…ковъ.

Sätze

aus der

Mechanik,

die

den Herren Hörern der angewandten Mathematik

vorzutragen pflege

Stanislaus Wydra,

k. k. Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität zu Prag.

Prag,
mit Schriften der k. k. Normalschul-Buchdruckerey 1795

An die Herren Hörer der mathematischen Wissenschaften

an der

Universität zu Prag.

Gegenwärtige Schrift hat ihr Daseyn Ihnen zu verdanken, darum tritt sie auch unter Ihren Namen ans Licht.

Einst äußerte ich im Kollegium den Wunsch einige Sätze aus der Mechanik durch den Druck bekannt machen zu können. Sie befriedigten ihn, da Sie sich alsobald erboten die Druckkosten zu tragen.

Ja Sie drangen in mich etwas mehreres, als ein seichtes Verzeichniß der abgehandelten Sätze herauszugeben, um nun Ihrem Begehren Genüge zu leisten, bewies ich auch manchen schwerern, und wichtigern Satz.

Zum Grunde meiner Arbeit legte ich des Hrn. Hofraths Kästners Anfangsgründe der angewandten Mathematik; und benützte zugleich Wolfs cursum mathematicum, des Chales mundum mathematicum, de la Caille Mechanik, Belidors Ingenieurwissenschaften, Sturms Mathesim Juvenilem, Karstens Anfangsgründe, und den Lehrbegriff der mathematischen Wissenschaften, Jacobi Bernoulli Opera, Eberhards neue Beyträge zur Mathesi applicata, Walchers kurzen Inhalt der mechanischen Kollegien, Sprengels Handwerke ꝛc.

Was für Absicht hatte ich aber sowohl bey der Aeußerung meines Wunsches, als auch bey der Ausführung desselben? — — Ihren Nutzen, und dann die Befriedigung derjenigen, denen Ihr Fortgang am Herzen liegt: daß sie aus diesen Blättern näher einsehen, zu welchen erhabenen Kenntnissen man Ihnen den Weg in unseren Kollegien bahne.

Nehmen Sie also meine schätzbarsten H. H. Schüler diese Frucht meiner wenigen Nebenstunden, als einen Beweis der zärtlichsten Liebe zu Ihnen an; und entsprechen Sie vollkommen der Erwartung Ihres Freunds

Stanislaus Wydra.

Von dem mathematischen Hebel.

1. Wenn eine der entgegengesetzten Kräfte, die Wirkung der andern gänzlich hindert, so entsteht zwischen ihnen ein Gleichgewicht.

2. Die Kräfte werden durch Gewichte dargestellt; jene können zwar nach verschiedenen, diese aber sich selbst überlassen, allein nach Vertikalrichtungen wirken; doch kann man, die letzteren vermittelst der Scheiben, um welche die Schnur, an der sie hängen, gewunden wird, auch aufwärts und seitwärts wirken machen. Bey einem Gleichgewichte heißt die eine der entgegengesetzten Kräfte schlechtweg Kraft, die andere Last.

3. Ist die Erde eine Kugel, so stossen alle Richtungen der Schwere in ihrem Mittelpunkte zusammen; sie lässen sich aber doch in kleinen Entfernungen für gleichlaufend annehmen.

4. Weil die veränderte Gestalt das Gewicht derselben Menge von Materie nicht ändert, so läßt sich jeder Körper als ein Punkt ansehen; und dieser wirkt in jedem Orte seiner Richtung gleich viel.

5. Wenn an beyden Enden einer geraden unbiegsamen und nicht schweren wagrechten Linie, (die ein mathematischer Hebel heißt) gleiche Gewichte hängen, und ihre Mitte unterstützt wird, so entsteht ein Gleichgewicht.

Da an beyden Seiten alles einerley ist, so müßte das zweyte Gewicht ebenfalls sinken, oder steigen, wenn das erste sänke, oder stiege; dies ist aber ungeräumt, also ruhen sie, und die Mitte der Linie trägt die beyden Lasten. Welches auch bey einer Scheibe, die nicht schwer ist, erfolgen muß, wenn sie sich um ihren Mittelpunkt bewegen läßt, und an willkührlichen Punkten ihres Umfangs gleiche Kräfte nach entgegengesetzten Tangenten wirken.

6. Wenn die Kräfte $+ F$, und P am Hebel der zweyten Art im Gleichgewichte sind, und man $A D = A C$ und $Q = + F$ nimmt, so sind auch Q, P am Hebel der ersten Art im Gleichgewichte und umgekehrt. Fig. 1.

7. Wenn an einem Hebel $B A = A C$, der Ruhepunkt aber in B ist, und eine Kraft Q bey C niederwärts, eine andere $F = 2 Q$ bey A aufwärts zieht; so sind beyde Kräfte im Gleichgewichte. Fig. 2.

Denn wäre in B ein Gewicht $P = Q$ und in A die Unterlage, so entstünde ein Gleichgewicht, und die Unterlage trüge $P + Q = 2 Q$; so muß dasselbe auch erfolgen, wenn in B ein Nagel, und in A die Kraft $2 Q$ ist.

Oder: es ist an einem Hebel sowohl der zweyten, als der ersten Art eine einfache Kraft in einer doppelten Entfernung, mit einer doppelten Kraft in einer einfachen Entfernung im Gleichgewichte.

8. Wenn n eine bestimmte ganze Zahl bedeutet, und am Hebel der zweyten Art $A C B$, (Fig. 3.) $A B = n A C$, und $+ F = n P$ ist; unter diesen Umständen aber F und P im Gleichgewichte sind, so wird auch ein Gleichgewicht an dergleichen Hebel zwischen

Kräf-

Kräften, deren eine = P, die andere $(n+1.)\ P$ ist, seyn, wenn ihre Entfernungen $(n+1)\ AC$ und AC sind.

Denn ist $AD = AC$ so ist $Q = nP$ mit P im Gleichgewichte, und die Unterlage oder eine Kraft R in A angebracht, muß $nP + P$, das ist $(n+1)\ P$ tragen; nun wird dasselbe verbleiben, wenn in D statt Q ein Nagel vorgeschlagen wird; und dann wird man an einen Hebel der zweyten Art ein Gleichgewicht zwischen den Kräften $(n+1)\ P$, und P haben, deren Entfernungen $AD = AC$, dann $AD + AC = AC + nAC = (n+1)\ AC$ sind.

Es ist nun eine dreyfache Kraft in einer einfachen, mit einer einfachen Kraft in einer dreyfachen Entfernung im Gleichgewichte, der Hebel mag von welcher Art immer seyn.

9. An einem Hebel der ersten Art DAB, (F. 3.) oder der zweyten Art ACB befinde sich in der Weite AB von der Unterlage das Gewicht P, und in der Weite AD, oder $AC = \frac{1}{n}\ AB$, ein Gewicht $= nP$, das im ersten Falle niederwärts, im zweyten aufwärts zieht; ich behaupte, es sey zwischen beyden ein Gleichgewicht.

Ist $n = 2$, so erhellet die Wahrheit des Satzes aus (7.) ist $n = 3$, so ist der Satz aus (8.) richtig wo $n = 2$ seyn muß, so auch für $n = 4$. ꝛc. und für jede ganze Zahl, weil der Schluß allemal von einer Zahl, auf die nächstgrößere fortgeht.

10. Wenn beym Hebel DAB (F. 3.) die Unterlage in A ist, m, n ganze Zahlen bedeuten, und $Q : P = m : n = AB : AD$, so ist ein Gleichgewicht.

Es

Es sey $AC = \frac{AB}{m}$; so ist $+F = mP$, mit P, und wenn dieses weg kömmt, mit $-F = mP$ im Gleichgewichte. Sollte aber Q mit $-F$ im Gleichgewichte seyn, so müßte $DA = nAC$ seyn, indem $m : n = Q : P$ das ist $P = \frac{nQ}{m}$, folglich $-F = mP = nQ$ ist (9). Nun ist hier zwischen Q, und P auch ein Gleichgewicht, weil Q die Kraft $-F$, und diese $+F$, $+F$ aber die Kraft P vernichtet.

Ist aber $DA = nAC$: und $AC = \frac{AB}{m}$, so ist auch $DA = n\frac{AB}{m}$, woraus $m : n = AB : DA$, und $m : n = Q : P$, folglich $Q : P = AB : DA$.

Jede Rationalverhältniß läßt sich auf die Verhältniß zwoer ganzen Zahlen, und eine jede Irrationalverhältniß auf eine beynahe ihr gleiche Rationalverhältniß bringen.

Also sind an jedem Hebel Kräfte im Gleichgewichte die sich verkehrt wie die Entfernungen verhalten (6).

11. Wenn die Gewichte sich nicht verkehrt wie die Entfernungen verhalten, so sind sie nicht im Gleichgewichte.

12. Ein mechanisches Momment, ist das Produkt aus dem Gewichte in die Geschwindigkeit, ein statisches aber, ist das Produkt aus dem Gewichte in die Entfernung; sind nun diese zwey entgegengesetzten Mommente einander gleich, so sind es auch jene.

Daß

Daß Hr. Hofrath Kästner diesen Beweis des Hauptsatzes der Statik schon vor 1752 erfunden, und ihn dem seligen Jesuiten Franz Huberti schon damals berühmten Professor der Mathematik zu Fulda, hernach Lehrer ebenderselben Wissenschaft zu Würzburg, und Huberti dem unsterblichen Stepling zur Beurtheilung mitgetheilet habe, dessen erwähnte ich schon im Jahre 1784 in einer gedruckten Schrift.

Mit Huberti machte ich mich im Jahre 1766 zu Prag bekannt, und unterhielt mit ihm seit dem Tode meines besten Freundes Steplings einen Briefwechsel. Er starb zu Würzburg 1789 den 3. Februar. Die rinztelnischen Annalen melden von ihm im ersten Jahrgange 1789. pag. 98. der 6ten Beylage, folgendes.

„Den 3. Febr. d. J. starb zu Würzburg „der Exjesuit Hr. Franz Huberti, Professor „der Mathematik, und Aufseher der dorti„gen Sternwarte, er war ein gründlicher „Mathematiker, und hat in dem Fache ver„schiedene schöne Schriften herausgegeben; „dagegen aber ein um destoweniger aufgeklär„ter Theolog. Ich habe mich mit ihm noch „vor wenigen Jahren sehr oft über mathema„tische Gegenstände, nie ohne Nutzen, und „Vergnügen unterhalten. Sobald er aber „auf Religionsmaterien zu sprechen kam — „weg war der so gründlich denkende, der so „vernünftig urtheilende Mathematiker, und „der lebhafte Jesuit stand wieder da, für „Newton, Leibniz, und Wolf that es ihm „aber doch leid, daß diese braven Männer

„ewig

„ewig in der Hölle braten sollten, hier wuß-
„te er sich dann glücklicherweise noch zu helfen,
„und behauptete in allem Ernste, daß sie samt,
„und sonders auf dem Todbette waren con-
„versi geworden."

Der lustige Hr. Recensent wollte die An-
hänglichkeit des würdigen Jesuiten Huberti,
an seine katholische Religion lächerlich ma-
chen, er machte sich aber selbst lächerlich, da
er ihm eine gründliche Gelehrtheit einräumte,
und doch über seine Religion spottete; mit
was ist dann die Gleichgültigkeit des Hrn.
Recensenten gegen die Religion vereinbart,
wer ist dann ein aufgeklärter Theolog ? Ver-
muthlich derjenige, der keine Religion hat.
Denn sind ihm alle Religionssysteme gleich-
gültig, so ist er sicher von keinem überzeugt.

13. Daß sich die Gewichte verkehrt wie die Ent-
fernungen von dem Ruhepunkte verhalten, dies wird
man auch nach der Art des Archimedes, wie sie von
Mack Laurin, vorgetragen wird, beweisen. Dasselbe
wird nach dem Versuch des Junckenikels sinnlich ge-
macht.

14. Es sind ein paar Kräfte nebst den Stellen
gegeben, wo sie am Hebel angebracht sind. Man
verlangt den Ort der Unterlage für das Gleichgewicht.

Wie sich die Summe beyder Gewichte zur
Summe ihrer Abstände verhält, so verhält
sich ein Gewicht, zum Abstande des andern.

15. Zwey Gewichte haben nur einen Ort der
Unterlage fürs Gleichgewicht, in welchen sie zugleich
vereinigt sind, und der ihr gemeinschaftlicher Schwer-
punkt heißt.

16.

16. Das Momment der Summe zweyer in dem Schwerpunkte vereinigter Gewichte, das sie haben um einen Hebel von beyderley Art um einen willkührlichen Punkt zu drehen, ist gleich der Summe der einzelnen an ihren Stellen befindlichen Gewichte.

17. Der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes mehrer Gewichte, die einen Hebel um einen Punkt zu drehen bemüht sind, ist gleich der Summe der Mommente, dividirt mit der Summe der Gewichte.

Vom Schwerpunkte.

18. Ein Schwerpunkt, ist jener Punkt des Körpers, durch welchen eine Ebene (Schwerebene) gezogen, ihn in zwey gleich schwere Theile theilt; sind zwey gleiche Theile eines Körpers zugleich von einerley Schwere, daß ihre Mommente einerley sind, so ist sein Mittelpunkt, zugleich der Schwerpunkt. Alle Körper haben ihren, und zwar einen einzigen Schwerpunkt, aber nicht den Mittelpunkt der Größe, dieser kömmt nur den ordentlichen Körpern zu. Zur Bestimmung eines Schwerpunktes braucht man drey Schwerebenen, zwoer Durchschnitt, ist der Durchmesser der Schwere, die dritte Schwerebene bringt den zweyten Durchmesser der Schwere hervor; der Durchschnittspunkt zweyer Durchmesser der Schwere ist dann der Schwerpunkt.

19. Den Schwerpunkt einer geraden Linie zu finden.

Man wird diese Aufgabe durch die Integralrechnung auflösen.

20. Den Schwerpunkt des Umfangs eines Dreyecks zu finden.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist aus dem mundo mathematico des berühmten Jesuiten

ten Miliets des Chales entlehnt, sie ist für jeden Baumeister höchst wichtig, daß er sein Gebäude mit festem Dachstuhle zu versehen wisse.

21. Den Durchmesser der Schwere eines Dreyeckes zu finden.

Er ist jene Linie die die Spitze des Dreyecks mit der Mitte der gegenüber stehenden Seite verbindet; weil durch sie alle mit der erwähnten Seite gleichlaufend gezogene Linien halbirt werden.

22. Den Schwerpunkt eines Dreyeckes zu finden.

23. Der Schwerpunkt eines Dreyeckes ist um $\frac{2}{3}$ des Durchmessers der Schwere von der Spitze entfernt.

Dies wird sowohl durch die gemeine Geometrie, als durch $\frac{\int x y d x}{\int y d x}$ bewiesen, welche Integralforml für ein gleichschenklichtes Dreyeck gilt, für ein ungleichseitiges ist sie $= \frac{\int c x y d x}{a} : \frac{\int c y d x}{a}$; wo a den Durchmesser der Schwere, und c die Höhe des Dreyeckes bedeutet.

24. In einem gleichseitigen Dreyecke, ist der Schwerpunkt derselben zugleich der Schwerpunkt seines Umfanges. Fig. 4.

Denn es sey $A F = 1$ so ist $A B = \sqrt{\frac{3}{4}}$ und $M B = \sqrt{\frac{3}{16}}$; nun ist O der Schwerpunkt des Umfangs $A C + A F + C F$, weil D, E, B die Mitten der Seiten sind, und die Winkel $B D E$, $D B E$ durch die Linien $D N$, $B M$ halbirt werden. Es ist aber das Dreyeck

D B E

$D\ B\ E$ gleichseitig, indem jede seiner Seiten $= \frac{1}{2}$ ist, folglich sind M, N die Mitten ihrer Seiten, also ist O zugleich der Schwerpunkt des Dreyeckes $D\ B\ E$, also $O\ B = \frac{1}{3}\ M\ B$, nun ist $M\ B = \sqrt{\frac{3}{16}}$ weil $M\ E = \frac{1}{4}$ und $B\ E = \frac{1}{2}$ ist, also $O\ B = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{16}}$, ferner $2\ M\ B = A\ B$ folglich $\frac{2}{3}\ M\ B = \frac{A\ B}{3}$, nun $M\ B = \sqrt{\frac{3}{16}}$, und $A\ B = \sqrt{\frac{3}{4}}$, und $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}$ oder $\frac{2}{12}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ also ist hier der Schwerpunkt des Dreyeckes zugleich der Schwerpunkt seines Umfangs.

25. Die Diagonal ist der Durchmesser der Schwere des Parallelogramms.

Der Durchschnittspunkt zwoer Diagonallinien, ist der Schwerpunkt des Parallelogramms.

Die Diagonallinien sind nur in einem rechtwinklichten Parallelogramme einander gleich.

Das Loth aus dem Schwerpunkte eines solchen Parallelogramms auf eine Seite gefällt, halbirt sie.

Das Loth aus dem Schwerpunkte eines rechtwinklichten Dreyecks auf einen Katheten gefällt, ist von der Spitze des rechten Winkels um $\frac{1}{3}$ des Katheten entfernt.

26. Den Schwerpunkt eines Trapeziums, es mag zwo Seiten gleichlaufend, oder nicht haben, dann eines Vielecks, endlich auch eines Systems mehrerer Punkte zu finden.

Der Schwerpunkt eines Kreises, und ordentlichen Vielecks, wie auch jedes ordentlichen Körpers ist der Mittelpunkt der Größe.

27.

27. Der Durchmesser der Schwere eines Kreisbogens ist der ihn halbirende Halbmesser.

Will man nun den Bogen in einer wagrechten Ebene erhalten, so muß sein in dem itzt genannten Halbmesser vorkommender Schwerpunkt unterstützt werden.

28. Wird ein Kreisbogen in zwey gleiche Theile getheilt, so verhält sich die Summe ihrer Sehnen, zur Sehne des ganzen Bogens, wie der Abstand des Schwerpunktes einer der obern Sehnen von dem Mittelpunkte zum Abstande des gemeinschaftlichen Schwerpunktes beyder Sehnen von demselben Mittelpunkte.

Diese Proportion gilt auch für die Summe der Sehnen, die vier gleiche Theile eines Bogens spannen, auch für acht, sechzehn rc.

Ist nun der Bogen in unendlich viele gleiche Theile getheilt, so ist die Summe der Sehnen dieser Theile mit dem ganzen Bogen beynahe einerley; ihr Schwerpunkt, ist dann der Schwerpunkt des Bogens, und der Abstand des Schwerpunktes einer Sehne von dem Mittelpunkte ist der Halbmesser.

29. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens findet man durch folgende Proportion: wie sich seine Länge zu seiner Sehne verhält, so verhält sich der Halbmesser, zum Abstande des Schwerpunktes von dem Mittelpunkte, welcher Abstand in jenem Halbmesser zu nehmen ist, der den Bogen halbirt.

Beyspiel: Der Bogen sey 55°; er muß dann auf solche Theile gebracht werden, in welchen der Halbmesser der gemeinen Sinustafeln gegeben ist, nämlich 113 : 355 =

$$\frac{35500000}{113} = 314159; \text{ dann } 180^\circ : 55^\circ = 314159 : \frac{55^\circ \cdot 314159}{180^\circ} = 0,95991$$

und dies ist die Länge des Bogens in den gesuchten Theilen des Halbmessers. Ferner ist der Sinus von $27^\circ\ 30'$, 46174, welcher doppelt genommen 92348 die Sehne des Bogens giebt, folglich 0,95991 : 0,92348 = 1 zu dem gesuchten Abstande, nämlich 0,96204.

