjm audem a exponentem.

Důkaz. Každé srownánj se obmezuge předcházegjcým audem a exponentem; gest pak proporcý stegnost dwau srownánj, pročež ta srownánj budau mjti dwa předcházegjcý audy, totiž prwnj a třetj. Když tedy sau tito známj, a exponent, který musý týž býti při obém srownánj, tedy gest giž proporcý obmezena. Budiž prwnj aud a, třetj aud b, a exponent m, bude zagisté proporcý $a : am = b : bm$. K obmezenj spogené proporcý gest třeba gen prwnjho audu, a exponentu, protože gest třetj aud stegný s druhým. Wyobrazýme wůbec takowau proporcý, když mjsto třetjho audu b postawjme druhý am, a také mjsto d we čtwrtém audu tauž cenu am^2 napjšseme, bude tedy $a : am = am : amm = am : am^2$, pročež obecné předstawenj takowé proporcý gest, $a : am = am : am^2$.

117. W každé proporcý nespogené gest produkt z konečných audů stegný s produktem z prostřednjch. W spogené pak gest produkt zewnitřnjch stegný s kwadrátem gednoho prostřednjho audu, pročež gest aud prostřednj stegný s kwadrátnjm kořenem dobytým z produktu z zewnitřnjch audů.

Důkaz prwnj. Budiž proporcý $a : b = c : d$, která se takto wyslowj: Gak se srownáwá a s b; tak se srownáwá c s d; neb kolikrát wězý a w b, tolikrát

likrát wěžý c w d; neb gaký djl gest a od b, takowý djl gest c od d, z čehož zawjrám, že kwocyenti, kterjž wygdau, když b skrz a, a d skrz c zdywidugi, musegj býti stegnj, aneb že gest $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Tyto lomky zděleyme w stegný gmenowatel, kterého nabudeme, když gak b, tak a skrz c, též d a c skrz a rozmnožjme; pročež wygde $\frac{bc}{ac} = \frac{ad}{ac}$, kterjž lomkowé sau stegnj proto, že sme gich ceny nezrussili zděla-gjce ge w stegný gmenowatel. Tito pak zcela stegnj lomkowé magj stegné gmenowatele; pročež musegj také mjti stegné čtedlnjky. Pročež $ad = bc$; gest pak ad produkt z konečných, bc pak produkt z prostřednjch audů, pročež gest produkt onen stegný s tjmto.

Přjklad. $a = 3$, $b = 9$, $c = 5$, $d = 15$, pročež $3 : 9 = 5 : 15$. Nenjli $3 \times 15 = 9 \times 5$? to gest $45 = 45$?

Důkaz druhý. Dwě stegná srownánj, neb proporcý se pjssj skrz aud prwnj, aud třetj a exponent gakž powědomo $a : am = b : bm$. Zmnožjce prwnj aud čtwrtým, nabudeme abm; množjce pak druhý aud třetjm dosáhneme amb. Nenjli $abm = amb$? poněwadž sau w obau produktjch stegnj faktorowé, třebas w nestegném pořádku, protože pjsmena žádné ceny od mjsta nemagj.

Důkaz třetj, genž se wztahuge na předesslé. Zagisté druhý aud proporcý gest produkt z prwnjho audu a z exponentu, čtwrtý pak aud gest produkt z třetjho a z exponentu. Gestli tedy množjme druhý aud třetjm, máme w tom produktu tyto faktory: prwnj aud, třetj aud, a exponent. Pakli množjme prwnj čtwrtým audem, nabudeme w témž produktu

opět

opět prwnjho, třetjho audu, a exponentu. Gsau tedy tito produktowé, gakož ze stegných faktorů, weſpolek stegnj.

W ſpogené proporcy geſt produkt z konečných audů ſtegný s kwadrátem geduoho proſtřednjho audu.