30. Will man die Peripherie eines Kreises p den Halbmesser r nennen; so ist $\frac{p}{2} : 2r = r : \frac{4r^2}{p}$ und dies ist der Abstand des Schwerpunktes der halben Peripherie vom Mittelpunkte.

Hieraus erhellet, daß die Bestimmung des Schwerpunktes eines Theils des Umkreises, von der Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser abhänge. Ist diese nicht bekannt, so ist auch jene unbekannt.

Dies sah de Vausenville ein, der seine vorgebliche Quadratur des Kreises auf dem von ihm gefundenen Schwerpunkte jedes Zirkelausschnittes gründete.

Sein Werk ward an die hiesige Universität etwa vor 11 Jahren von dem Staatsminister Fürsten Kaunitz zur Beurtheilung geschickt, der berühmte Tessanek bekam den Auftrag es zu untersuchen; fand aber Vausenville habe den Schwerpunkt eines Zirkelausschnittes, folglich auch die damit verbundene Quadratur des Kreises nicht gefunden; indem er den Satz fürwahr annimmt: die Veränderung der Figur

gur verändere das Gleichgewicht nicht; folglich das Momment, oder das Produkt aus der veränderten Distanz in das Element der Fläche außer Acht setzt. Bey ihm ist auch eine Wage von ungleichen aber gleichschweren Armen richtig.

31. Der Schwerpunkt eines Zirkelausschnittes ist der Schwerpunkt des Bogens, der mit $\frac{2}{3}$ des Halbmessers beschrieben wird.

32. Ist die Peripherie $= P$, der Halbmesser $= r$; so ist $\frac{P}{2} : 2r = \frac{2}{3}r : \frac{8r^2}{3P}$, und dies ist der Abstand des Schwerpunktes eines Halbkreises von dem Mittelpunkte.

33. Den Schwerpunkt eines Zirkelabschnittes zu finden.

34. Der Durchmesser der Schwere eines Prisma ist jene Linie, welche die Schwerpunkte beyder Grundflächen mit einander verbindet.

Der Schwerpunkt eines jedweden Prisma ist der Mittelpunkt dieser Linie, dies wird durch $\int xBdx : \int Bdx$ dargethan, wo B die Grundfläche ist.

35. Den Durchmesser der Schwere einer dreyeckichten Pyramide zu finden.

Die zwo Linien, die die Spitze, den Schwerpunkt eines gleichlaufenden Schnitts mit der Grundfläche, und dieser ihren Schwerpunkt mit einander verbinden, machen eine grade Linie, nämlich den Durchmesser der Schwere aus.

36. Den Schwerpunkt einer dreyeckichten Pyramide zu finden.

37.

37. Der Schwerpunkt einer dreyeckichten Pyramide ist von der Spitze derselben um $\frac{3}{4}$ des Durchmessers der Schwere entfernt.

Um soviel ist auch der Schwerpunkt jeder andern Pyramide, und eines Kegels von der Spitze entfernt. Dies zeigt sowohl die gemeine Geometrie, als die Integralrechnung.

38. Den Schwerpunkt eines gestutzten Kegels von gleichlaufenden Grundflächen zu finden.

39. Der Schwerpunkt einer halben Kugel ist von dem Mittelpunkte derselben um $\frac{3}{8}$ des auf der Grundfläche senkrechten Halbmessers entfernt.

Dies wird erstens die Elementargeometrie, dann auch die Integralrechnung darthun.

40. Den Schwerpunkt eines jedweden Körpers empirisch zu bestimmen.

Von der Guldins-Regel.

41. Jede Fläche, welche durch die Bewegung einer geraden Linie; und jeder Körper, welcher durch die Bewegung einer Fläche entsteht, ist gleich dem Produkte aus der erzeigenden Größe in den Weg ihres Schwerpunkts.

Denn die erzeugende Größe ist in ihrem Schwerpunkte vereinigt, folglich steckt sie so vielmal in der erzeugten Größe, so vielmal ihr Schwerpunkt in seinem Wege enthalten ist.

Diese Regel gab Paul Guldin S. J. in seinem Werke de centro gravitatis 1635 heraus.

42. Den Flächeninhalt eines Rechteckes durch die Guldins-Regel zu finden.

Weil jedes schiefwinklichte Parallelogramm einem rechtwinklichten von gleicher Grundlinie, und gleicher Höhe gleich ist; so weiß man auch seinen Flächeninhalt, wenn man jenen gefunden hat. So ist auch die Ausrechnung jedes Dreyeckes, und jedes Vieleckes bekannt.

43. Einen Kreis durch die Guldins-Regel zu quadriren.

Heißt der Halbmesser als Erzeuger r der Weg seines Schwerpunktes, oder die Peripherie, die von seiner Hälfte beschrieben wird p, so ist die Quadratur des Kreises $= p\,r$.

Heißt aber die Peripherie P, der Halbmesser r, so ist die Quadratur desselben Kreises $= \frac{P\,r}{2}$ der vorigen sicher gleich, weil $\frac{P}{2} = p$ ist.

Bekanntermassen versteht man durch die Quadratur eines Kreises seinen Flächeninhalt, sie ist noch nicht gefunden, weil man die genaue Verhältniß zwischen den Durchmesser und der Peripherie nicht weiß, wovon sie abhängt.

Man versteht auch durch die Quadratur eines Kreises, die Findung des Quadrats, welches so groß ist, als der Kreis selbst.

Wenn man keine große Strenge bey der Auflösung dieser Aufgabe sucht, so kann man sich der Art gebrauchen, die der berühmte Maler, Geometer und Dichter, Albrecht Dürer, in seinem Werke Unterweisung mit dem Zirkel und Richtscheid im Jahre MDXXV vorschlägt.

Sie

Sie lautet also: der Durchmesser wird in 8 gleiche Theile getheilt, und um zwey solche Theile verlängert, das darüber beschriebene Quadrat ist beynahe so groß, als der Kreis.

Denn ist die Seite dieses Quadrats $= x$; die Diagonal desselben ist ohnehin $= 10$; folglich $100 = x^2 + x^2$, oder $50 = x^2$. Es sey nun die Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= 7 : 22$. so wird $7 : 22 = 8 : \frac{176}{7} = 25 \frac{1}{7}$ seyn; man multiplizire diese Peripherie mit $\frac{8}{4} = 2$; so wird der Kreis $= 50 \frac{2}{7}$ nur um $\frac{2}{7}$ größer als das Quadrat seyn.

44. Die krumme Fläche eines rechtwinklichten Zylinders und Pyramide, wie auch beyder Körper ihren Kubikinhalt durch die Guldins-Regel zu finden.

45. Ist der Erzeuger einer Kugelsfläche $\frac{p}{2}$, so ist (30) der Abstand seines Schwerpunktes $\frac{4 r^2}{p}$ und der Weg desselben $r : p = \frac{4 r^2}{p} : 4 r$; wird nun dieser Weg $4 r$ mit der erzeugenden Größe $\frac{p}{2}$ multiplizirt; so bekömmt man die Kugelfläche $= 2 r p$. Sie ist dann viermal so groß als der größte Kreis.

46. Die Entfernung des Schwerpunktes eines Halbkreises ist (32) $\frac{8 r^2}{3 p}$. Der Halbkreis selbst als der Erzeuger einer Kugel $= \frac{p r}{4}$, folglich die Kugel durch die Guldins-Regel gleich dem Produkte aus dem

Wege des Schwerpunktes der erzeugenden Größe in dieselbe. Der Weg aber ist $r : P = \frac{8\,r^2}{3\,P} : \frac{8\,r}{3}$ also die Kugel $= \frac{2\,r^2\,P}{3} = 2\,r\,P \cdot \frac{r}{3}$ gleich einer Pyramide, deren Grundfläche die Kugelfläche, und die Höhe der Halbmesser ist.

47. Den Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels durch die Guldins-Regel zu finden. (Fig. 5.)

Der Erzeuger eines solchen Kegels ist das Trapez $PNGK$, wenn es sich um die Linie NP herumdreht, man theile es durch die senkrechte GH in das Rechteck NH, und das Dreyeck GHK. Wenn $NG = c$, $PK = b$ ist, so ist $HK = b-c$, und weil in O der Schwerpunkt des Dreyeckes ist, folglich $HR = \frac{b-c}{3}$, und weil in M der Schwerpunkt des Rechteckes vorkömmt, folglich $SH = \frac{c}{2}$. Also $SR = \frac{b-c}{3} + \frac{c}{2} = \frac{2b - 2c + 3c}{6} = \frac{2b+c}{6}$.

Der Flächeninhalt des Rechteckes in S einem Punkte seiner Vertikalrichtung als ein Gewicht Q angesehen ist $= a\,c$, wenn $NP = a$ ist; so auch $L = \frac{ab-ac}{2}$ der Flächeninhalt des Dreyecks in R gesetzt.

Nun hat man einen Hebel SR, bey dem die Gewichte Q, L und SR bekannt sind; so wird sich aus (14) der Ort X der Unterlage fürs Gleichgewicht finden lassen, nämlich $Q + L$

$= ac +$

$= ac + \frac{ab - ac}{2} = \frac{2ac + ab - ac}{2} = \frac{ab + ac}{2}$:

also $\frac{ab + ac}{2} : \frac{ab - ac}{2} = \frac{2b + c}{6} : SX$, folglich $SX = \frac{2b^2 - bc - c^2}{6b + 6c}$, und $PX = \frac{c}{2} + \frac{2b^2 - bc - c^2}{6b + 6c} = \frac{6bc + 6c^2 + 4b^2 - 2bc - 2c^2}{12b + 12c}$

$= \frac{4bc + 4b^2 + 4c^2}{12b + 12c} = \frac{bc + b^2 + c^2}{3(b + c)}$ und der Weg des Schwerpunktes, wenn die Verhältniß des Halbmessers zur Peripherie $r : p$ ist, wird seyn $\frac{p}{r}\left(\frac{b^2 + bc + c^2}{3(b + c)}\right)$. Der Erzeuger aber ist $= \left(\frac{b + c}{2}\right) a$ folglich der körperliche Inhalt des Kegels $= \frac{p}{r}\left(\frac{b^2 + bc + c^2}{3(b + c)}\right)$
$\left(\frac{b + c}{2}\right) a = \frac{p}{2r}(b^2 + bc + c^2)\frac{a}{3} = \left(\frac{pb^2}{2r} + \frac{pbc}{2r} + \frac{pc^2}{2r}\right)\frac{a}{3}$. Nun ist $\frac{pb^2}{2r}$ die obere, $\frac{pc^2}{2r}$ die untere Grundfläche, und $\frac{pbc}{2r}$ die mittlere geometrisch proportional zwischen beyden; also ist der Kubikinhalt eines solchen abgekürzten Kegels gleich der Summe dieser Kreisflächen multiplizirt mit dem Drittheil der Höhe.

Dies bewies auf eine ganz andere Art schon 1687 Jakob Bernoulli Op. T. I. p. 311.

An=

Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte auf die Berechnung der Futtermauer bey den Festungswerken.

48. **Voraussetzungen:** a) Jede Mauer ist so zu betrachten, als stünde sie auf einem vollkommen festen Grunde, dergestalt, daß sich die Grundfläche der Mauer, wenn dieselbe von einer Potenz gestoßen oder gezogen würde, auf ihrem Grunde neigen könnte, wie z. B. ein Parallelepipedum, welches auf einem Tische steht.

b) Jede Mauer stellt man sich so vor, als ob sie aus einem einzigen Steine bestünde, daß demnach die feindliche Kraft die Mauer zwar umwerfen, aber nicht zerbrechen könnte.

c) Jeder Vertikaldurchschnitt der Mauer läßt sich statt der Mauer selbst annehmen. Denn, da eine Mauer aus unendlich vielen solchen Flächen besteht, die unter einander parallel, und auf dem Horizonte senkrecht sind, so muß das von der ganzen Mauer gelten, was von einem solchen Durchschnitt bewiesen wird.

d) Die Kraft, welche durch bf immer ausgedrückt wird, ist hier eigentlich die Last, oder der Druck des Erdreichs, der von der Mauer muß im Gleichgewichte erhalten werden; weil aber diese Last der Inhalt eines Durchschnittes des Erdreichs ist, so wird sie durch bf nämlich durch ein Rechteck angezeigt.

e) Weil aber ein Durchschnitt der Mauer statt der Mauer selbst, und ein Durchschnitt des Erdreichs statt des ganzen Erdreichs genommen, und beyde als Gewichte angesehen werden; so müssen sie auf einerley Art gebracht werden; indem sich nur jene Gewichte wie ihre Räume verhalten, die von einerley Art sind. Nun macht ein Kubikfuß des Erdreichs $\frac{2}{3}$ eines Kubikfußes des Mauerwerks, folglich muß der Inhalt des Erdreichs mit $\frac{2}{3}$ multiplizirt werden, daß er mit

dem

dem Flächeninhalte der Mauer von einerley Art würde.

f) Die Erfahrung lehrt uns, daß eine frisch aufgehäufte und nicht geräumte Erde, der nichts widersteht, nach verschiedenen Winkeln sich abschiebe. Die Abhangslinie der gemeinen Erde macht mit Horizonte einen Winkel von ungefähr 45 Graden, die sandigte einen spitzigern, und die fette einen stumpfern, wir werden hier die gemeine betrachten.

g) Ist die Erde hinter den Futtermauern geräumt, so muß man den gefundenen Ausdruck für die frisch aufgeworfene durch 2 dividiren.

49. Zu finden wie dick die Mauern seyn müssen, welche sowohl auf der vordern, als hintern Seite bleyrecht aufgeführt sind, wenn sie durch ihre Schwere der Gewalt, welche sie leiden, das Gleichgewicht halten sollen. (Fig. 6.)

Es sey der Durchschnitt einer solchen Mauer BK, die Kraft, welche sie nach der Richtung AB umzustossen, oder nach der entgegengesetzten CD an sich zu ziehen bemüht ist, sey bf, der Umdrehungspunkt K, $BF = CK = a$, $FK = y$. Der Schwerpunkt des Rechteckes O, wo das Rechteck $= ay$ vereinigt, durch seine Richtung OI die Grundlinie FK halbirt, folglich ist sein Momment $\frac{ay^2}{2}$, und das Momment der Kraft in D angebracht ist bfa; also $\frac{ay^2}{2} = bfa$, oder $y^2 = 2bf$ und dann $y = \pm\sqrt{2bf}$.

50. Eine Futtermauer wird auf beyden Seiten bleyrecht aufgeführt, man verlangt ihre Dicke, daß sie mit dem Drucke des Erdreichs, welches hinter ihr aufgeworfen ist, das Gleichgewicht halte. (Fig. 7.)

Es

Es sey der Durchschnitt des Erdreichs $NFKH$, der Mauer KC, die Linie $GH = HK = CL = a$, die gesuchte Dicke $HC = y$.

Weil der Winkel $FHN = 45°$ wegen dem Quadrate GK, und das Erdreich innerhalb des Raums NFH vom Boden getragen wird, so hat die Mauer nur das in dem Dreyecke FKH enthaltene zu erhalten. Dieses Dreyeckes sein Inhalt $\frac{a^2}{2}$ ist in seinem Schwerpunkte I vereinigt, seine Richtungslinie IS mit FH parallel, weil auf gleiche Art eine Kugel auf der schiefen Fläche FH herabrollen würde.

So läßt sich dieser Inhalt in S denken, und davon in K durch folgende Proportion übertragen; $HK : HS = \frac{a^2}{2} : \frac{HS . a^2}{2 HK} = \frac{a^2}{6}$. $\frac{a^2}{6}$ ist nun die in K stossende, oder in D ziehende Kraft, sie wird mit der Mauer von einerley Art seyn, wenn man sie mit $\frac{2}{3}$ multiplizirt, folglich $= \frac{2 a^2}{18} = \frac{a^2}{9}$, wovon die Hälfte genommen giebt $\frac{a^2}{9} . \frac{1}{2} = \frac{a^2}{18}$ weil das Erdreich geräumt ist.

Der Inhalt des Durchschnitts der Mauer ay, die Unterlage C, die Entfernung des in O vereinigten Inhalts $MC = \frac{y}{2}$. Die Entfernung der vorigen Kraft $\frac{a^2}{18}$ ist $LC = a$. folglich $a : \frac{y}{2} = ay : \frac{a^2}{18}$, woraus $\frac{a^3}{18} = \frac{a y^2}{2}$

oder $\frac{2a^2}{18} = y^2$, oder $\frac{a^2}{9} = y^2$, und $\frac{a}{3} = y$.

Man fand (49) die Dicke der Futtermauer $y = \sqrt{2bf}$, hier ist aber $bf = \frac{a^2}{18}$, also $y = \sqrt{\frac{2a^2}{18}} = \sqrt{\frac{a^2}{9}} = \frac{a}{3}$.

51. Zu finden wie dick die Mauern, welche auf der einen Seite bleyrecht aufgeführt sind, auf der andern aber eine Abdachung haben, oben seyn müssen, wenn sie durch ihren Widerstand mit der Kraft, welche sie umzustossen sucht, im Gleichgewichte seyn sollen. Fig. 8.

Das Mauerrecht PR ist immer $= \frac{MT}{5} = d$, die Höhe MT des Durchschnittes dieser Mauer $PLMT$ sey $= c$. Die gesuchte obere Dicke $LM = RT = y$. Der Inhalt des Dreyeckes PLR ist in dem Schwerpunkte N vereinigt und als ein Gewicht angesehen $= \frac{cd}{2}$, dessen lothrechte Richtung NQ die Grundlinie in Q so schneidet, daß $PQ = \frac{2}{3}d$ werde, folglich ist sein Momment in Rücksicht der Unterlage P, $\frac{cd^2}{3}$

Des Rechteckes LT sein Inhalt cy ist in dem Schwerpunkte G und $RS = \frac{y}{2}$, also sein Abstand von $P = d + \frac{y}{2}$, und sein Moment $cdy + \frac{cy^2}{2}$.

Man

Man nehme statt der stossenden Kraft nach OM, die ziehende gleiche und entgegengesetzte bf. nach der Richtung LK an; ihre Entfernung von P wird $PK = c$, und ihr Momment bfc seyn; nun soll zwischen ihr und der Mauer ein Gleichgewicht entstehen, also muß ihr Momment dem Mommente der Mauer, dies ist der Summe der Mommente des Dreyeckes und des Rechteckes, woraus sie besteht, gleich seyn. Man hat dann $bfc = \frac{cd^2}{3} + cdy + \frac{cy^2}{2}$, oder $bf = \frac{d^2}{3} + dy + \frac{y^2}{2}$.

Wird diese Gleichung geordnet, so bekömmt man $bf - \frac{d^2}{3} = \frac{y^2}{2} + dy$, oder $2bf - \frac{2d^2}{3} = y^2 + 2dy$, wird das Quadrat rechter Hand ergänzt, so erfolgt $2bf - \frac{2d^2}{3} + d^2 = y^2 + 2dy + d^2$, oder $2bf + \frac{d^2}{3} = y^2 + 2dy + d^2$, und die Quadratwurzel ausgezogen giebt $\pm \sqrt{\left(2bf + \frac{d^2}{3}\right)} = y + d$, oder $\pm \sqrt{\left(2bf + \frac{d^2}{3}\right)} - d = y$.

Beyspiel. $bf = 52\frac{1}{2}$ Quadratschuh, $d = 6'$ folglich $\pm \sqrt{(2bf + \frac{1}{3}d^2.)} = \sqrt{117} = \sqrt{1170000} = 10' \frac{81}{100} = 10'\ 9''\ 8'''$. also $\pm \sqrt{(2bf + \frac{1}{3}d^2)} - d = 4'\ 9''\ 8'''$ welches die gesuchte obere Dicke der Mauer anzeigt.

Wer

Wer sich mit diesem Stoffe mehr bekannt machen will, der lese Belidors Ingenieurwissenschaft 1. Buch; Beyträge zur Ingenieurwissenschaft vom F. Gr. Kinsky; Leopolds Freyh. von Abfaltern Abhandlung von dem Drucke der Gewölber auf ihre Seitenmauern.

Eine andere Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte.

52. Ein Körper fällt, wenn seine Richtungslinie nicht unterstützt wird, je größer nun sein Grund ist, je fester steht er. Daher kann ein Mensch auf einer Ferse nicht stehen, weil sie wegen ihrer Rundung den Boden beynahe nur in einem Punkte berührt; doch kann er auf einer Fußsohle, obschon hart, stehen, weil sie ziemlich breit ist, und die Richtungslinie vermittelst gehöriger Wendung des Leibes innerhalb derselben erhalten werden kann.

Der sicherste Stand eines Menschen ist, wenn beyde Fußsohlen unterstützt werden, in welchem Falle sein Grund ein desto größeres Viereck ist, je länger die Fußsohlen, und je mehr sie von einander entfernt sind. Sein Gehen ist ein beständiges Fallen, er könnte nicht fortrücken, wenn nicht seine Richtungslinie außer der vordern Fußsohle fiele, welches er durch das Anprellen an den Boden der Spitze der hintern Fußsohle bewirkt, und sie alsobald, um nicht zu stürzen, vorwärts hinüber setzt.

Die vierfüßigen Thiere richten ihren Gang so ein; sie erheben mit Zurückstossen des Bodens den linken hintern Fuß, und schieben ihren Schwerpunkt mehr auf die rechte Seite fort, wodurch er zu seinem Grunde ein Dreyeck zwischen den dreyen noch ruhenden Füssen bekömmt, darauf rücken sie mit dem linken vordern, dann auf gleiche Art, wie Anfangs mit dem rechten hin-

hintern, und endlich mit dem rechten vordern Fuße vorwärts.

Jene Maler und Bildhauer irren nun sehr, welche den Gang der Pferde so entwerfen, als höben sie wechselweise den rechten vordern, und den linken hintern, dann den linken vordern, und den rechten hintern Fuß auf. Siehe Alphonsus Borellus de motu animalium libr. 1. p. 156.

Ein Körper kann auf einem sehr schmalen Grunde sicher ruhen, wenn er durch einen andern mit ihm verbundenen Körper einen neuen Schwerpunkt bekömmt, der entweder sehr nahe an den Grund, oder in den Grund selbsten, oder darunter fällt. Im ersten Falle ist sein Momment sich um die Unterstützung zu bewegen sehr gering, im zweyten keins, im dritten gar negativ. Hieraus lassen sich die 5te und 6te Aufgaben in Schwentners mathematischen Erlustigungen 1ten Thl. auflösen und beweisen, nämlich zu machen, daß ein Hölzel, darinn zwey Messer überzwerch stehen, auf dem Finger mit seinem untern Theile ruhe. Dann einen Löffel vorne bey der Schaufel an einen Tisch zu hängen, daß er nicht abfalle. Eben läßt sich das wunderbare der Sailtänzer hieraus erklären.

Von dem physikalischen Hebel.

53. *BAD* ist ein schwerer Hebel, sein Gewicht *H*, sein Schwerpunkt *V*, die Unterlage in *A*, die Kraft *P* ist gegeben, man sucht die Last *Q*. (Fig. 9.)

Die Schwere des Hebels *H* ist in *V* vereinigt, also ein Gewicht, womit zugleich die Last *Q*, und nicht allein mit der Kraft *P* im Gleichgewichte seyn muß. Man stelle sich vor; *Q* bestehe aus zwey Theilen *m* und *n*.

Der

Der erste würde von H, der zweyte von P erhalten; jenen findet man durch folgende Proportion $BA : AV = H : m$, diesen aber durch $BA : AD = P : n$, folglich ist $m = \frac{H.AV}{BA}$ und $n = \frac{P.AD}{BA}$, also $m + n$ oder $Q = \frac{H.AV + P.AD}{BA}$. Die Kraft P ist $= \frac{Q.BA - H.AV}{AD}$, die Schwere des Hebels $H = \frac{Q.BA - P.AD}{AV}$. Sind aber Q, H, P und ihre Stellen am Hebel gegeben, so findet man aus der ersten Gleichung BA, oder den Ort der Unterlage für das Gleichgewicht, wenn man dort $AV = BV - BA$, und $AD = BD - BA$ setzt, so wird $Q = \frac{H.BV - H.BA + P.BD - P.BA}{BA}$ seyn, woraus $Q.BA + H.BA + P.BA = H.BV + P.BD$, oder $BA = \frac{H.BV + P.BD}{Q + H + P}$ ist.

Ist ABD ein Hebel der zweyten Art, (Fig. 10.) in A die Unterlage, in B die Last Q, in V der Schwerpunkt, H seine Schwere, in D die Kraft P, so wird sie sowohl die Last, als die Schwere des Hebels erhalten müssen, und folglich seyn $P = \frac{Q.AB + H.AV}{AD}$ woraus sich die übrigen Gleichungen, wie vorhin, machen lassen.

Diese

Dieser Hebel kann uns den Ellbogen eines starken Mannes vorstellen, welcher sich in einer wagrechten Richtung von den zween Muskeln biceps und brachiæus erhalten läßt. In A ist sein Gelenke mit dem Arm, von D der äußersten Fingerspitze kann nur eine Last 26 Pfund schwer herabhängen, in B sehr nahe an A höret die gemeinschaftliche Sehne (tendo) beyder Muskeln auf. Sie wirken nach einer schiefen Richtung so, daß die senkrechte Linie aus A darauf gefällt $= \frac{AD}{20}$ ist, sie sey nun $= AB$ in V, in der Mitte des Ellbogens ist sein Schwerpunkt, seine Schwere $H = 4$ Pfund. Q. sey die gesuchte Muskelkraft die aufwärts zieht, P die Last $= 26$; ihre Richtung geht niederwärts, weil nun die Muskeln sowohl die Last, als die Schwere erhalten müssen, so hat man $Q . AB = AV . H + AD . P$. oder $Q . 1 = 10 . 4 + 20 . 26$. oder $Q = 560$ Pfund.

Gott, der größte Künstler, versah die Muskeln mit einer so großen Kraft, damit sie eine sehr geringe Last erhalten können, um die Bewegung derselben zu beschleunigen. Denn würde der Punkt B durch Zusammenziehung der beyden Muskeln um einen Zoll erhöhet, so müßte in der nämlichen Zeit die Last am Punkte D beynahe 20 Zoll durchlaufen.

54. Wenn Kraft und Last unmittelbar an den Enden eines mathematischen Hebels angebracht, und im Gleichgewichte sind, so verhalten sie sich verkehrt wie die Wege, welche jede durchlaufen müßte, wenn sich der Hebel um seinen Bewegungspunkt drehete.

So kann man sagen, es erfordere einerley Gewalt mit einer geringen Kraft durch einen großen Raum zu gehen, und eine große Last durch einen sovielmal geringern Raum zu führen, als die Last größer ist; oder in gleicher Zeit 100 Pf. durch 2 Fuß, und 200 Pf. durch einen Fuß zu erheben.

Vom Winkelhebel.

55. Ein Winkel läßt sich um einen Scheitelpunkt drehen, ohne daß sich dieser Punkt verrückt oder des Winkels Größe sich ändert. An den Armen dieses Winkelhebels ziehen in des Winkels Ebene zwo entgegengesetzte Kräfte nach Richtungen auf die Arme senkrecht. Man sucht ihre Verhältniß für das Gleichgewicht, wenn sich nämlich der Winkel nach keiner Seite drehen soll.

Es wird auch die Verhältniß der Kräfte gefunden, wenn ihre Richtungen mit den Hebelsarmen schiefe Winkel machen.

56. Wenn man bey einem Winkelhebel auf den verlängerten Richtungen der Kräfte von dem Punkte an, wo sie einander schneiden, zwo Linien nimmt, die sich wie Kräfte verhalten, und das Parallelogramm unter diesen Linien ergänzt, so ist die Diagonale dieses Parallelogramms die mittlere Richtung, nach welcher beyde Kräfte die Unterstützung drucken.

Von der Zusammensetzung der Kräfte.

57. Wenn sich zwo Kräfte P, Q, so verhalten (Fig. 11.) wie die Linien PC, QC, die unter dem Winkel (angulus conspirationis) PCQ mit einander verbunden sind, so heissen sie die äußern Kräfte.

Und

Und wenn man über den Winkel das Parallelogramm *PFQC* ergänzet, so heißt es ein Parallelogramm der Kräfte*, seine Diagonale *CF* aber die mittlere, aus beyden äußern zusammengesetzte Kraft.

Die Länge dieser Linien verhalten sich wie die Größen der Kräfte, und ihre Lagen sind die Richtungen der Kräfte.

58. Wenn zwo Kräfte *P*, *Q*, nach den Richtungen *PC*, *QC* unter dem Winkel *PCQ* auf den Körper *C* wirken, und er von der Kraft *P* allein getrieben, in der Zeit die Linie *CD* beschreiben muß, in welcher er von der Kraft *Q* allein getrieben, die Linie *CA* beschriebe, so wird er die Diagonale *CB* des Parallelogramms *DA* beschreiben müssen, wenn beyde zugleich auf ihn wirken.

Beweis. Wenn die Kraft *P* auf den Körper *C* allein wirkte, so müßte er an einen Punkt der Linie *DB* in der nämlichen Zeit kommen, in welcher er an einen Punkt der Linie *AB* käme, wenn die Kraft *Q* auf ihn allein wirkte. Nun hindert ihn die Kraft *Q* daran nicht, daß er sich vermittelst der Kraft *P* der Linie *DB* nähere; weil ihre Richtung *QA* mit *DB* parallel ist.

So hindert auch ihn die Kraft *P* daran nicht, daß er sich vermittelst der Kraft *Q* der Linie *AB* nähere, weil ihre Richtung *PD* mit *AB* parallel, und nicht entgegengesetzt ist. Wirken nun auf den Körper *C* beyde Kräfte zusammen, so muß er in derselben Zeit an einen Punkt der Linie *DB*, und zugleich an einen Punkt der Linie *AB* kommen; diese Punkte können nicht verschieden seyn; weil sich der Körper nicht von einander trennen läßt; also muß er an einen Punkt kommen, der beyden Linien

ge-

gemeinschaftlich; dies ist aber der Punkt *B*, folglich kömmt er aus C in *B*.

Er kömmt aber aus C in *B* durch eine Diagonale, dies ist durch eine grade Linie, weil die Kräfte P, Q auf einmal auf ihn wirken, und ihn dadurch zu einer gradlinichten Bewegung bestimmen. W. Z. b. w.

Die Kräfte P, Q verhalten sich auch wie C D, C A, in dem sich die wirkenden Ursachen so, wie die Wirkungen verhalten, wenn die Zeiten gleich sind.

Die mittlere Kraft F C, liegt mit der mittlern Richtung C B in einer graden Linie. Denn es ist $PC : QC = CD : CA$. oder $PC : FP = CD : DB$, und die Winkel P, D, als die innern Wechselwinkel zwischen zwoen Parallellinien F P, D B einander gleich, folglich die Dreyecke F P C, C D B einander ähnlich; also müssen die gleichnamigen Winkel F C P, D C B auch gleich seyn; nun ist P C D eine grade Linie, folglich muß es auch F C B seyn.

Die Diagonale C B ist nicht allein die mittlere Richtung der Kräfte, sondern auch die Wirkung der mittlern Kraft F C; denn es ist $PC : CD = FC : CB$, nun ist C D die Wirkung der Kraft P C, also ist auch C B die Wirkung der mittlern Kraft F C; so läßt sich auch C B statt F C, wie C D statt P C, und C A statt Q C nehmen.

58. Wenn die äußern Kräfte dieselben sind, so entsteht aus ihnen eine größere mittlere Kraft, wenn ihr Konspirationswinkel kleiner ist. (Fig. 12.)

Es sey $AC = CB$, und CF ohnehin sich selbst gleich; weil nun der Konspirationswinkel $BCF < ACF$ ist, so muß $CE > CD$ seyn, denn $AD = CF$, $BE = CF$, folglich $AD = BE$ und $AC = BC$, der eingeschlossene Winkel $CBE > CAD$, weil $CBE + BCF = 180°$, und $CAD + ACF = 180$, folglich $CBE + BCF = CAD + ACF$; nun $BCF < ACF$, also $CBE > CAD$, also auch $CE > CD$.

Die Summe der äußern Kräfte ist immer größer als die mittlere, und desto größer je größer der Konspirationswinkel ist.

Jede Kraft läßt sich auf unzählige Arten in zwo äußere zerlegen, und unzählige konspirirende Kräfte auf eine einzige bringen.

Was von den Kräften gesagt wird, dies ist auch von den Bewegungen als ihren Wirkungen zu verstehen.

59. Die äußern Kräfte CA, CB lassen sich in zwey Paare zerlegen, ein Paar CK, CH entgegengesetzte gleiche, die sich aufheben, und ein Paar KA, HB der mittlern CD parallele, die zusammen der mittlern gleich sind. (Fig. 13.)

Beweis. Man fälle aus A, B auf CD die senkrechten AE, BF, und beschreibe sowohl über AEC das Parallelogramm EK, als auch über CFB das Parallelogramm HF, so sind KC, KA der Kraft CA, und CH, HB der Kraft CB gleichgültig.

Nun sind KC, CH entgegengesetzt, weil die Winkel KCE und HCF recht sind, folglich machen KC, CH eine grade Linie aus.

Sie

Sie sind auch einander gleich, in dem $KC = AE$, $CH = BE$ ist, es sind aber AE, BE Höhen gleicher Dreyecke, die eine gemeinschaftliche Grundlinie CD haben, folglich einander gleich, also $KC = CH$, diese Kräfte müssen sich dann aufheben. KA, HB sind der mittlern CD parallel, und sind zusammen der mittlern CD gleich: denn in den Dreyecken ACE, BFD ist $CA^2 = CE^2 + AE^2$ und $BD^2 = BF^2 + FD^2$; nun $CA = BD$, also $CE^2 + AE^2 = BF^2 + FD^2$, es ist aber $AE^2 = BF^2$, folglich $CE^2 = FD^2$, und $CE = FD$.

Ferner $CF + FD = CD$. also auch $CF + CE = CD$; oder $HB + KA = CD$. W. z. b. w.

Die äußern Kräfte zusammengenommen sind der mittlern Kraft gleichgültig, aber nicht gleich, weil sie sich zum Theil aufheben, zum Theil die mittlere Kraft hervorbringen, dasjenige, was von ihnen übrig bleibt, macht die mittlere Kraft aus, und ist desto kleiner, je größer der Konspirationswinkel ist.

60. Die Kräfte MV, MT verhalten sich verkehrt wie die Sinus der Winkel, die sie mit der mittlern MC machen. (Fig. 14.)

Es sey $MT = VC = p$, $MV = q$, $MC = f$ der Winkel $V = u$, $TMC = MCV = \zeta$, $VMC = \eta$.

So hat man $f : p = \sin. u : \sin. \eta$. und
$q : f = \sin \zeta : \sin. u$. folglich

auch $fq : fp = \sin. u. \sin. \zeta : \sin u. \sin. \eta$. oder $q : p = \sin. \zeta : \sin. \eta$.

Ist nun $\sin. \zeta = \sin. \eta$, so ist auch $q = p$, und umgekehrt.

61. Aus den äußern Kräften, und dem Konspirationswinkel, die mittlere Kraft zu finden.

Es sey $p = 9$ ℔, $q = 11$ ℔, der Konspirationswinkel $TMV = \alpha = 55°. 49'$. So weiß man in dem Dreyecke MVC zwo Seiten MV, VC, und den eingeschlossenen Winkel u, weil er den α zu zween Rechten ergänzt, folglich ist die Summe der übrigen Winkel an der Grundlinie MC, nämlich $\eta + \zeta = \alpha = 55°. 49'$. und $\frac{\eta + \zeta}{2} = 27°, 54'$ beynahe.

Nun ist $MV + VC : MV - VC = \text{Tang.}\ 27°, 54'. : \text{Tang.} \frac{\zeta - \eta}{2}$, das ist $20 : 2 = 5294727 : \text{Tang.} \frac{\zeta - \eta}{2}$ oder $\text{Tang.} \frac{\zeta - \eta}{2} = 529472$, also $\frac{\zeta - \eta}{2} = 3°\ 2'$ beynahe, also der größere Winkel $MCV = \frac{\zeta + \eta}{2} + \frac{\zeta - \eta}{2} = 30°\ 56'$, und der kleinere $CMV = \frac{\zeta + \eta}{2} - \frac{(\zeta - \eta)}{2} = 24°\ 52'$.

Ferner. $\text{Sin.}\ CMV : \text{sin.}\ u = CV : MC$. oder

$\text{Sin.}\ 24°\ 52' : \text{sin.}\ 55°. 49' = 9$ ℔ $: MC$.

nun	L. sin. 55°, 49′	=	9,9176336
	L. 9 ℔	=	0,9542425
	Summe		10,8718761
	— L. 24° 52′	= —	9,6237743
			1,2481018

welcher

welcher Logarithme unter der Charakteristik 3 aufgesucht der Zahl 1770 zukömmt, also ist $MC = f = 17\,\frac{70}{100} = 17,7$ ℔.

62. I. Lehnsatz. Zwey Winkel, die sich einander zu zween Rechten ergänzen, haben gleiche Sinus, und gleiche aber entgegengesetzte Cosinus. (Fig. 15.)

Des Winkels ACM sein Sinus ist MD, er wird von dem Winkel MCB zu zween Rechten ergänzt, man mache $BN = AM$, so ist $MCB = ACN$, weil sie gleiches Maaß haben. Die senkrechte NE ist nun der Sinus des Winkels ACN. Die Dreyecke MDC, CNE sind gleich und ähnlich, weil D, E rechte, ACM, BCN gleiche Winkel sind, folglich auch der Winkel $DMC = CNE$; also hat man hier $MC = CN$, und die daran liegenden Winkel einander gleich; also auch $DM = NE$, was das erste; und dann $DC = CE$, was das zweyte zu beweisen war.

Ist aber $+DC$, so muß CE negativ oder $= -CE$ seyn, in dem DC, und CE auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen.

In der (14. Fig.) ergänzt der Winkel u, den Winkel α zu zween Rechten, also $-$ Cosin. $u = +$ Cosin. α.

63. II. Lehnsatz. In jedem Dreyecke ergänzt ein Winkel die Summe der übrigen zu zween Rechten.

Weil alle dreye zusammen zween Rechten gleichen; also in dem Dreyecke MVC (Fig. 14.) sin. ζ = sin. $(\eta + u)$. (I. Lehnsatz.)

64.

64. III. Lehnsatz. $Sin. (\eta + u) = Sin. \eta. Cosin. u + Sin. u\ Cosin. \eta.$ (Fig. 16.)

Beweis. Es sey der Winkel $DCB = \eta$, $ECD = u$, jenes sein Sinus DN, dieses EL, so ist $DN = Sin. \eta$; $EL = Sin. u$, und $EM = sin. (\eta + u)$, man ziehe LK mit DN, und LI mit CB parallel.