Důkaz. Pjſſe ſe takowá proporcý wůbec $a:am = am:am^2$, produkt tedy z konečných audů geſt $a \times am^2 = a^2m^2$. Nenjli to kwadrát proſtřednjho audu? nebť tento na druhau mocnoſt powýſſen $(am)^2 = a^2m^2$. Pročež z produktu z konečných audů dobytý kwadrátnj kořen muſý owſſem býti aud proſtřednj. Tjm způſobem kdybychom měli tuto ſpogenau proporcý $a:x = x:b$, tedyby ſe z toho včinila rownoſt $x^2 = ab$, pročež aby na lewé ſtraně kořen gediné ſtál, muſý ſe na obau ſtranách kořene kwadrátnjho dobyti, bude tedy $x = \pm\sqrt{ab}$.

Přjklad. $a = 3$, $b = 12$, tedy $3:x = x:12$, z čehož $x^2 = 36$, a $x = 6$; geſt pak zagiſté $3:6 = 6:12$.

118. Geſt tedy každý kořen kwadrátnj, proſtřednj proporcyonálnj welikoſt mezy gednickau, a mezy kwadrátem; a gednička ſe tak ſrownáwá s kořenem koſtkowým, gako ſe ſrownáwá kwadrát toho kořene s koſtkau.

Důkaz. Dle §. 110. máme $1:F = f:P$; nenjli pak každý kwadrát produkt z dwau ſtegných faktorů? každý z nich ſlowe kořen, pročež poſtawjme w proporcý teď připomenuté mjſto každého faktora kořen, a budeme geg gmenowati R. Mjſto produktu poſtawjme kwadrát, který nazweme Q. Nabudemeť tedy mjſto předeſſlé této proporcý $1:R = R:Q$. Nedle nenjli kořen kwadrátnj mezy gedničkau 1, a kwadrátem Q proſtřednj proporcyonálnj aud?

Přj=

Přjklad. Budiž kwadrát Q = 25, geho kořen kwadrátnj gest owssem 5, bude tedy 1 : 5 = 5 : 25. Zagisté gest zde stegnost dwau srownánj, poněwadž magj obě stegný exponent 5. Opět se kostka nalezne, když se kořen gegj kwadrátem množj; deymek zde, aby bylo F = R, a f = Q, též P = C, t. g. ať wyznamenáwá R kořen, Q kwadrát a C kostku. Poněwadž R × Q = C, nabudeme této proporcý: 1 : R = Q : C, to gest: gednička se tak srownáwá s kořenem kostkowým, gako gegj kwadrát s kostkau.

119. Dwa stegnj produktowé mohau se w proporcý geometryckau zdělati.

Důkaz. Proporcý tato znikne, když wezmeme faktory gednoho produktu za konečné audy, a faktory druhého produktu za prostředný audy. V přjkladu: Bylby produkt AD = BC. Wezmemeli faktory A, D za konečné audy; B pak a C za prostředný, nabudeme prawé proporcý A : B = C : D. Proč? zagisté gest A : B = A : B, protože každá wěc gest s sebau stegná. Nedle čjm gest množena welikost A w produktu swrchu daném AD = BC? owssem skrz D. Tauto pak welikostj D množme gak třetj, tak čtwrtý aud této proporcý A : B = A : B, a nezrussjmek gegjho druhého srownánj, dle (§. 114.). Nabudeme tedy A : B = AD : BD. Gest pak dle dané rownosti AD = BC; pročež se může w proporcý ted připomenuté mjsto AD postawiti BC, a nabude se A : B = BC : BD. Když pak se dělj třetj a čtwrtý aud této proporcý skrz B, srownánj se nezměnj, pročež wygde $A : B = \frac{BC}{B} : \frac{BD}{B}$, to gest, A : B = C : D, čehož bylo dokázati. Ať se dá tato rownost x = mf. Zagisté x také gest produkt, gehož druhý faktor se mjnj 1, pročež pogde pro-