So ist das Dreyeck DCN dem Dreyecke CLK ähnlich, also $CD : CL = DN : LK$, man setze den Halbmesser $DC = 1$, CL ist ohnehin $= Cosin. u$, wie $CN\ Cosin. \eta$; folglich läßt sich die vorige Proportion so ausdrücken, $1 : Cosin. u = Sin. \eta : LK$, woraus $LK = Sin. \eta. Cosin. u$, oder $IM = Sin. \eta. Cosin. u$.

Man finde noch EI. Dies wird folgendermassen gefunden: der Winkel $ELI = LOI$, weil ELO recht, und LI auf EO senkrecht ist, dann $LOI = CDN$, weil IO, DN parallele Linien sind, also auch der Winkel $ELI = CDN$, nebst dem $EIL = CND$, weil beyde recht sind, folglich sind die Dreyecke EIL, CDN ähnlich; folglich $CD : EL = CN : EI$, oder $1 : Sin. u = Cosin. \eta : EI$, also $EI = Sin. u. Cosin. \eta$, also $IM + EI = Sin\ \eta. Cosin. u + Sin. u. Cosin. \eta$, oder $Sin. (\eta + u) = Sin. \eta. Cosin. u + Sin. u. Cosin. \eta$. W. z. b. w.

Nun ist (§. 63.) $Sin. \zeta = Sin. (\eta + u)$, also auch $Sin. \zeta = Sin. \eta, Cosin. u + Sin. u, Cosin. \eta$.

65. IV. Lehnsatz. $\overline{Cosin. u}^2 = 1 - \overline{Sin. u}^2$.

Beweis. Es sey in dem Dreyecke CEL (Fig. 16.) $CE = 1$. so ist $EL = Sin. u$; $CL = Cosin. u$, und $CE^2 = EL^2 + CL^2$, oder $1 = \overline{Sin. u}^2$

$+ \overline{Cosin. u}^2$, woraus $\overline{Cosin. u}^2 = 1 - \overline{Sin. u}^2$. So ist auch $\overline{Cosin. \eta}^2 = 1 - \overline{Sin. \eta}^2$, wie auch $Sin. \frac{\alpha^2}{4} = 1 - Cosin. \frac{\alpha^2}{4}$.

66. V. Lehnsatz. Die Seiten eines jedweden Dreyeckes verhalten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel. (Fig. 17.)

Beweis. Es sey AB der Halbmesser, oder Sinus Totus, so ist die senkrechte $BD = Sin. A$; es sey auch $MC = AB$, so ist die senkrechte $ME = Sin. C$. Nun sind die Dreyecke BDC, MEC ähnlich; folglich $BC : MC = BD : ME$, oder $BC : AB = Sin. A : Sin. C$. w. z. b. w.

Es sey abermal AB der Halbmesser, B der Mittelpunkt, so ist das Loth AG auf die verlängerte Seite BC gefällt der Sinus des Winkels ABG, oder seiner Ergänzung zu zween Rechten ABC; also $AG = Sin. ABC$; ist aber $NC = AB$, so ist die senkrechte $NI = Sin. C$, und aus der Aehnlichkeit der Dreyecke AGC, NIC, $AC : NC = AG : NI$, oder $AC : AB = Sin. ABC : Sin. C$. So auch $BC : AC = Sin. A : Sin. ABC$. w. z. b. w.

67. Wenn die äußern Kräfte (Fig. 14.), p, q, die mittlere f, der Conspirationswinkel α heißen, so hat man für sie $q^2 + 2qp\ Cosin.\ \alpha + p^2 = f^2$.

Beweis. $Sin. \zeta = Sin. \eta\ Cosin. u + Sin. u.\ Cosin. \eta$. (3. Lehnsatz) $f : q = Sin. u : Sin. \zeta$, und $f : p = Sin. u : Sin. \eta$, also $Sin. \zeta = \frac{q. Sin. u.}{f}$,

und

und $Sin.\ \eta = \frac{p\ Sin.\ u}{f}$ (5. Lehnsatz), also $\frac{q\ Sin.\ u}{f} = \frac{p\ Sin.\ u}{f}\ Cosin.\ u + Sin.\ u\ .\ Cosin.\ \eta$, oder $\frac{q}{f} = \frac{p\ Cosin.\ u}{f} + Cosin.\ \eta$. Man multiplizire alle Glieder mit f, so bekömmt man $q = p\ Cosin.\ u + f\ Cosin.\ \eta$ oder $q - p\ Cosin.\ u = f.\ Cosin.\ \eta$, alles aufs Quadrat erhoben, giebt $q^2 - 2qp\ Cosin.\ u + p^2\ \overline{Cosin.\ u}^2 = f^2\ \overline{Cosin.\ \eta}^2$. Nun $\overline{Cosin.\ u}^2 = 1 - \overline{Sin.\ u}^2$, und $\overline{Cosin.\ \eta}^2 = 1 - \overline{Sin.\ \eta}^2$ (4. Lehnsatz) weil aber $Sin.\ \eta = \frac{p\ Sin.\ u}{f}$, folglich $\overline{Cosin.\ \eta}^2 = 1 - \frac{p^2\ \overline{Sin.\ u}^2}{f^2}$, also $q^2 - 2qp\ Cosin.\ u + p^2 - p^2\ \overline{Sin.\ u}^2 = f^2 - p^2\ \overline{Sin.\ u}^2$ oder $q^2 - 2qp\ Cosin.\ u + p^2 = f^2$. Nun $-\ Cosin.\ u = +\ Cosin.\ \alpha$ (1. Lehnsatz) also $q^2 + 2qp\ Cosin.\ \alpha + p^2 = f^2$. W. z. b. w.

68. VI. Lehnsatz. $Cosin.\ \alpha = 2\ \overline{Cosin.\ \frac{\alpha}{2}}^2 - 1$. (Fig. 18.)

Beweis. Es sey der Winkel $ECB = \alpha$, $BD = ED$, so ist die senkrechte $EF = Sin.\ \frac{\alpha}{2}$, und $DH = Sin.\ \frac{\alpha}{2}$, $EG = Sin.\ \alpha$, und GC

=

$= Cosin.\ \alpha$, $DC = 1$, $HC = Cosin.\ \frac{\alpha}{2}$, $CF = Cosin.\ \frac{\alpha}{2}$. Die Dreyecke FEO, DHC sind einander ähnlich, weil H, F rechte, bey D, O die innern Wechselswinkel sind; also $HC : EF = DH : FO$; oder $Cosin.\ \frac{\alpha}{2} : Sin.\ \frac{\alpha}{2} = Sin.\ \frac{\alpha}{2} : FO$, also $FO = \frac{Sin.\ \frac{\alpha^2}{2}}{Cosin.\ \frac{\alpha}{2}}$, und OC

$$= FC - FO = Cosin.\ \frac{\alpha}{2} - \frac{Sin.\ \frac{\alpha^2}{2}}{Cosin.\ \frac{\alpha}{2}},$$ also

$$OC = \frac{Cosin.\ \frac{\alpha^2}{2} - Sin.\ \frac{\alpha^2}{2}}{Cosin.\ \frac{\alpha}{2}}.$$ Nun hat man

aus der Aehnlichkeit der Dreyecke DHC, OGC; $DC : OC = HC : GC$, das ist:

$$1 : \frac{Cosin.\ \frac{\alpha^2}{4} - Sin.\ \frac{\alpha^2}{4}}{Cosin.\ \frac{\alpha}{2}} = Cosin.\ \frac{\alpha}{2} : GC,$$

also $GC = Cosin.\ \frac{\alpha^2}{4} - Sin.\ \frac{\alpha^2}{4}$. oder $Cosin.$

$\alpha =$

$\alpha = Cos. \frac{\alpha^2}{4} - Sin. \frac{\alpha^2}{4}$. Es ist aber $Sin. \frac{\alpha^2}{4} = 1 - Cosin. \frac{\alpha^2}{4}$ (4. Lehnsatz) also $Cosin. \alpha = Cosin. \frac{\alpha^2}{4} - 1 + Cosin. \frac{\alpha^2}{4} = 2\ Cosin. \frac{\alpha^2}{2} - 1$. W. z. b. w.

69. Zusätze. I. Ist $p = 9$ ℔, $q = 11$ ℔, $\alpha = 55^\circ\ 49'$, so ist $Cosin. \alpha = Sin. 34^\circ\ 11'$; nun $L\ Sin. 34^\circ\ 11' = 9{,}7496148$ für den Halbmesser der Tafeln; folglich wird er für den Halbmesser 1 seyn $= 9{,}7496148 - 10{,}0000000 = -0{,}2505852$. Logarith. $2\,p\,q = L\ 198$; nun

$$\begin{array}{rl} L\ 198 = & 2{,}2966692, \\ L\ Cos. \alpha = & -\ 0{,}2505852 \quad \text{also} \\ \hline L\ 2\,p\,q\ Cos.\ \alpha = & 2{,}0460840, \end{array}$$

welchem unter der Charakteristik 3 die Zahl 1112 beynahe zukömmt, also ist $2\,p\,q\ Cosin.\ \alpha = 111{,}2$

$p^2 + q^2 = 202$ folglich

$p^2 + p\,q\ Cosin.\ \alpha + q^2 = 313{,}2$, folglich $313{,}2 = f^2$, oder $313{,}20 = f^2$, also $\sqrt{\frac{31320}{100}} = f = \frac{177}{10} = 17{,}7$ beynahe.

II. Weil $q^2 + 2\,p\,q\ Cosin.\ \alpha + p^2 = f^2$, so ist

$$Cosin.\ \alpha = \frac{f^2 - q^2 - p^2}{2\,p\,q};$$

und wenn $\alpha = 0$ ist; so ist $q^2 + 2\,p\,q + p^2 = f^2$, woraus $q + p = f$, ist aber $\alpha = 90^\circ$; so ist $q^2 + p^2 = f^2$.

III.

III. Sind f, q, α gegeben, so findet man p; es ist nämlich $p^2 + 2pq \, Cosin. \alpha = f^2 - q^2$; man ergänze nun das Quadrat linker Hand; so wird seyn $p^2 + 2pq \, Cosin. \alpha + q^2 \, \overline{Cosin. \alpha}^2 = f^2 - q^2 + q^2 \, \overline{Cosin. \alpha}^2$, und $p = \pm \sqrt{(f^2 - q^2 + q^2 \, \overline{Cosin. \alpha}^2)} - q \, Cosin. \alpha$.

IV. Es sey $q = p$. So hat man $p^2 + 2p^2 \, Cosin. \alpha + p^2 = f^2$; oder $2p^2 + 2p^2 \, Cosin. \alpha = f^2$, oder $2p^2 (1 + Cosin. \alpha) = f^2$, nun ist $Cosin. \alpha = 2 \, Cosin. \frac{\alpha^2}{4} - 1$. (6. Lehnsatz) also $2p^2 \left(1 + 2 \, Cosin. \frac{\alpha^2}{4} - 1\right) = f^2$ oder $4p^2 \, Cosin. \frac{\alpha^2}{4} = f^2$, oder $2p \, Cosin. \frac{\alpha}{2} = f$.

V. Es sey $p = q$, $\alpha = 120°$, $\frac{\alpha}{2} = 60°$. $Cosin. \frac{\alpha}{2} = Sin. \, 30°$, ist nun der Sinus totus $= 1$, so ist $Sin. \, 30° = \frac{1}{2}$, also $Cosin. \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, folglich $2p \, Cos. \frac{\alpha}{2} = 2p. \frac{1}{2}$, also $p = f$.

In diesem Falle ist dann die mittlere Kraft so groß, als jede der äußern, welches auch daraus erhellt, weil die Dreyecke über der Diagonale errichtet gleichseitig sind.

VI.

VI. Es sey abermal $p = q = 1$, $\alpha = 90°$, so ist $\frac{\alpha}{2} = 45°$, also $Cosin.\ \frac{\alpha}{2} = Sin.\ \frac{\alpha}{2} = 7071068$ aus den Tafeln, und für den Sinus totus $= 1$ ist $Cosin.\ \frac{\alpha}{2} = \frac{7071068}{10000000}$, folglich $2\ p\ Cosin.\ \frac{\alpha}{2} = 1{,}4142136 = f$, nun ist auch in diesem Falle $f = \sqrt{2}$; also $\sqrt{2} = 1{,}4142136$.

70. Wenn der Faden $ACDB$ in gegebene Theile AC, CD, DB getheilt ist, und seine Enden A, B an Nägeln befestigt sind, dann zwey Gewichte E, F von den Punkten C, D herab hängen; aus dem gegebenen Gewichte F, und der Lage der Punkte C, D das Gewicht E zu finden. Newtoni Arithmeticæ universalis Problema Geom. 49. pag. 152. (Fig. 19.)

Auflösung. Man verlängere die Theile AC, BD bis sie die Richtungen der Gewichte in G und H durchschneiden; ich sage, es sey $CH : DG = F : E$. Nun lassen sich CH, DG messen, und F ist bekannt, so weiß man auch durch die Regel Detri E.

Beweis. Die erhaltenden Kräfte sind die Nägel A, B, deren Richtungen AC, BD sind, sie wirken in dem ihnen gemeinschaftlichen Punkte O eben so viel, wie in den Punkten A, B, wo ihre Gewalt nicht geringer, und auch nicht größer ist als die Summe der Gewichte E, F; denn wäre sie geringer, so würden die Gewichte E, F, nicht erhalten; wäre sie größer, so wäre sie unnütz; also ist der Punkt O zugleich die Summe beyder Gewichte, oder ihr Schwerpunkt; fällt man

nun

nun aus ihm die Lothe OI, OK, so hat man einen Hebel der ersten Art, und des Gleichgewichtes wegen $OI : OK = F : E$. Es sind aber die Dreyecke COH, DOG ähnlich, weil CH, DG parallel sind; also $IO : OK = CH : DG$; folglich auch $CH : DG = F : E$. W. z. b. w.

Daraus lernt man eine Wage aus Fäden machen, vermittelst deren die Schwere jedes Körpers E aus einem gegebenen Gewichte F gefunden wird, wenn die Lage der Punkte C, D gegeben ist.

Man führte diese Aufgabe hier darum an, weil sich die Fäden als Linien, folglich als Kräfte ansehen lassen.

So kann man sich auch die Muskelfasern als Fäden vorstellen, die in einem Punkte vereinigt beynahe gleichlaufende Richtungen haben, also eine ungemein große mittlere Kraft, dies ist, die Kraft des ganzen Muskels hervorbringen, indem sie die Summe der äußern Kräfte oder der ungemeinen Menge aller Fasern gleich seyn muß.

Folgende trigonometrische Aufgabe wird aus den hier bewiesenen Sätzen aufgelößt, und folglich nicht unschicksam hier aufgestellt.

71. Die Vergleichung zwischen den Seiten des Dreyeckes (Fig. 20.) und einen seiner Winkel zu finden.

Auf-

IX. $\overline{Sin. A}^2 =$

$$\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

X. Endlich $Sin.\ A =$

$$\frac{\pm\sqrt{((b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b))}}{2bc}$$

72. Aus den gegebenen Seiten AB, AC, und dem eingeschlossenen Winkel A, den Inhalt des Dreyeckes T (Fig. 20) zu finden.

Auflösung. Die Höhe BD sey $= h$. $AB = c$, $AC = b$ wie vorhin; man nehme AB zum Halbmesser an; so wird $c = 1$, und $h = Sin.\ A$ seyn, also $1 : Sin.\ A = c : h$; folglich $h = c$ $Sin.\ A$, nun das Dreyeck $T = \frac{hb}{2}$, also auch

$T = \frac{Sin.A.bc}{2}$. W. z. f. w.

73. Aus drey gegebenen Seiten des Dreyeckes (Fig. 20.) ohne der Höhe seinen Inhalt T zu finden.

Auflösung I. Man halbire die Summe aller Seiten, so bekömmt man $\frac{a+b+c}{2}$. (71.)

II. Ziehe man jede Seite von der halben Summe aller Seiten ab; so wird man haben $\frac{b+c+a}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$ denn

$$\frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2}, \text{ endlich}$$

$$\frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}.$$

III. Multiplizire man die halbe Summe aller Seiten mit den itzt erlangten Differenzen, und ziehe die Quadratwurzel aus dem Produkte. So wird man den gesuchten Inhalt bekommen, nämlich $T = \pm \surd\left(\frac{(a+b+c)}{2} \times \frac{(b+c-a)}{2} \frac{(a+c-b)}{2} \frac{(a+b-c)}{2}\right)$.

Beweis. $T = \frac{Sin.\ A\ .\ bc}{2}$ (n. 72.)

Nun $Sin.\ A =$

$$\pm \surd \frac{((b+c+a)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c))}{2bc}$$

wie es aus (71) erhellet; also

$$T = \pm \frac{bc}{4bc} \surd((b+c+a)(b+c-a) \times (a+c-b)(a+b-c))$$ oder $T =$

$$\pm \surd\left(\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16}\right)$$

oder endlich; $T = \pm \surd\left(\frac{(b+c+a)}{2} \times \frac{(b+c-a)}{2} \frac{(a+c-b)}{2} \frac{(a+b-c)}{2}\right)$. W. z. b. w.

Auflösung I. Die Winkel heißen A, B, C, die ihnen gegen über stehenden Seiten a, b, c, der Halbmesser $= 1$.

II. So hat man $a : b = Sin. A : Sin. B$, und $a : c = Sin. A : Sin. C$, also $Sin. B = \frac{b\ Sin. A}{a}$, und $Sin. C = \frac{c\ Sin. A}{a}$ (66).

III. Nun $Sin. C = Sin. (A + B)$ weil A, B den Winkel C zu $180°$ ergänzen. (62) und (63) und $Sin. (A + B) = Sin. A\ Cos. B + Sin. B. Cos. A$ (64); also $Sin. C = Sin. A\ Cos. B + Sin. B\ Cos. A$.

IV. Ferner $Sin. C = \frac{c\ Sin. A}{a}$, und $Sin. B = \frac{b\ Sin. A}{a}$ (II.) also $\frac{c\ Sin. A}{a} = Sin. A\ Cos. B + \frac{b\ Sin. A,\ Cos. A,}{a}$, oder $\frac{c}{a} = Cos. B + \frac{b\ Cos. A}{a}$, oder $c = a\ Cos. B + b\ Cos. A$, oder $c - b\ Cos. A = a\ Cos. B$, und auf das Quadrat erhoben, $c^2 - 2\ b\ c\ Cos. A + b^2\ \overline{Cos. A}^2 = a^2\ \overline{Cos. B}^2$.

V. $\overline{Cos. A}^2 = 1 - \overline{Sin. A}^2$. $\overline{Cos. B}^2 = 1 - \overline{Sin. B}^2$ (65.) Also $c^2 - 2\ b\ c\ Cos. A + b^2 - b^2\ \overline{Sin\ A}^2 = a^2 - a^2\ \overline{Sin. B}^2$, weil aber $Sin. B = \frac{b\ Sin. A}{a}$ ist. (II.) so ist auch $c^2 - 2\ b\ c\ Cos. A + b^2 - b^2\ \overline{Sin. A}^2 = a^2 - b^2\ \overline{Sin. A}^2$ oder $c^2 - 2\ b\ c\ Cos. A + b^2 = a^2$ daraus

VI.

VI. $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = Cos. A.$ Es ist aber

$\overline{Sin. A}^2 = 1 - \overline{Cos. A}^2$, oder die Differenz zweyer Quadrate in ihre Faktoren aufgelöst, $\overline{Sin. A}^2 = (1 + Cosin. A)(1 - Cosin. A)$, oder aus (VI.)

VII. $\overline{Sin. A}^2 = \left(1 + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right) \times$

$\left(1 - \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2bc}\right)$ oder unter einerley Benennung gebracht,

$\overline{Sin. A}^2 = \left(\frac{2bc + c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right) \times$

$\left(\frac{2bc - c^2 - b^2 + a^2}{2bc}\right)$ oder

$\overline{Sin. A}^2 = \frac{(2bc + c^2 + b^2 - a^2)(2bc - c^2 - b^2 + a^2)}{4b^2c^2}.$

VIII. Nun $2bc + c^2 + b^2 = (b + c)^2$, und $2bc - c^2 - b^2 = -(b - c)^2$ also $2bc + c^2 + b^2 - a^2 = (b + c)^2 - a^2$ und $2bc - c^2 - b^2 + a = a^2 - (b - c)^2$, nun $(b + c)^2 - a^2 = (b + c + a)(b + c - a)$ und $a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c) * (a - b + c)$ weil die Differenz zweyer Quadrate die Summe der Wurzel, und die Differenz derselben zu ihren Faktoren hat. Also

Beyspiel. $a = 34$, $b = 42$, $c = 20$, so ist

$$\pm\sqrt{\left(\frac{(b+c+a)}{2}\,\frac{(b+c-a)}{2}\,\frac{(a+c-b)}{2} \times \frac{(a+b-c)}{2}\right)} = \pm\sqrt{(48 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 28)} =$$

$$\pm\sqrt{112896} = 336.$$

Anmerkung. Ich machte im Jahre 1784 einen andern Beweis dieser Auflösung durch den Druck bekannt, und zeigte darinn, wie man ganze Rationalzahlen für die Seiten jedes Dreyeckes finden kann, daß sein Inhalt rational werde.

Von den Wagen.

74. Wenn der Umdrehungspunkt zugleich der Schwerpunkt des Wagebalkens ist, so wird der Wagebalken einer Krämmerwage nicht allein in einer horizontalen, sondern auch in jeder schiefen Lage ruhen, wenn sich in beyden Schalen gleiche Gewichte befinden.

Das Züngel wird dann außer der Scheere, und doch ein Gleichgewicht seyn. Es soll aber der Stand des Züngls innerhalb der Scheere das Gleichgewicht anzeigen, folglich darf der Umdrehungspunkt nicht zugleich der Schwerpunkt des Wagebalkens seyn.

75. Ist der Umdrehungspunkt ober oder unter dem Schwerpunkte des Wagebalkens, so kann er an beyden Seiten mit gleichen Gewichten beschwert, nicht anders als in einer wagrechten Lage ruhen.

76. Die Zapfen, um welche der Wagebalken in den Aushölungen der Scheere beweglich ist, müssen um etwas weniges über dem Schwerpunkte des Wagebalkens erhoben seyn; je kleiner aber der Abstand des Umdrehungspunktes von dem Schwerpunkte seyn wird, je größer wird der Ausschlag der Wagschale seyn, in der sich ein schwereres Gewicht befinden wird. (Fig. 21.)

Es sey der Arm *DB* mehr in *B*, als in *A* beschwert, so wird der Schwerpunkt des Wagebalkens nicht mehr in der Mitte *D*, sondern etwa in *O* seyn; in *C* etwas darüber sey der Zapfen, so kann der Wagebalken nur in der schiefen Lage ruhen, in welcher *CO* vertikal, oder auf dem Horizonte *HR* senkrecht steht, denn dämals allein wird er, wie der Zapfen, dessen Richtung dieselbe ist, unterstützt; in diesem Falle ist *CW* die Richtung der Scheere, *CL* aber das Züngel, *WCL* das Maaß des Ausschlags; nun ist $WCL = DCO$, und *DCO* desto größer, je kleiner seine Ergänzung *DOC* zu einem Rechten ist, *DOC* aber desto kleiner, je kleiner *DC* der Abstand des Umdrehungspunktes *C* von dem Schwerpunkte *D* ist. W. z. b. w.

77. Je länger der Wagebalken ist, und je spitziger die Zapfen sind, desto empfindlicher ist die Wage.

78. Eine Wage von zween gleichen Armen zu verfertigen, und eine verfertigte zu prüfen.

79. Vermittelst einer unrichtigen Wage das wahre Gewicht einer Waare zu finden.

80. Die Schwere eines Körpers zu finden, ohne ihn abgewogen zu haben.

81. Eine Schnellwage zu verfertigen.

82. Aufgabe. Der kürzere Arm AK eines prismatischen Schnellwage sey $= a$, der längere KB $= b$, der Abstand der schwersten Last von der Unterlage $CK = c$, die schwerste Last $F = f$, das bewegliche Gegengewicht an dem längern Arme, welches der abzuwiegenden Sache das Gleichgewicht hält, sey $D = d$, sein Abstand $KG = g$, die geringste abzuwiegende Last $L = e$, ihr Abstand $YK = y$, der Abstand des Gegengewichts, das damit im Gleichgewichte ist, $KH = h$; die Differenz zwischen zwoen sowohl größern als kleinern Lasten $= p$.

Man sucht I. die Schwere des Wagebalkens x.

II. Die Entfernung der kleinern Lasten von der Unterlage y.

III. Die Eintheilung des längern Arms z, welche der Differenz p zwoer größern Lasten, und die Eintheilungen P, die derselben Differenz zwoer kleinern Lasten zukommen.

Auflösung I. Das Momment der Last F, ist $= fc$, weil die Schwere des Wagebalkens x heißt, und die Gewichte zweyer Körper von einerley Art sich so, wie ihre Räume verhalten, so ist $a + b : a = x : \frac{ax}{a+b}$, also ist $\frac{ax}{a+b}$ das Gewicht des kürzern Arms, in der Mitte aber sein Schwerpunkt, folglich sein Momment in Bezug auf $K = \frac{\frac{1}{2} a^2 x}{a+b}$. Auf gleiche Art ist das Momment des Gegengewichts D, $= dg$, und das Momment des längern

Arms

Arms $KB = \frac{\frac{1}{2} b^2 x}{a+b}$, also für das Gleichgewicht, $fc + \frac{\frac{1}{2} a^2 x}{a+b} = dg + \frac{\frac{1}{2} b^2 x}{a+b}$, wenn man dg auf die linke Seite mit widrigen Zeichen überträgt, und $\frac{\frac{1}{2} a^2 x}{a+b}$ auf die rechte, so bekömmt man $fc - dg = \frac{\frac{1}{2} b^2 x - \frac{1}{2} a^2 x}{a+b}$, und daraus durch entgegengesetzte Arbeiten $\frac{(fc - dg)(a+b)}{\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2} = x$.

II. Das Momment der geringsten Last E in Y, ist $= ey$, das Momment des Gegengewichts in H, das mit ihr im Gleichgewichte ist $= hd$, dazu die Mommente der Arme auf beyden Seiten addirt, geben fürs Gleichgewicht $ey + \frac{\frac{1}{2} a^2 x}{a+b} = hd + \frac{\frac{1}{2} b^2 x}{a+b}$, woraus $ey = hd + \frac{\frac{1}{2} b^2 x - \frac{1}{2} a^2 x}{a+b}$, oder $ey = hd + fc - dg$ (I.), und dann $y = \frac{hd + fc - dg}{e}$

III. Wenn die Last F um p vermindert $f - p$, ihr Momment $fc - pc$ wäre, und wegen dem Gleichgewichte das Gegengewicht aus G in g käme, Gg aber $= z$ gesetzt würde, so hätte man $Kg = g - z$, und das Momment des Gegengewichts $D = dg - dz$, also fürs Gleichgewicht wie vorhin $fc - pc$

$+ \frac{\frac{1}{2} a^2 x}{a+b} = dg - dz + \frac{\frac{1}{2} b^2 x}{a+b}$, woraus dz

$= dg + pc - fc + \frac{\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 x}{a+b}$ oder (I.)

$dz = dg + pc - fc + fc - dg$, oder

$z = \frac{pc}{d}$.

Wird die Last E um dieselbe Größe p vermindert, und das Gegengewicht D wegen dem Gleichgewichte aus H in h gebracht, Hh aber $= P$ gesetzt, so wird $Kb = b - P$ seyn, und das Momment der um p verminderten Last $E = ey - py$, das Momment des Gegengewichts $bd - Pd$, folglich abermal

$ey - py + \frac{\frac{1}{2} a^2 x}{a+b} = bd - Pd + \frac{\frac{1}{2} b^2 x}{a+b}$, also

$Pd = bd + py - ey + \frac{\frac{1}{2} b^2 x - \frac{1}{2} a^2 x}{a+b}$ oder (I.)

$Pd = bd + py - ey + fc - dg$, nun

$y = \frac{bd + fc - dg}{e}$ (II.) also

$Pd = bd + \frac{bpd + fcp - dgp - ebd - efc + edg}{e}$

$+ fc - dg$ oder

$Pd = \frac{ebd + bpd + fcp - dgp - ebd - efc + edg + efc - edg}{e}$, oder

$Pd =$

$$Pd = \frac{hpd + fcp - dgp}{e} = p\,\frac{(hd + fc - dg)}{e}$$

folglich $P = p\,\frac{(hd + fc - dg)}{ed}$ oder $P = \frac{py}{d}$ (II.)

Nun ist $P = \frac{py}{d}$; $z = \frac{cp}{d}$ (III.) also $P : z = \frac{py}{d} : \frac{cp}{d} = y : c$. Dies zeigt, wie man eine Schnellwage am richtigsten verfertigen kann Jacob. Bernoulli Geom. T. I. p. 191.

Von der Heblade.

83. Mit dem gewöhnlichen Hebel läßt sich eine Last nicht wohl auf eine nur etwas beträchtliche Höhe erheben. Man kann aber einen Hebel so anbringen, daß er auf abwechselnden Unterlagen ruht; da eine um die andere höher gebracht wird, so wird er auch sammt der daran hängenden Last höher gebracht.

Diese Vorrichtung heißt nun eine Heblade.

Hieher gehört jene Maschine, die der unvergeßliche, und mir schätzbarste Freund Strepling der k. k. Agrikultur Gesellschaft etwa vor 20 Jahren vorgeschlagen hat, womit man die Wurzelstöcke mit einer geringen Kraft aus der Erde reissen kann; sie besteht aus zween auf einander liegenden Hebeln. Der untere hat abwechselnde Unterlagen wie eine Heblade, der obere ruht mit einem Ende über die Quere darauf, mit dem andern aber auf einer festen Unterstützung, zwischen beyden Enden wird an ihn der auszureissende Wurzelstock gebunden.

Das

Das vom Stepling selbst entworfene Modell wird alle Jahre von mir meinen Herrn Zuhörern vorgezeigt und berechnet.

Von dem Räderwerke.

84. Wenn bey einem Rade an der Welle der Halbmesser der Welle $= r$, des Rades $= R$, die Kraft $= P$, die Last Q ist, und ihre Richtungen auf den Halbmesser senkrecht sind; so ist $P : Q = r : R$.

85. Macht die Richtung der Kraft mit dem Halbmesser des Rades den Winkel u, so ist $p : Q = r : Sin.\ u$.

Es ist aber in diesem Falle $R = Sin.\ totus$, also im vorigen Falle $P : Q = r : Sin.\ totus$, folglich perturbatim & ex æquo $p : P = Sin.\ tot. : Sin.\ u$, also $p > P$. Man braucht dann eine größere Kraft um die Last Q zu erhalten, wenn ihre Richtung nicht auf dem Halbmesser senkrecht ist.

Hieher gehören: Winde, Kreuzhaspel, Hornhaspel, Radhaspel.

Besteht der äußere Umfang des Rades aus einer festen Materie, so läßt sich die Kraft auf verschiedene Arten anbringen. Menschen, oder Thiere können darinn herumgehen, oder darauf treten.

Man kann ein oberschlächtiges Rad machen, wenn man es mit Kästen versieht, in welche das Wasser von oben herabfällt, so wird es davon als von einem Gewichte nach der Gegend zu umgetrieben, nach der es herabfällt.

Fließt aber Wasser unter dem Rade hin, so drehet es durch den Stoß auf Schaufeln ein un=

unterschlächtiges Rad nach der Gegend zu, wo es herfließt, darum heißt dieses rota retrograda, jenes aber directa.

Sollen verschiedene Räder, die nicht an einer Axe sind, sich zugleich bewegen, so müssen die Erhöhungen oder Zähne an dem einen in die Vertiefungen am andern eingreifen.

Das Stirn, oder Sternrad hat die Erhöhungen an der Stirne, oder nach Richtungen des Halbmessers. Das Kronrad hat die Zähne senkrecht auf seiner Ebene.

Insgemein greift ein größeres Rad in ein kleineres ein, welches ein Getriebe, oder ein Trilling heißt.

Die vollkommenste Gestalt der Zähne ist jene, welche mit der Krümmung einer Cycloide übereinstimmt.

Wie man gewöhnlich die Gestalt der Zähne bestimme, und nebst der Bestimmung der Zähne das Rad eintheile, zeigt Eberhard in seinen neuen Beyträgen zur Mathesi applicata pag. 53.

86. An der Welle *A* hängt die Last *Q*, das Rad *M* sey an eben dieser Welle befestigt; und greife in das Getriebe *B* ein, mit dem das Rad *L* eine Welle habe, *L* greife in das Getriebe *C* ein, mit dem das Rad *D* eine Welle habe. u. s. w.

Man verlangt die Kraft *P* zu wissen, welche *Q* nach der Tangente des letzten Rades erhalten wird; die Halbmesser der Getriebe, und Räder sind gegeben. (Fig. 23.)

Auf=

Auflösung. Man dividire den Halbmesser jeder Welle mit dem Halbmesser ihres Rades; das Produkt aus allen diesen Quotienten multiplizire man mit der Last, so giebt sich die Kraft. Heißen nun die kleinen Buchstaben a, b, c; m, l, d die Halbmesser der Wellen, und der Räder, so ist $P = \frac{abcQ}{mld}$.

Beweis. Weil sich bey dem Rade M, $m : a = Q : \frac{aQ}{m}$ verhält, so wird Q nach des Rades M Tagente von der Kraft $\frac{aQ}{m}$ erhalten. Mit dieser Gewalt also wirkt des Rades M Zahn an den Triebstock von B, der ihm im Wege ist; diese Kraft läßt sich als eine Last an B angebracht ansehen, sie würde dann nach der Tagente des Rades L mit einer Kraft erhalten, die man wie zuvor findet; nämlich $l : b = \frac{aQ}{m} : \frac{abQ}{ml}$. Diese aber an C als eine Last angebracht brauchte zu ihrer Erhaltung nach der Tagente des Rades D. folgende Kraft $d : c = \frac{abQ}{ml} : P$. also $P = \frac{abcQ}{mld}$. W. z. b. w.

87. **Zusätze.** I. $\frac{mld}{abc} P = Q$. und $P : Q = abc : mld$.

II. $\frac{P}{Q} = \frac{abc}{mld}$. Ist nun $P = 21$, $Q = 100$, so so kann man sich entweder eines Rades M, und einer Welle A gebrauchen, und die Verhältniß zwischen den Halbmessern muß seyn $a : m = 21 : 100$. Oder mache man $21 = 3 . 7$, und $100 = 4 . 25$. So wird man zwey Räder, und zwo Wellen haben. $a : m = 7 : 25$, $b : l = 3 : 4$.

Oder endlich setze man $21 = 1 . 3 . 7$. und $100 = 2 . 5 . 10$. so wird man vermittelst drey Räder, und soviel Wellen dasselbe Gleichgewicht erhalten, nämlich $a : m = 7 : 10$, $b : l = 3 : 5$, $c : d = 1 : 2$ also

$$\frac{P}{Q} = \frac{7}{10} . \frac{3}{5} . \frac{1}{2}.$$

III. (Fig. 24.) A sey die gezähnte Stange einer Fuhrmannswinde, die von den Triebstöcken des Getriebes B hinauf gestossen wird, an derselben Welle ist das Stirnrad C, in dessen Zähne das Getriebe D eingreift, welches durch die Kurbel E von der Kraft P herumgedreht wird; die Last Q befindet sich oben an der Stange A. Ist nun $d = 1$, $b = 2$, $e = 12$, $c = 15$. so ist $P : Q = bd : ec = 2 : 12 . 15 = 1 : 90$.

Kann nun ein Fuhrmann 100 tragen, so wird er vermittelst dieser Maschine 9000 ℔ erhalten können.

88. Wenn die Kraft P das Rad an der Welle herumdreht, und dadurch die Last Q hebt, so verhält sich ihr Raum S, zu dem Raume s, den die Last durchlauft, wie $Q : P$.

89. Aus den gegebenen Mengen der Zähne im Rade M, und der Triebstöcke im Getriebe B zu berechnen, wie vielmal das Getriebe herumkömmt, indem das Rad einmal herumkömmt. (Fig. 23.)

Es sey die Menge der Zähne $= \mu$, die Umdrehungen des Rades $V = 1$, die Umdrehungen des Getriebes u, so hat man $u = \frac{\mu}{\beta}$, wenn β die Menge der Triebstöcke bedeutet: denn jeder Zahn stößt einen Triebstock vor sich fort, sind nun soviel Zähne fortgegangen, als Triebstöcke sind, so ist das Getriebe einmal herumgegangen; und sind alle Zähne fortgegegangen, so muß das Getriebe sovielmal herumgekommen seyn, sovielmal die Menge der Triebstöcke, in der Menge der Zähne steckt; also $u = \frac{\mu}{\beta}$.

Weil nun $V = 1$, $u = \frac{\mu}{\beta}$ ist, so hat man $V : u = 1 : \frac{\mu}{\beta}$, oder $V : u = \beta : \mu$ das ist, die Umdrehungen des Rades verhalten sich zu den Umdrehungen seines Getriebes, wie die Menge der Triebstöcke, oder der Umfang des Getriebes zu der Menge der Zähne, oder dem Umfange des Rades.

Wenn die Menge der Zähne von der Menge der Triebstöcke gemessen wird, so kommen an einen Triebstock immer nur wenig einerley Zähne. Nämlich, wenn die Zahl der Triebstöcke n ist, so kömmt an den ersten Triebstock $1; 1+n, 1+2n, 1+3n, 1+4n, 1+5n \ldots$ u. s. f. Zahn, z. B. $n = 5$, die Menge der Zähne $= 30$, so kömmt auf den ersten Triebstock, der 1, 6, 11, 16, 21, 26 Zahn, und kein anderer, denn $1 + 6n$ wäre $= 31$, und der 31ste Zahn wäre der erste.

Wären aber 31 Zähne, so kämen an den ersten Triebstock nach und nach alle Zähne.

Nun ist es vortheilhafter, wenn mehr Zähne an einerley Triebstock kommen, als wenn solches nur wenigen wiederfährt, weil sich diese dadurch besser aneinander abschleifen, und ihre Gestalt vollkommener machen. Zu dieser Absicht würde es am besten seyn, wenn die Zahlen der Triebstöcke und Zähne Primzahlen unter sich wären.

90. Wenn die Zahlen und der Zähne und der Triebstöcke gegeben sind, zu finden, wie viel Umdrehungen des letzten Getriebes C, auf eine des ersten Rades M gehen. (Fig. 23.)

Auflösung. Man dividire jedes Rad mit seinem Getriebe, das ist: die Menge der Zähne mit der Menge der Triebstöcke, in welche jene eingreifen, das Produkt aus allen Quotienten wird das gesuchte geben.