porcý

porcý $1 : m = f : x$. Podobně $s m - s = d g$. Gacý medle faktorowé sau w lewém audu $s m - s$? Odpowjdám, že gest geden s, druhý pak $m - 1$. Přeswědčjme se o tom, když rozdělime tento produkt $s m - s$ tau welikostj, která se w obau djlech nalézá, totiž skrz s, (kteráž práce slowe resolucý, neb rozdělánj produktů w faktory). Gest pak $\frac{s m}{s} - \frac{s}{s} = m - 1$, pročež geden faktor toho produktu gest dosažený kwocyent $m - 1$, druhý pak gest welikost s w obau djlech se nalézagjcý, kterau sme wzali za dělitel. Pročež gediné okazugjce multyplikacý mezy faktory s, a $m - 1$ můžeme psáti $(s)(m - 1) = s m - s$; pročež také $(s)(m - 1) = d g$. Z čehož pogde proporcý $s : d = g : m - 1$. Kdyby se dali stegnj produktowé tito: $a x + b x + c x + x = d e$; rozdělagjce gako prw prwnj produkt w faktory, a multyplikacý gediné okážjce, nabudeme $(a + b + c + 1)(x) = d e$, z čehož wygde proporcý $a + b + c + 1 : d = e : x$.

Přjklad. $4 \times 6 = 3 \times 8$, bude prawá proporcý $4 : 8 = 3 : 6$. Komuž lze o stegnosti těchto srownánj pochybowati?

Napomenutj. Kyž sobě každý čtenář wssimne srdečně důkladně dokázané této prawdy! nebť sei gj w celé Matematyce welmi často užjwá; že lze totiž z dwau stegných-produktů, neb z některé rownosti wždy proporcý učiniti. Též paměti hodna gest prawda §. 117., že gest produkt z konečných audů, w každé proporcý stegný s produktem z prostřednjch audů, kterauž prawdu y takto lze wypowědjti: Z každé proporcý lze učiniti rownost.

120. Proporcý se nerussj, když množjme neb děljme prwnj, a třetj aud, a tak také druhý a čtwrtý aud stegnau welikostj.

Dů-

Důkaz. Pjssjce proporcý wůbec skrz $a:am = b:bm$, multyplikugme prwnj a třetj aud skrz c, nabudeme $ac:am = bc:bm$. Zagisté exponent prwnjho srownánj gest $\frac{am}{ac} = \frac{m}{c}$, a druhého $\frac{bm}{bc} = \frac{m}{c}$, pročež se proporcý nezrussj. Podobněby wyssli stegnj exponentowé, kdybychom množili druhý a čtwrtý aud tauž welikostj. Dělme ted prwnj a třetj aud skrz a, druhý pak a čtwrtý skrz f, nabudeme $\frac{a}{d} : \frac{am}{f} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{f}$. Abychom nabyli exponenta prwnjho srownánj, dělme $\frac{am}{f}$ skrz $\frac{a}{d}$, to gest, skrz tento obrácený aud onen množme, a nabudeme $\frac{amd}{af} = \frac{md}{f}$. Když se též včinj w druhém srownánj, nabudeme exponenta $\frac{bmd}{bf} = \frac{md}{f}$, zagisté sau tu exponenti stegnj. Zde gest základ nazwané wlastké praktyky.

Kolikerým způsobem se mohau audowé w proporcý proměniti bez auhony proporcý?

Sedmerým způsobem se dagj proměniti: Prwnj způsob gmenugj Latinjcy alternando, druhý invertendo, třetj componendo, čtwrtý dividendo, pátý convertendo, ssestý, který latinského gména nepotřebuge, když totiž powýssjme každého audu na mocnost daného exponenta, sedmý, když dobudeme z každého audu kořene daného exponenta. Každý způsob řádně wyswětljme a dokážeme ho.