Beweis. μ, λ seyen die Mengen der Zähne der Räder M, und L; β, γ, die Mengen der Triebstöcke in den Getrieben B, C, die Umdrehungen des Rades M seyen $= V$; des Getriebes B, und Rades L seyn $= u$; und des letzten Getriebes C Umdrehungen $= w$. So hat man $V : u = \beta : \mu$, und

$u : w = \gamma : \lambda$. folglich

$$uV : uw = \beta\gamma : \mu\lambda. \text{ oder } V : w = \beta\gamma : \mu\lambda$$

$$\text{oder } V : w = 1 : \frac{\mu\lambda}{\beta\gamma} \text{ oder } V : 1 = w : \frac{\mu\lambda}{\beta\gamma}.$$

Nun

Nun ist $v = 1$, also $w = \frac{\mu\lambda}{\beta\gamma}$. W. z. b. w.

91. **Zusätze.** I. Man wird ein Räderwerk verfertigen, wo das letzte Getriebe in der Zeit eine gewisse Menge Umdrehungen macht, in welcher das erste Rad einmal herumkömmt, wenn man die gegebene Menge in die Faktoren auflösen wird; soviel Faktoren seyn werden, soviel Räder und Getriebe wird man dazu brauchen, die Menge der Zähne jedes Rades wird sich zur Menge der Triebstöcke seines Getriebes verhalten, wie jeder Faktor zu 1.

Denn es ist $w = \frac{\mu\lambda}{\beta\gamma}$, ist nun $\beta = \gamma = 1$. so ist $w = \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\gamma}{1}$, ist ferner $w = 60$; so könnte seyn $w = \frac{6}{1} \cdot \frac{10}{1}$, oder $w = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1}$. rc.

II. Unter 5. darf die Menge der Triebstöcke nicht seyn; sollte nun jedes Getriebe 5 Triebstöcke haben, so wird man in den vorigen Ausdrückungen die Zähler und Nenner mit 5 multipliziren, und die Menge der Zähne jedes Rades bekommen, so wäre

1tens; $w = \frac{30}{5} \cdot \frac{50}{5}$

2tens; $w = \frac{15}{5} \cdot \frac{20}{5} \cdot \frac{25}{5}$.

III. Man hätte sonst ein Uhrwerk von folgenden vier Rädern und Getrieben gehabt, nämlich $\frac{28}{5} \cdot \frac{48}{6} \cdot \frac{60}{7} \cdot \frac{75}{8}$, wo die Umdrehungen des letzten Getriebes von 5 Triebstöcken 3600 auf eine Umdredrehung des ersten Rades von 75 Zähnen kämen; nun gieng das vorletzte Rad 48 sammt seinem Getriebe 6 verloren; so heiße das gesuchte Rad x, und sein Getriebe y. und man wirds dann vermittelst $\frac{28}{5} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{60}{7} \cdot \frac{75}{8} = 3600$ finden; denn

$$\frac{x}{y} = \frac{3600 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{28 \cdot 60 \cdot 75} = \frac{8}{1} = \frac{48}{6}.$$

Auf gleiche Art ließe sich das obgedachte Räderwerk in ein anderes verwandeln, wo die Umdrehungen des letzten Getriebes 4000 wären, wenn man statt $\frac{48}{6}$, $\frac{x}{y}$ setzte. Denn es entstünde folgende Gleichung $\frac{28}{5} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{60}{7} \cdot \frac{75}{8} = 4000$, woraus $\frac{x}{y} = \frac{80}{9}$ wäre.

92. Bey einem Räderwerke (Fig. 23.) verhält sich der Raum der Last zum Raume der Kraft, wie die Kraft zur Last.

Beweis. Der Raum der Last $= s$, der Raum der Kraft $= S$, die Umdrehungen des Rades $M = V$, des Rades $L = u$, des Rades $D = w$. Die Halbmesser der Wellen a, b, c, die Umfänge α, β, γ, die Halbmesser der Räder m, l, d, ihre Umfänge μ, λ, δ; wenn sich nun M einmal herumdreht, so ist der Raum der Last $s = \alpha$, in dem die Schnur an der Q herabhängt, um den Umfang der Welle α abgekürzt wird. Drehet sich aber das Rad Vmal, so ist $s = \alpha V$. Auf gleiche

Art

Art ist $S = \delta\, w$. folglich $s : S = \alpha\, V : \delta\, w$.
Es ist aber $V : w = \beta\gamma : \mu\lambda$. (90.) also
$w = \frac{\mu\lambda V}{\beta\gamma}$ folglich. $s : S = \alpha\, V : \frac{\mu\lambda\delta V}{\beta\gamma}$
oder $s : S = \alpha\beta\gamma : \mu\lambda\delta$.
Die Umfänge der Räder und Getriebe verhalten sich wie ihre Halbmesser; folglich $\alpha\beta\gamma : \mu\lambda\delta = abc : mld$ also $s : S = abc : mld$.
nun $P : Q = abc : mld$ (87.) also
$s : S = P : Q$. W. z. b. w.

Von der beweglichen Rolle und dem Flaschenzuge.

93. Um eine Rolle (Fig. 25.), deren Mittelpunkt C, der Halbmesser $CA = CB$ ist, gehe das Seil $EBAP$, so daß EB, AP Tangenten sind, am Mittelpunkte C hänge eine Last Q herab, des Seiles Theil EB sey in E an einem Nagel fest, aber der AP werde nach dieser Richtung von einer Kraft P gespannt. Man verlangt die Verhältniß $P : Q$ zu wissen.

Auflösung. Weil die Kraft P, und der Nagel E die Last Q erhalten sollen, so müssen ihre verlängerten Richtungen AO, BO, die Richtung der Last CQ in einem Punkte O schneiden, daß aus den äußern Kräften AO, OB eine mittlere in der Richtung CQ entstehe.

Nun ist $AO = OB$, weil sie Tangenten der Rolle aus dem nämlichen Punkte O gezogen sind. Sind aber die äußern Kräfte gleich, so müssen die Winkel, die sie mit der mittlern bilden, auch gleich seyn. Also ist $x = y$; folglich auch $u = z$, weil die Dreyecke AOD, DOB gleich sind, also ist DQ auf DB senkrecht.

Wenn

Wenn nun die Kraft nach AF, oder die Last nach CQ eine Uiberwucht bekömmt, so kann sich die Rolle den ersten Augenblick nicht anders als um B drehen. Also ist AB ein Hebel, dessen Ruhepunkt in B, die Kraft in A, die Last in D ist. Nun ist das Loth BM auf PQ gefällt, die Entfernung der Kraft, und BD die Entfernung der Last. Also fürs Gleichgewicht $P : Q = BD : BM$. W. z. f. u. z. b. w.

94. Zusätze. I. Ist $BO = Sin. tot. = 1$, so ist $DB = Sin. BOD$; und $BM = Sin. BOA$. also $P : Q = Sin. BOD : Sin. BOA$.

II. $BD = AD$; folglich $P : Q = AD : BM$; die Dreyecke ACD, ABM sind ähnlich, weil CA, BM parallele Linien, und M, D rechte Winkel sind. Also $AD : BM = AC : AB$ folglich $P : Q = AC : AB$; das ist, die Kraft verhält sich zur Last, wie der Halbmesser der Rolle, zur Sehne des umschlungenen Bogens.

III. Man setze den Winkel $ACD = \varphi$, $AC = r$, $AD = c$; weil AC, AD gemessen werden können. Ist nun $r = 1$, so ist $c = Sin. \varphi$. folglich $r : c = 1 : Sin. \varphi$. Also $Sin. \varphi = \frac{c}{r}$.

IV. Der Winkel CAD ist die Ergänzung des Winkels φ zu einem rechten, also $Sin. CAD = Cosin\ \varphi$. Der Winkel φ gehört auch zu dem bey A rechtwinklichten Dreyecke CAO, also ist der dritte Winkel $AOD = CAD$. Aber $AOD = DOB$. Also $CAD = DOB$. Also $Sin. DOB = Cosin. \varphi$. Folglich $P : Q = Cosin. \varphi : Sin. BOA$. (I.)

V. In dem Vierecke $ACBO$ sind die Winkel bey A, und B recht; also $ACB + BOA = 180°$; folglich $Sin. ACB = Sin. BOA$, nun $ACB = 2 \varphi$. Also $Sin. BOA = Sin. 2 \varphi$. Folglich $P : Q = Cosin. \varphi : Sin. 2 \varphi$.

VI. **Lehnsatz.** $Sin. 2 \varphi = 2 Sin. \varphi. Cosin. \varphi$. (Fig. 26.)

Beweis. Es sey der Winkel $ACB \doteq BCD = \varphi$. so ist $AO = OD = Sin. \varphi$, $DF = Sin. 2 \varphi$; $DA = 2 Sin. \varphi$, $CO = Cosin. \varphi$, $AC = 1$. Die Dreyecke ADF, AOC sind ähnlich, weil DAC beyden gemein, und bey O, ud F rechte Winkel sind. Also $AC : AD = OC : DF$; das ist $1 : 2 Sin. \varphi = Cosin. \varphi : Sin. 2 \varphi$. Folglich $Sin. 2 \varphi = 2 Sin. \varphi Cosin. \varphi$. W. z. b. w.

VII. Es ist nun $P : Q = Cosin. \varphi : 2 Sin. \varphi. Cosin. \varphi$. (V.) oder $P : Q = 1 : 2 Sin. \varphi$.

VIII. Sind die Stricke PA, EB parallel; so ist AB ein Durchmesser, und $\varphi = 90°$; folglich $Sin. \varphi = 1$. Also $P : Q = 1 : 2$. Also $P = \frac{Q}{2}$. Dieses läßt sich auch anders begreiflich machen: sind nämlich die Stricke parallel und lothrecht, so ist es so viel, als würde die Last an einem Stricke gehalten, an dem sie gerade herabhienge; da braucht die Summe beyder äußern Kräfte nur der Last gleich zu seyn, und weil PA, EB gleich gespannt sind, so ist jede die Hälfte der Last. Wenn die Seile schief von der Last gespannt werden, so beträgt diese Spannung mehr als die ganze Last, oder zwo Kräfte die nach OP, OE ziehen, müssen in ihrer Summe mehr betragen als die mittlere nach CQ, also beträgt jede mehr als die halbe Last. Das Gewicht der Scheibe wird beyseite gesetzt, oder muß mit zur Last gerechnet werden.

IX. $P : Q = 1 : 2 \, Sin. \, \varphi$. (VII.) Also $P = \frac{\frac{1}{2} Q}{Sin. \, \varphi}$. Ist nun $\varphi = 0$. So ist auch $Sin. \, \varphi = 0$. Folglich $P = \frac{\frac{1}{2} Q}{0} = \infty$. φ ist aber damals $= 0$ oder verschwindet, wenn das Seil *EBAP* wagrecht gespannt wird, und dazu brauchte man eine unendliche Kraft.

Woraus man schließt: Es lasse sich durch keine Kraft ein Seil in eine gerade horizontale Linie spannen, an dem zwischen der Kraft und den Nagel, an dem es fest ist, eine Last vertikal zieht; wenn anders die Last oder die Schwere des Seils selbst, die in seinem Schwerpunkte vereinigt ist, gegen die Kraft nicht ganz unbeträchtlich wäre.

Wäre sie wirklich unbeträchtlich, das ist $Q = 0$, so hätte man $P = \frac{\frac{1}{2} Q}{0} = \frac{\frac{1}{2} . 0}{0} = \frac{1}{2}$, oder die Kraft wäre halb so groß als die Last.

95. Eine Flasche ist eine Verbindung mehrerer Rollen, deren jede ihre eigene Axe hat, nicht aber eine ohne die andere fortrücken kann.

Eine Verbindung zwoer Flaschen vermittelst eines Seils, heißt ein Flaschenzug. Ein Ende dieses Seils ist gewöhnlich an den Haken der obern Flasche befestigt, und geht wechselweise von einer Rolle der untern Flasche auf eine der obern, und umgekehrt; an dem andern Ende ist die Kraft *P*. Die obere Flasche ist dort befestigt, wo die Last hin kommen soll; von der untern Flasche hängt die Last *Q* herab.

Zieht nun die Kraft das Seil an sich, so werden seine Theile, die um die Rolle gehen, abgekürzt, und die Last muß steigen.

96. Wenn die Theile des Seils parallel sind, die Zahl der beweglichen, dies, ist der in der untern Flasche sich befindlichen Rollen $= n$, und ein Ende des Seils an der obern Flasche befestigt ist, so ist $P : Q = 1 : 2\,n$.

Beweis. Die Last wird nur vermittelst der untern Flasche von der Kraft getragen, weil diese allein sinken würde, wenn das Gleichgewicht aufhörte. Alle Theile des Seils sind gleich gespannt, also ist die Last unter alle bewegliche Rollen gleich eingetheilt.

Der Theil der Last, der vermittelst jeder Rolle getragen wird, ist $= 2\,P$. (94.) um nun alle Theile, oder die ganze Last zu bekommen; so muß man $2\,P$ sovielmal nehmen, als bewegliche Rollen sind, also $2\,n\,P = Q$: woraus $P : Q = 1 : 2\,n$.

97. Sind die Theile des Seils nicht parallel; so verhält sich die Kraft zur Last, wie 1 zur Summe der Quotienten, welche herauskommen, wenn man die Sehne des umschlungenen Bogens bey jeder beweglichen Rolle mit ihrem Halbmesser dividirt.

Es sey der Halbmesser der obersten beweglichen Rolle r, die Sehne c, der zweyten darunter R, C, der dritten ϱ, γ ꝛc. — — So ist der Theil der Last, der vermittelst der obersten Rolle getragen wird. $r : c = P : \frac{c\,P}{r}$. (94. II.) vermittelst der zweyten $R : C = P : \frac{C\,P}{R}$. vermittelst der dritten $\varrho : \gamma = P : \frac{\gamma\,P}{\varrho}$.

folg=

folglich $Q = \frac{c\,P}{r} + \frac{C\,P}{R} + \frac{\gamma\,P}{\varrho}$. also $P : Q =$

$1 : \frac{c}{r} + \frac{C}{R} + \frac{\gamma}{\varrho}$ ꝛc.

98. Sollen die Theile des Seils parallel seyn; so müssen die Durchmesser der Rollen, um welche dasselbe nach und nach geht, sich wie 1, 2, 3, 4, ꝛc. verhalten.

99. Der Raum der Last s, verhält sich zum Raume der Kraft S, bey einer beweglichen Rolle wie $1 : 2$; bey einem Flaschenzuge wie $1 : 2\,n$; folglich auch $s : S = P : Q$.

100. Wenn jede Rolle ihren eigenen Strick hat, dessen ein Ende an einem Nagel, das andere aber an dem Haken der nächsten Rolle befestigt ist; und die Last an der untersten Rolle herabhängt, so verhält sich die Kraft zur Last, wie 1, zu 2^n, wo n die Zahl der beweglichen Rollen anzeigt.

Denn die Kraft bey der untersten Rolle ist $= \frac{Q}{2}$, die man als die Last bey der zweyten Rolle ansieht, also ist die Kraft bey der zweyten $= \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2^2}$, und wenn die Zahl der Rollen $= n$ ist, $P = \frac{Q}{2^n}$, woraus $P : Q = 1 : 2^n$.

Von

Von der schiefen Fläche.

101. Wenn eine Vertikalebene durch den Schwerpunkt C, eines Körpers, der sich auf einer schiefen Fläche befindet, bis zum Horizont BD gezogen wird; so entsteht das rechtwinklichte Dreyeck GBD, dessen Hypothenus GD der Durchschnitt der schiefen Fläche von dieser Vertikalebene, der Kathet GB der Durchschnitt zwoer Vertikalebenen, folglich die Höhe der schiefen Fläche, endlich der Kathet BD der Durchschnitt der Horizontalfläche, und der obgesagten Vertikalfläche, oder der Horizont ist.

Nun sey die Richtung der Kraft P, die den Körper oder die Last Q erhalten soll, CV, der Last ihre CLH auf den Horizont senkrecht, beyde in der Ebene des Dreyeckes; der Druck, den die schiefe Fläche von dem Körper leidet auch in derselben Ebene $= S$. Man frägt nach der Verhältniß $P : Q$, und $S : Q$ fürs Gleichgewicht. (Fig. 27.)

Auflösung. Die mittlere Kraft, die aus beyden äußern (deren Richtungen CV, CH sind) entsteht, muß in der auf die schiefe Fläche senkrechten CIF, und innerhalb des Grundes des Körpers liegen; denn läge sie außerhalb des Grundes, so würde sie nicht unterstützt; läge sie schief auf der schiefe Fläche; so ließe sie sich in eine senkrechte darauf, und eine mit ihr parallele zerlegen; dann müßte sich der Körper nach der parallelen bewegen, weil ihr nichts entgegen stünde, und so könnte kein Gleichgewicht erfolgen.

Man setze nun ein Stück der Vertikalrichtung, nämlich $CL = Q$, und ziehe LE mit CV parallel, so ist $CE = S$ die mittlere Kraft, folglich $EL = P$, als die dritte Seite des Dreyeckes CEL.

Folg-

Folglich I. $P : Q = EL : CL.$
nun $EL : CL = Sin. ECL : Sin. CEL$ (66.)
also $P : Q = Sin. ECL : Sin. CEL.$
Das Dreyeck ICL ist bey I rechtwinklicht, und H ist ebenfalls in dem Dreyecke LHD recht; dann $ILC = HLD$, weil sie Vertikalwinkel sind, also muß der dritte Winkel ECL dem dritten D gleich seyn, also $P : Q = Sin. D : Sin. CEL.$ Der Winkel $ACE = CEL$ weil sie die innern Wechselswinkel zwischen den parallelen CV, LE sind. also

$$P : Q = Sin. D : Sin. ACE.$$

In dem Dreyecke ACI, ist der Winkel I recht, also ergänzet den Winkel CAI der ACE zu einem rechten, folglich $Sin. ACE = Cosin. CAI$, also

$$P : Q = Sin. D : Cosin. CAI.$$

II. $S : Q = EC : CL;$
nun $EC : CL = Sin. CLE : Sin. CEL$, also
$S : Q = Sin. CLE : Sin. CEL.$
Der Winkel CLE wird von ACL zu zween rechten ergänzt; weil VC, EL parallel sind; also $Sin. CLE = Sin. ACL$; und $CEL = ACE$; dann $Sin. ACE = Cosin\ CAI.$ wie vorhin. also
$S : Q = Sin. ACL : Cosin. CAI.$

102. Zusätze. I. Die Richtung der Kraft CV sey mit der schiefen Fläche parallel, so ist der Winkel $CAI = 0$, also sein Cosinus $=$ Sin. totus $= 1$; nun hatte man $P : Q = Sin. D : Cosin. CAI$, also für diesen Fall $P : Q = Sin. D : 1.$

Wenn die Richtung der Kraft mit der schiefen Fläche parallel ist, so verhält sich die Kraft zur Last, wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Fläche gegen den Horizont, zum Sinus totus.

Beyspiel. $D = 30°$. so ist $Sin. D = \frac{1}{2}$: also $P : Q = \frac{1}{2} : 1$; folglich $P = \frac{1}{2} Q$; also die schiefe Fläche eine Maschine, weil sie eine vortheilhafte Bewegung verschafft.

Es sey $D = 0$; das ist, die schiefe Fläche würde in eine Horizontalfläche verwandelt. So ist $P : Q = 0 : 1$, weil $Sin. D = 0$ wird. Also $P = 0$; man braucht keine Kraft um einen Körper auf der Horizontalfläche zu erhalten.

Es sey $D = 90°$. So ist $Sin. D = 1$. Also $P : Q = 1 : 1$. also $P = Q$. Auf einer Vertikalfläche wird die Last von einer gleichen Kraft erhalten.

II. Man nehme GD (Fig. 27.) zum Sinus totus an; also $GD = 1$; und $GB = Sin. D$; folglich wird die vorige Proportion $P : Q = Sin. D : 1$ in folgende verwandelt; $P : Q = GB : GD$. Die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Fläche zu ihrer Länge. Ist nun $GB = 3$; $DG = 5$. So ist $P = \frac{3}{5} Q$.

Dies läßt sich noch anders darthun. Es sey die parallele Richtung der Kraft mit der schiefen Fläche πC; die absolute Schwere CL, läßt sich in zwo gleichgültige die senkrechte CI, und parallele $\pi C = IL$ auflösen. Die senkrechte wird von GD aufgehoben, folglich kann sich der Körper nur mit $IL = R$ der respektiven Schwere bewegen; also muß die Potenz $P = R$ seyn, wenn er ruhen soll. Nun ist aus der Aehnlichkeit der Dreyecke CIL, GBD, $IL : CL = GB : GD$. oder $R : Q = GB : GD$; also auch $P : Q = GB : GD$.

III.

III. Die Richtung der Kraft CV, sey mit dem Horizonte BD parallel; so ist der Winkel $CAI = D$. Also wird die Proportion (aus 101. I.) $P : Q = Sin. D : Cosin. CAI$, in folgende verwandelt $P : Q = Sin. D : Cosin. D$.

Ist aber $GD = 1$. So ist $GB = Sin. D$; $BD = Cosin. D$; folglich $P : Q = GB : BD$. Es verhält sich nämlich die Kraft zur Last, wie die Höhe der schiefen Fläche zu ihrem Horizont.

Nähme man $BD = 1$ an; so wäre $GB = Tang. D$; folglich $P : Q = Tang. D : 1$.

Ist $D = 45°$. So ist $Tang. D = 1$. also $P = Q$.

IV. Es war (101. II.) $S : Q = Sin. ACL : Cosin. CAI$. Ist nun die Richtung der Kraft CV mit GD parallel, oder fällt CV in $C\pi$, so ist der Winkel $ACL = \pi CL = \pi CI + ICL = 90° + D$; nun $Sin. (90° + D) = Cosin. D$. also $Sin. ACL = Cosin. D$; und $Cosin. CAI = 1$, weil der Winkel CAI verschwindet. Folglich $S : Q = Cosin. D : 1$. Es ist aber $Cosin. D : 1 = BD : GD$; also $S : Q = BD : GD$; und es verhält sich aus der Aehnlichkeit der Dreyecke CIL, GBD; $IC : CL = BD : GD$.

Ist nun $CL = Q = 300$ ℔, $BD = 4$, $GD = 5$; so ist $IC = 240$ ℔. und der dritte Theil davon, nämlich die Reibung $= 80$ ℔.

V. Ist CV mit BD gleichlaufend; so ist $ACL = 90°$; $CAI = D$. Also $S : Q = 1 : Cos. D$; oder $S : Q = GD : BD$.

Man nehme für diesen Fall den Druck $= z$, für den (in IV. §) $= S$ an; so hat man itzt $z : CL = GD : BD$, und zuvor hatte man $S : CL = BD : GD$. die

Pro-

Produkte aus den ähnlich liegenden Gliedern werden seyn $z S : CL^2 = GD . BD : GD . BD$. Also $z S = CL^2$; woraus $S : CL = CL : z$. Nun ist im vorigen Falle $S = CI$, und $CI < CL$, also auch $CL < z$.

Der Druck ist dann grösser als die Last selbst, welcher immer mehr vermehrt wird, je spitziger der Zugwinkel CAI seyn wird.

VI. Wenn die Richtung der Kraft (Fig. 27.) VQ, in $\alpha c a$ kömmt, und folglich mit der mittlern Kraft Ce einen stumpfen Winkel macht, so wird eL eine parallele mit αa die Kraft P, und die mittlere $eC = S$ seyn; also abermal $P : Q = eL : CL$, oder $P . Q = Sin. D : Sin. \alpha Ce$; nun $Sin. \alpha Ce = Sin. e Ca$; also $P : Q = Sin. D : Sin. eCa$; das Dreyeck ICa ist bey I rechtwinklicht, also $Sin. eCa = Cosin. CaI$; folglich $P : Q = Sin. D : Cosin. CaI$.

Der Druck auf die schiefe Fläche ist in diesem Falle Ce, wenn aber die Richtung der Kraft $C\pi$ ist, so ist er $= CI$ schon grösser; ist sie aber AC, so ist er noch stärker, nämlich CE.

Kömmt aber $\alpha c a$ in eine grade Linie mit CLH; so ist $CaI = CLI$, und $CLI = - HLD$. also $Cosin. CaI = - Cosin. HLD$. nun $- Cosin. HLD = - Sin. D$. Also $P : Q = Sin. D : - Sin D$; also $P = - Q$. die Kraft muß der Last gleich und entgegengesetzt seyn.

103. Man ziehe (Fig. 28.) aus dem Schwerpunkte C der Last Q die parallele CL mit AD, errichte das Loth LM darauf, und ziehe die gleichlaufende CM mit GD, so wird $ML = s$ dem Raume der Last gleich seyn, um welchen sie gestiegen, da ihr Schwerpunkt aus C in M gekommen ist, der Raum der Kraft aber $S = MC$, wenn ihre Richtung mit GD; und $S = LC$, wenn ihre Richtung mit AD parallel ist.

Also

Also im ersten Falle $s . S = ML : MC$; und aus der Aehnlichkeit der Dreyecke $ML : MC = GA : GD$; also $s : S = GA : GD$; nun $GA : GD = P : Q$. also $s : S = P : Q$.

Im zweyten Falle $s : S = ML : LC = GA : AD = P : Q$. also $s : S = P : Q$.

104. Die Thiere besteigen die Berge, und holprichte Wege mit Mühe, weil sie die respektive Schwere, das ist, einen Theil ihrer absoluten, und der mit ihnen verbundenen Last, die sonst von dem Horizonte ist erhalten worden, zu tragen haben. Diese respektive Schwere verhält sich, laut bewiesenen, zu der absoluten, wie die Höhe des Berges zu seiner Länge.

Es sey nun (Fig. 28.) die Länge eines Berges GD, seine Höhe GA, die Richtung des über den Berg fortgehenden Thieres CM. Man fälle aus irgend einem Punkte derselben, z. B. M die Bleyschnur LM herab, und ziehe LT senkrecht auf MC; so wird sich $MT : ML = AG : GD$ verhalten; weil die Dreyecke MCT, GAD ähnlich sind; MT, ML lassen sich messen; folglich weiß man die Verhältniß der Höhe des Berges zu seiner Länge; und wenn man auch die absolute Schwere weiß, so läßt sich die respektive finden.

Beyspiel. $MT = 4$; $ML = 5$; die absolute Schwere $Q = 4000$ ℔; die respektive $= R$; so ist $R : Q = MT : ML$, oder $R = \frac{Q . MT}{ML} = \frac{4000 . 4}{5} = 3200$ ℔.

Vom

Vom Keile.

105. Ein Prisma, dessen Grundflächen rechtwinklichte Dreyecke sind, ist ein einfacher Keil; man gebraucht sich seiner, um eine Last auf eine geringe Höhe zu bringen, wenn man ihn darunter schiebt.

Ein Prisma von Grundflächen, die gleichschenklichte Dreyecke sind; heißt ein doppelter Keil, dieser wird z. E. durch Schläge zwischen Dinge getrieben, die dadurch von einander gesondert werden.

Ein Beil, Messer, Scheere, Meissel, Stemmeisen, Nadel sind als Keile anzusehen. So auch die Gewölbesteine, und besonders der Schlußstein.

106. Der doppelte Keil ABC (Fig. 29.) befinde sich bis an EF in einem schon zerspaltenen Körper so, daß die Mittellinie DC vertikal, und der Rücken AB horizontal ist, so kann man sich auf dem Rücken ein Gewicht P vorstellen, welches den Keil weiter zu treiben strebt. Der zerspaltene Körper drücke an den Stellen E und F entgegen, und die grade Linie EF sey mit AB parallel. Ferner ziehe man durch E und F ein Paar auf den Seitenlinien des Keils senkrechte grade Linien, so werden sich diese in einerley Punkt K der Linie DC schneiden: der Druck P in der senkrechten Richtung DC aber zerlegt sich in zwo andere Pressungen nach den Richtungen KE, und KF, die auf den Seitenflächen des Keils senkrecht, und bey hier angenommenen Voraussetzungen gleich groß sind. Wofern man nebstdem voraussetzen kann, daß die Richtung des Widerstandes bey E sowohl, als bey F auf der Seite des Keils senkrecht, auch der Widerstand selbst auf beyden Seiten von gleicher Größe sey; so muß im Falle des Gleichgewichts jede von den Seitenkräften nach KE, oder KF dem entgegen drückenden

den

den Widerstande gleich seyn, und sich die Kraft P, welche den Keil in den zerspaltenen Körper weiter zu treiben strebt, zum Widerstande Q an jeder Seite verhalten, wie der Rücken des Keils zur Seitenlinie.

Beweis. Die senkrechten Linien EK, FK müssen sich in einem Punkte K der Linie DC schneiden, indem $EC = FC$, weil EF mit AB parallel ist, folglich der Winkel $CEF = A$, und $EFC = B$; nun $A = B$, also auch $CFE = EFC$; folglich $EC = CF$. Der Winkel $ECK = KCF$, weil DC die Mittellinie ist, und die rechten Winkel KEC, KFC auch gleich; also muß die dritte Seite KC in den gleichen und ähnlichen Dreyecken KEC, KFC sich selbst gleich seyn.

Man ziehe EO mit KF, und FO mit KE parallel, so ist $EOFK$ das Parallelogramm der Kräfte, also $KO = P$, und $KL = \frac{P}{2}$. KE aber $= Q$, folglich $\frac{P}{2} : Q = KL : KE$. Nun ist der Winkel EKC den Dreyecken EKL, ECK gemein, der Winkel an L recht, der Winkel KEC auch recht; also muß der dritte Winkel KEL dem dritten Winkel ACD gleich seyn, der Winkel ADC aber ist auch recht, so sind die Dreyecke EKL, ACD ähnlich. Also $KL : KE = AD : AC$; also auch $\frac{P}{2} : Q = AD : AC$; oder $P : Q = 2AD : AC$. oder $P : Q = AB : AC$. W. z. b. w.

107. Dies läßt sich anders daraus beweisen: weil sich die mittlere Kraft zu jeder der äußern so verhält, wie die Seite eines Dreyeckes, die durch ihre Richtung senkrecht gezogen würde, zu der Seite desselben Dreyeckes, die durch jede Richtung der äußern Kräfte senkrecht geht. (Fig 29.)

Beweis. *AB* sey senkrecht auf *DC*, die Richtung der mittlern Kraft *KO*; *AC* senkrecht auf *KE* die Richtung einer äußern; und *BC* senkrecht auf *KF* die Richtung der zweyten äußern Kraft *KF*; so ist $KO : KE = AB : AC$.

Denn *KCF* Winkel gehört sowohl zum Dreyecke *KCF*, als auch zum Dreyecke *DCB*, bey *D*, und *F* sind rechte Winkel, folglich der dritte *CKF* dem dritten *B* gleich; nun sind *CKF*, *EOK* als innere Wechselswinkel einander gleich; also auch $EOK = B$; so ist auch der dritte Winkel *A* des Dreyeckes *ADC* dem dritten *EKC* des Dreyeckes *EKC* gleich, dieser aber mit *EKO* einerley, also $EKO = A$; also *ACB*, *EKO* ähnliche Dreyecke; folglich $KO : KE = AB : AC$, und so auch $KO : KF = AB : BC$; dann $KE : KF = AC : BC$.

108. Je kleiner nun *AB* als *BC* seyn wird, desto kleiner wird auch *KO*, als *KE* oder die Kraft als der Widerstand seyn; das ist: ein spitziger Keil hat mehr Vermögen, als ein stumpfer.

Am Keile verhält sich der Raum der Last, zu dem Raume der Kraft, den sie in gleicher Zeit zurücklegen, nicht so wie die Kraft zur Last, weil da drey Kräfte gegeneinander wirken.

109.

109. **Anmerkung.** Man setzte bis itzt zum voraus, daß die Kräfte durch Gewichte ausgedrückt werden können; dieses geht aber nicht an, wo Schläge auf eine Maschine, als z. B. auf einen Keil angebracht werden. Denn es läßt sich die Kraft, welche durch den Stoß zweyer Körper entsteht, mit jener nicht vergleichen, die nur der Druck hervorbringt.

Die Kräfte der Körper verhalten sich wie die Produkte aus der Masse oder Gewichte in die Geschwindigkeit. Ruhet nun ein Körper, so ist seine Geschwindigkeit unendlich klein, oder $= \frac{c}{\infty}$, und wenn seine Masse m heißt; seine Kraft, oder das mechanische Momment $= \frac{mc}{\infty}$; bewegt sich aber ein Körper von gleicher Masse, so ist seine Geschwindigkeit endlich $= c$; folglich seine Kraft $= mc$.

Hieraus wird begreiflich gemacht; warum ein Nagel, der schon ein wenig im Holze steckt, leichter durch einen auf ihn gemachten Schlag, als durch ein darauf gelegtes Gewicht von 1000 ℔. tiefer hinein getrieben werde.

Von der Schraube.

110. Wenn um einen Cylinder AM (Fig. 30.) die gleichen an b, i, k rechtwinklichten Dreyecke, oder schiefe Flächen DbH, biI, ikK, deren Grundlinien bH, iI, kK der Peripherie des Cylinders gleich sind, gewickelt werden; so kommen die Punkte H, I, K in b, i, k, und die Hypothenusen werden eine krumme Linie beschreiben, die aus gleichen krummen Gängen bestehen wird, welche Schraubengänge (helices) heißen;

ßen; die Höhe jedes Dreyeckes Dh, hi, ik, heißt die Weite zweyer Gänge; den Cylinder nennt man die Spindel, jede Grundlinie bH, iI, kK, heißt der Umfang der Spindel.

Daß die Schraubengänge hervorragen, so müssen die Räume zwischen ihnen ausgehölt werden.

111. Wenn die rechtwinklichten Dreyecke (Fig. 30.) auf der erhabenen Seite der cylindrischen Fläche verzeichnet werden, so entsteht die äußere, oder dichte Schraube (cochlea solida), wenn sie aber um die hohle Seite der cylindischen Fläche gewickelt werden, so entsteht die hohle Schraube, die Schraubenmutter (cochlea cava.)

Es muß entweder jene innerhalb dieser, oder diese um jene beweglich seyn, und die Erhöhungen der einen müssen in die Vertiefungen der andern genau passen.

112. Wenn eine dichte und eine hohle Schraube in einander greifen (Fig. 30.), und eine Kraft P bey D nach einer mit dem Umfange der Spindel parallelen, und ihn berührenden Richtung die Spindel um ihre Axe FO zu drehen strebt; wenn ferner eine Last Q die Spindel nach der Richtung FO beschwert, und die Weite zweyer Gänge $= a$, der Umfang der Spindel $= b$ ist; so hat man fürs Gleichgewicht $P : Q = a : b$.

Beweis. Wenn die erhabenen Gänge der dichten Schraube, wie hier vorausgesezt wird, in die hohlen Gänge der Schraubenmutter richtig passen, vertheilt sich der Druck Q über alle Schraubengänge gleichförmig.

Man setze die Zahl der Gänge $= m$, so wird sich auf jeden das Stück der ganzen

Last

Last $= \frac{Q}{m}$ befinden; so eins G sey bey D; die Kraft, welche dieses Stück allein auf der schiefen Fläche DH erhalten soll, sey $= v$. Weil ihre Richtung mit bH parallel ist, so wird sie (laut 102. III.) seyn $v : \frac{Q}{m} = a : b$; oder $v = \frac{aQ}{mb}$, und so groß müßte sie auch bey b, i, ꝛc. nämlich am jeden Schraubengange seyn.

Ist aber $v = \frac{aQ}{mb}$; so ist $vm = \frac{aQ}{b}$; nun $vm = P$ der ganzen bey D versammelten Kraft, also $P = \frac{aQ}{b}$, oder $Pb = aQ$; woraus $P : Q = a : b$; das ist: die Kraft verhält sich zur Last, wie die Weite zweyer Gänge zum Umfange der Spindel.

113. Man nahm hier an, die Bewegung der Last geschähe auf dem krummen Schraubengange, so wie auf einer schiefen Fläche (101.), welches freylich nicht anders als für ein unendlich kleines Element des Schraubenganges gelten kann. Man sehe Kästners Mechanik §. 111.

114. Wäre mit der Schraube der Hebelarm EL (Fig. 30) in einer auf der Axe FO senkrechten Ebene verbunden, und daran eine auf LE senkrechte Kraft W angebracht; so entstünde daraus fürs Gleichgewicht folgende Proportion $ED : EL = W : P$, denn die Kraft P am D läßt sich als eine Last in der Entfer-

fernung ED von der Axe der Spindel FO angebracht ansehen; folglich $P = \frac{EL}{ED} \cdot W$. Nun hatte man $P : Q = a : b$; folglich auch $P = \frac{a}{b} \cdot Q$; also auch $\frac{aQ}{b} = \frac{EL \cdot W}{ED}$ oder $aQ \cdot ED = EL \cdot W \cdot b$. Woraus $W : Q = a \cdot ED : EL \cdot b$.

Es sey ferner die Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= 1 : \pi$; so wird seyn $1 : \pi = 2ED : b$. oder $b = 2\pi ED$. Also $W : Q = a \cdot ED : 2\pi ED \cdot EL$. Oder $W : Q = a : 2\pi EL$. Das ist: die Kraft verhielte sich zur Last, wie die Weite zweyer Gänge zur Peripherie, die mit dem Hebelsarm beschrieben würde; je kleiner die Weite zweyer Gänge, und je länger der Hebelsarm seyn wird; desto größer wird das Vermögen der Schraube seyn.

115. Die von der Kraft W angegriffene Stelle L legt den Weg $S = 2\pi EL$ zurück, wenn die Last Q um die Höhe $s = a$ eines Schraubenganges gehoben wird; woraus $s : S = a : 2\pi EL$. nun $W : Q = a : 2\pi EL$. Also auch hier $s : S = W : Q$, wie bey den vorigen Maschinen.

116. Die Schrauben werden mehrentheils an solchen Orten angebracht, wo eine große Gewalt in einem kleinen Raum ausgeübt werden soll. Sie haben einen vierfachen Nutzen.

I. Dienen sie etwas zu befestigen. Dahin gehören die Schrauben an den Schlössern, die Schrauben in den Uhren, der Schraubenstock, dessen sich die Schlösser und Uhrmacher bedienen.

II.

II. **Zum Druck.** Hieher gehören die Hauspressen zum Pressen der Wäsche, die Siegelpressen, die Druckpressen u. d. gl. vor allen andern ist aber die Münzpresse sehr wichtig.

III. **Zur Hebung einer Last.** Hieher gehören die großen Schrauben der Zimmerleute, welche sie durch Hülfe einer durch die Spindel gesteckten Stange umdrehen, und dadurch die Hauptholzer der obern Etagen, wenn sich ein Gebäude gesenkt hat, in die Höhe heben.

IV. Zu einer gleichförmigen und sanften Bewegung, die man besonders bey den astronomischen Instrumenten braucht. Die Schrauben pflegen von Holz oder Stahl zu seyn. Die hölzernen sind vom harten Holze, als Weißbuchen, Wildbirnbaumholz Der Metallenen bedienen sich die Schlösser. Die besten sind diejenigen, welche geschmiedet, und hernach geschnitten werden. Man braucht sich aber auch der gegossenen mit Vortheile, und diese sind nicht so kostbar. s. *Eberhards Beyträge. Walchers kurzen Inhalt der mechanischen Kollegien.*

Von der Schraube ohne Ende.