Alternando gest tolik, gako z třetjho audu včiniti druhý, a z druhého třetj, čjmž se předce stegnosti srownánj nerussj.

Důkaz. Budiž proporcý $a : am = b : bm$, bude alternando, $a : b = am : bm$; exponent pak prwnjho srownánj $\frac{b}{a}$, druhého $\frac{bm}{am} = \frac{b}{a}$. Gsau tedy exponenti stegnj.

Invertendo tolik gest, gako mjsto prostřednjch audů postawiti konečné, a mjsto těchto postawiti prostřednj, neb druhý aud včiniti prwnjm, a prwnj druhým, též třetj čtwrtým, a čtwrtý třetjm, čjmž se předce nezrussj stegnosti srownánj.

Důkaz. Budiž proporcý $a : am = b : bm$, budek invertendo $am : a = bm : b$, exponent pak prwnjho srownánj $\frac{a}{am} = \frac{1}{m}$, a druhého srownánj $\frac{b}{bm} = \frac{1}{m}$; sau tedy exponenti stegnj, pročež proporcý prawá.

Componendo gmenugeme ten způsob, když druhý aud přisadjme k prwnjmu, též čtwrtý aud přisadjme k třetjmu. Gistjm, že se summa z prwnjho a druhého audu tak srownáwá s druhým, neb s prwnjm, gako se srownáwá summa z třetjho a čtwrtého s čtwrtým neb třetjm audem.

Důkaz. Budiž opět proporcý $a : am = b : bm$, bude componendo $a + am : am = b + bm : bm$, neb $a + am : a = b + bm : b$. W prwnj přjpadnosti gest exponent prwnjho srownánj $\frac{am}{a+am}$, druhého pak $\frac{bm}{b+bm}$. Oba tito exponenti sau lomcy, kterýchž gakž gmenowatel tak y čitedlnjk se dá tauž welikostj děliti, a syce můžeme děliti gak čitedlnjk tak y gmenowatel lomku prwnjho skrz a, druhého pak skrz b. I včiňmež to, a dosáhneme $\frac{am}{a+am} = \frac{m}{1+m}$;

tak

tak také $\frac{bm}{b+bm}=\frac{m}{1+m}$. Gsauk zagisté na obau stranách stegnj exponenti, pročež proporcý gest prawá. W druhé přjpadnosti gest exponent prwnjho srownánj $\frac{a}{a+am}=\frac{1}{1+m}$, druhého pak $=\frac{b}{b+bm}=\frac{1}{1+m}$, opět stegnj exponenti.

Dividendo gest ten způsob, když se odegme druhý aud od prwnjho, a čtwrtý od třetjho, podobně gistjm, že se tak srownáwá rozdjl mezy prwnjm a druhým audem s druhým audem, gako srownáwá se rozdjl mezy třetjm a čtwrtým s audem čtwrtým. Může se také w prwnjm srownánj mjsto následugjcýho audu prwnj, a w druhém srownánj mjsto následugjcýho audu třetj postawiti. Tomuto způsobu netřeba důkazu, protože sme okázali geho gistotu giž w třetjm způsobu.

Convertendo slowe ten způsob, když se prwnj aud přisadj k druhému, a třetj k čtwrtému. Gistjm, že se tak srownáwá prwnj aud s summau z prwnjho a z druhého audu, neb s rozdjlem mezy nimi, gako se srownáwá třetj aud s summau z třetjho a čtwrtého audu s rozdjlem mezy nimi.

Důkaz. Známá proporcý $a:am=b:bm$ bude convertendo $a:a\pm am=b:b\pm bm$. W prwnjm srownánj gest exponent $\frac{a\pm am}{a}=1\pm m$, w druhém pak srownánj gest exponent $\frac{b\pm bm}{b}=1\pm m$; zagisté s prwnjm stegný.

Šestého způsobu se dokáže takto. Proporcý giž tolikrát opáčené $a:am=b:bm$ každého audu