117. Eine Schraube ohne Ende ist diejenige AC (Fig. 31.), welche in die Zähne des Stirnrades F eingreift. Die Axe der Schraube muß mit der Tangente des Rades parallel seyn.

Die Schraube braucht nur drey Gänge. Wenn die Kurbel $CB = r$, vermittelst welcher die Schraube herumgedreht wird, einmal herumkömmt, so wird nur ein Zahn des Rades fortgestossen; soll nun das Rad einmal herumkommen, so muß die Kurbel sovielmal herumkommen, als Zähne am Rade sind.

Die Zähne am Rade müssen schief eingeschnitten werden, daß sie in die Vertiefungen der Schraube richtig passen; denn sie stellen das erhabene Gewind einer Schraube vor.

118. Wenn sich die Kraft W in einer Tangente der Kurbel CB (Fig. 31), die Last L an der Welle E, deren Halbmesser $= e$ ist, befindet; wenn ferner die Weite zweyer Gänge $= a$, und CB die Länge des Hebelarms, oder Kurbel $= r$; der Halbmesser des Rades $= f$ ist, die Verhältniß der Kraft zur Last zu finden.

Auflösung. Man bewies, (§. 114.) daß sich $W : Q = a : 2\pi\ EL$ verhalte; nun ist hier $EL = CB = r$, also $W : Q = a : 2\pi r$, und $W . 2\pi r = Qa$; dann $\frac{W . 2\pi r}{a} = Q$. Q ist nun jener Druck, den die Kraft W in dem Berührungspunkte der Schraube mit dem Rade ausübt.

Man sehe itzt, welchen Druck an demselben Punkte die Last L ausübe; zu dieser Absicht suche man die Kraft, die mit L in der Entfernung f im Gleichgewichte wäre; es wird dann seyn, $f : e = L : \frac{eL}{f}$. Also ist der gesuchte Druck an dem obgesagten Punkte $\frac{eL}{f}$.

Soll nun ein Gleichgewicht zwischen der Last L, und der Kraft W entstehen, so muß $\frac{eL}{f} = \frac{W . 2\pi r}{a}$ seyn, oder $aeL = W . 2\pi fr$, woraus $W : L = ae : 2\pi fr$.

119.

119. Man setze die Weite zweyer Gänge als beständig $= 1$; $2\pi f$ ist ohnehin der Umfang des Rades, der auch durch die Menge der Zähne $= n$ gegeben wird; so ist $W : L = e : n r$, das ist: die Kraft verhält sich zur Last, wie der Halbmesser der Welle, an der die Last ist, zum Produkte aus der Länge der Kurbel in die Menge der Zähne des Stirnrades.

Beyspiel: $e = 1$, $n = 60$, $r = 8$; also $W : L = 1 : 480$. Eine Kraft, die das Vermögen besitzt, 1 ℔ zu erhalten, wird durch diese Maschine 480 Pfund erhalten können.

Es ist nun hier ein besonderer Gewinn an der Kraft, aber auch ein namhafter Verlust an der Zeit; laut voraus gesagten.

120. Der Raum der Last s, verhält sich zum Raume der Kraft S, wie $W : L$.

Beweis: Wenn die Schraube einmal herumkömmt, so ist der Raum der Kraft die mit der Länge der Kurbel r beschriebene Peripherie; also $S = 2\pi r$. In dieser Zeit aber geht ein Zahn des Rades fort, folglich wird die Schnur, an der die Last L hängt, um einen der Weite zweyer Gänge a ähnlichen Bogen um die Welle abgekürzt. Nun verhalten sich die Halbmesser ähnlicher Bögen, wie die Bögen selbst; also $f : e = a : \frac{e a}{f}$, also $s = \frac{e a}{f}$, folglich $s : S = \frac{e a}{f} : 2\pi r$, oder $s : S = e a : 2\pi r f$. Es ist aber auch $W : L = e a : 2\pi r f$, also $s : S = W : L$.

121.

121. Wenn die Welle E mit Vertiefungen versehen ist, in die die Zähne des Rades M eingreifen, an dessen Welle G die Last L herabhängt; die Verhältniß der Kraft W zur Last L zu finden. (Fig. 32.)

Auflösung. g sey der Halbmesser der Welle G; m der Halbmesser des Rades M, μ sein Umfang; ε der Umfang der Welle E.

Der Druck, den die Last L an dem Berührungspunkte des Rades M mit der Welle E ausübt, wird seyn $m : g = L : \frac{g\,L}{m}$. Dieser Druck $\frac{g\,L}{m}$ wird am Berührungspunkte des Rades F mit der Schraube folgenden ausüben, $f : e = \frac{g\,L}{m} : \frac{e\,g\,L}{f\,m}$. Dieser muß nun im Falle des Gleichgewichts dem Drucke der Kraft W an demselben Punkte gleich seyn.

Dieser ist aber (118.) $\frac{W \cdot 2\pi r}{a}$; also $\frac{e\,g\,L}{f\,m} = \frac{W \cdot 2\pi r}{a}$, oder $a\,e\,g\,L = f\,m\,W \cdot 2\pi r$, woraus die gesuchte Verhältniß fließt $W : L = a\,e\,g : 2\pi f m r$.

122. Es verhalten sich aber die Peripherien wie ihre Halbmesser; also $\varepsilon : \mu = e : m$; folglich $m = \frac{e\,\mu}{\varepsilon}$. Also $W : L = a\,e\,g : \frac{2\pi f e \mu r}{\varepsilon} = a\,g : 2\pi f \frac{\mu}{\varepsilon} r$.

Nun ist $\frac{\mu}{\varepsilon} = k$ der Zahl der Umdrehungen des Rades F, die auf eine Umdrehung des Rades M gehen, und

und a sey abermal $= 1$, und $2\pi f = n$; also $W : L = g : n k r$.

Beyspiel. $g = 1$, $n = 60$, $r = 8$, $\mu = 80$, $\varepsilon = 8$; so ist $k = \frac{\mu}{\varepsilon} = 10$; folglich $W : L = 1 : 60 . 10 . 8$ oder $W : L = 1 : 4800$.

123. Anmerkung. Eine solche Maschine, deren Vermögen ich itzt berechnete, sah man sonst in dem bekannten musæum mathematicum des Jesuiterkollegiums bey St. Klemens auf der Altstadt. Vermittelst derselben konnte ein schwaches Kind, wenn es die aus dem Kasten hervorragende Kurbel herumdrehete, einen daran hägenden schweren Stein erheben, er hatte folgende Inschrift an sich δος μοι που στω, και κινησω την γην. Es waren nämlich die kühnen Worte des Archimedes, da er vom Könige Hiero einen Standort außer der Erde begehrte, um nach seinen Vorgeben (vermuthlich vermittelst dieses Rüstzeuges) die Erde bewegen zu können, hätte ihm auch der gute Hiero den begehrten Standort verschafft; so könnte doch Archimedes sein Versprechen nicht erfüllen. Siehe Sturmii Mathesim Juvenilem.

124. I. Anmerkung. Unter den bis itzt erklärten Maschinen, sind die einfachen: Hebel, Rad an der Welle, Rolle, schiefe Fläche; Keil und Schraube sind bewegliche schiefe Flächen.

Wenn die einfachen Rüstzeuge mit einander verbunden werden, so entstehen daraus die zusammengesetzten, deren unzählige sind. Einige Proben davon werden bey der mündlichen Erklärung den Hrn. Zuhörern von mir gewiesen.

Z. B. Ein vom Belidor entworfenes Schlagwerk, wo der Rammel vermittelst einer Winde aufgezogezogen, und das Seil, an dem er herabhängt, um einen sammt der Winde beweglichen Trilling herumgewunden wird. Der Trilling läßt sich auch ohne der Winde bewegen, wenn sich das Seil von ihm abwinden soll. Den Rammel hält eine an das Seil befestigte Zange, deren Arme in einer oben angebrachten Aushöhlung zusammengepreßt werden, und ihn davon über den Pfahl herabfallen lassen.

Er fiele nun z. B. 1 Fuß tief, seine Schwere wäre = 500 ℔; mit welcher Gewalt wird er über den Pfahl herabsinken?

Das mechanische Mommeut ist bekanntermassen ein Produkt aus der Geschwindigkeit in die Masse. Die Geschwindigkeit wird durch den Raum angegeben, den ein Körper in einer Sekunde mit gleichförmiger Bewegung zurücklegt; diesen findet man nun auf folgende Art.

Daß ein Körper 16 Londner Schuh tief falle, dazu braucht er eine Sekunde; daß nun der Rammel einen Schuh tief herabfalle, welche Zeit x wird er brauchen?

Man weiß, daß sich die Räume bey dieser gleichförmig beschleunigten Bewegung wie die Quadrate der Zeiten verhalten; also $16' : 1' = 1'' : x^2$; also $x = \frac{1}{4}''$ dies ist nun die gesuchte Zeit. Beschreibt er aber einen Schuh in dieser Zeit, so wird er in derselben 2 Schuh beschreiben, wenn er sich mit der Finalgeschwindigkeit gleichförmig bewegt; was wird er dann in einer Sekunde zurücklegen? nämlich $\frac{1}{4}'' : 1'' = 2' : 8''$. Also ist das gesuchte Mommeut des Rammels $= 8 . 500 = 4000$.

Wenn der Pfahl nach dem ersten Schlag 13 Zoll tief in die Erde gesunken, und der Rammel von einer Höhe $= 36''$ gefallen ist; so fällt er nach dem zweyten Schlag von einer Höhe $= 36 + 13 = 49''$.

Ich

Ich nehme an, das Erdreich, durch welches der Pfahl geht, sey durchaus gleich beschaffen, leiste ihm stets den nämlichen Widerstand; folglich werden seine Vertiefungen die Wirkungen der Schläge seyn, und mit ihnen in einerley Verhältnisse stehen.

Weil sich aber die Räume des Rammels $36''$, $49''$ wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten, so sind seine Geschwindigkeiten $\sqrt{36} : \sqrt{49} = 6 : 7$.

In dieser Verhältniß sind nun die Schläge, folglich auch die Vertiefungen. Man findet also die zweyte Vertiefung y des Pfahls, wenn man macht $6 : 7 = 13 : y$, woraus $y = 15''\frac{1}{6}$ ꝛc.

125. II. **Anmerkung.** Die Kräfte, mit denen die Maschinen bewegt werden, kommen entweder belebten Geschöpfen, als Menschen und Thieren, oder leblosen zu, wohin Gewichte, Federn, Wasser, Luft, Feuer gehören.

Ein Mensch kann I. durch Drehen eine Maschine bewegen; zu dieser Absicht ist ihm ein Hornhaspel dienlich, mit dem die übrige Vorrichtung verbunden seyn muß.

II. Theils durch Ziehen, theils durch Niederdrücken; und dies läßt sich vermittelst eines Kreuzhaspels bewerkstelligen.

III. Theils durch Ziehen, theils durch Schieben, welches durch Hilfe eines mit einem krummen Zapfen verbundenen Hebels hervorgebracht wird. Denn das an der durch den krummen Zapfen unterbrochenen Welle befestigtes Rad beschreibt eine Hälfte seines Umfangs durch das Ziehen des Menschen, und die zweyte durch das Schieben. Sieh Problema 140. §. 884. Wolfii Elementorum Mechanicæ.

IV.

IV. Durch Treten. Zu diesem Ende muß das Rad an der Welle den Umfang von fester Materie haben, daß ein Mensch darinn auf und ab gehen kann.

V. Durch bloßes Ziehen, welches vermittelst einer Schnur geschieht, die um eine feste Rolle geht.

VI. Durch bloßes Schieben, dies kömmt bey einer Winde vor.

Ein Thier kann I. durch Ziehen die Bewegung veranlassen, wenn an eine Vertikalwelle eine horizontale Deichsel befestigt ist, woran das Thier angespannt und rings herum getrieben wird.

II. Durch Treten. Wenn der Boden des Stalls, worüber die hintern Füsse eines darauf stehenden Thiers kommen, eine Oeffnung hat, in welche die schiefen Schaufeln des sich darunter befindlichen Rades einpassen; so wird eine Schaufel nach der andern den daran gesetzten Füssen des Thiers ausweichen, und die Bewegung des Rades hervorbringen müssen.

Ein Gewicht bringt in Bewegung ein grösseres Uhrwerk, z. B. eine Wanduhr. Es wird nämlich an eine Schnur befestigt, welche um die Welle des ersten Rades einigemal herumgewunden ist, durch sein Sinken windet sich die Schnur ab, und das Rad drehet sich dadurch herum.

Weil sich aber ein Gewicht gleichförmig beschleunigt bewegt, und das Uhrwerk eine gleichförmige Bewegung erfodert, so muß die Bewegung des Gewichts alle Augenblicke zurückgehalten werden; welches man bey größern Uhren durch das Steigrad, den englischen Hacken, und das Perpendikel, bey Tafeluhren und Taschenuhren aber (wo eine Feder wirkt) durch das Steigrad und die Unruh erlangt.

Das Feuer haben vorzüglich Savery, Amontons, Papin zur Bewegung der Maschinen anzubrin-

gen

gen gedacht. Sieh Theorie des Machines mues par la force de la Vapeur de l' Eau. Ouvrage, qui à remporté le prix proposé par l' Academie Imperiale des ſçiençes de Saint Petersburg pour l' Anné 1783. par M. de Maillard Capitaine Lieutenant au Corps Imperial & Royal du Génie.

Die Federn verursachen die Bewegung der Taseluhren und Taschenuhren.

Es wird nämlich eine zusammengerollte Feder in einen hohlen Cylinder dergestalt eingeschlossen, daß sie den Cylinder (die Trommel) herumdrehet, indem sie sich ausbreitet. Nun sey eine Kette mit einem Ende an der Trommel, mit dem andern an einem Schneckenkegel, der sich um seine Axe drehen läßt, befestigt, daß sich dieselbe auf den Cylinder aufwindet, so wird sich der Schneckenkegel herumdrehen, und vermittelst eines an ihm befindlichen Schneckenrades andere Räder in Bewegung setzen.

Der **Wind** bewegt Windmühlen, die man in der Folge erklären wird.

Das **Wasser** bewegt ein Rad entweder durch den Stoß, den es unten auf die Schaufeln ausübt. Ein solches Rad heißt unterschlächtig; oder durch seine Schwere, wenn es von oben in einige leere Kästen eines oberschlächtigen Rades herabfällt; denn das Rad hängt im Gleichgewichte, so lange alle Kästen, die sich am Umfange desselben befinden, leer sind; die nun das Wasser aufgefangen haben, überwiegen den leeren, und nachdem sie es unten ausgeschüttet haben, steigen mit niederwärts gekehrten Oeffnungen hinauf.

Das unterschlächtige Wasserrad kann nach der Größe seiner Schaufeln viel Wasser auffangen, und der Fluß, in dem es hängt, braucht sich nur wenig in seinem Laufe zu senken, weil er unter dem Rade wegfließt.

Was-

Wasser, das auf ein oberschlächtiges Rad fallen soll, muß da ohngefähr so hoch als des Rades Durchmesser beträgt, über des Rades unterster Stelle seyn.

Hieraus übersieht man, daß das Oberschlächtige in gebirgigten Gegenden bequemer anzubringen ist, das Unterschlächtige in ebenen Gegenden, wo sich auch mehreres Wasser, dessen dieses Rad bedarf, aus den kleinern Bächen der Gebirge gesammelt hat.

126. Das Gefälle (Fig. 33.) ist MG jene Größe, welche anzeigt, wie viel die Oberfläche der Erde oder eines Flußes LG an einem Orte G tiefer, als an dem andern L liegt.

LM ist eine Horizontallinie durch den Ort L gezogen, diese schneidet die Vertikallinie, an dem Orte G errichtet in M; also muß MG die Größe geben, um welche der Ort G tiefer als L liegt; in dem alle Punkte einer wahren Horizontallinie von dem Mittelpunkte der Erde gleich entfernt seyn müssen, wenn sie eine Kugel ist.

Will man nun das Gefälle finden, so muß man zwischen zwey Oertern eine Horizontallinie ziehen, welches vermittelst einer Wasser oder Schrotwage geschieht, und das Verfahren selbst heißt **Wasserwägen.**

127. Wenn AED der größte Kreis der Erde, C der Mittelpunkt ist; so ist AD die wahre, AB aber, welche sie in A berührt, die scheinbare Horizontallinie. Man will ED wissen, um was B über D dem Endpunkte der wahren Horizontallinie erhoben ist, wenn AC, AB bekannt sind. (Fig. 34.)

Es ist $CD^2 + 2CD \times DB + DB^2 = AC^2 + AB^2$, nun $AC^2 = CD^2$, also $2CD \cdot DB$

$+ DB^2 = AB^2$. oder $(2CD + DB) DB = AB^2$. Es ist aber DB in Vergleichung mit CD in diesem Falle als unendlich klein anzusehen; folglich $2CD \cdot DB = AB^2$, und $DB = \frac{AB^2}{2CD}$.

Ist nun $AB = 300'$, und der Durchmesser der Erde $2CD = 39231564'$, so ist nach Pikards Berechnung $DB = \frac{1}{8}'''$, also AB beynahe $= AD$. Ist aber $AB = 6000'$, so ist $DB = 11''$; und diese müßten von dem gefundenen Gefälle abgezogen werden.

Beschreibung der vornehmsten Theile einer Mahlmühle mit unterschlächtigen Wasserrädern.

128. Die vornehmsten Theile einer Mahlmühle sind das Grundwerk; das Gerinne; der Mühlengang; und die verschiedenen Arten des Zeuges.

Da die Gewalt des Wassers in kleinen Strömen nicht hinreichend seyn würde, ein Wasserrad umzudrehen, so muß dieselbe durch den Fall vermehrt werden. Zu dem Ende aber ist es nöthig, daß es erst steige. Und dieses kann nicht anders geschehen, als in dem es gedämmt wird. Es geschieht dieses durch ein eigenes quer über den Fluß gelegtes Gebäude, welches das Grundwerk genannt wird.

Hier kömmt vor I. der Heerd, welcher das Wasser aufzuhalten, angelegt wird. (Fig. 35.) Dieser besteht in sehr starken Pfählen, die quer über den Strom 4 Ellen weit von einander eingeschlagen werden. Uiber diese Pfähle wird der Fachbaum B horizontal gelegt, seine Höhe bestimmt man durch den in einiger

Ent-

Entfernung vor ihm eingeschlagenen Mahlpfahl *A*, dessen obere Fläche eigentlich mit des Fachbaumes seiner in einer wagrechten Ebene seyn sollte. Weil man aber annimmt, das Holz werde im Wasser nach und nach abgezehrt, so wird an vielen Orten der Fachbaum einen Zoll höher als der Mahlpfahl anzeigt, gelegt, welches man den Erbzoll, oder Zehrzoll nennt.

Vor dem Mahlpfahl werden vier Reihen Pfähle in *C*, *D*, *E*, *F* eingeschlagen, deren die erste in *C* neun Zoll tiefer steht als der Mahlpfahl, die zweyte *D* wieder 9 Zoll tiefer, und die letzte in *F* am tiefsten, damit der Heerd desto besser mit Sande verschlämmt werden könne; über die Pfähle *C*, *D*, *E*, *F* werden Schwellen gelegt, und mit kiefernen Pfosten bedeckt.

An den Seiten des Ufers werden Pfähle eingeschlagen, über welche Plattstücke kommen, die Wände des Heerdes zu machen.

Zwischen die Pfähle, worauf der Fachbaum liegt, werden noch andere Pfähle in *H*, *I*, *K* eingestossen, worüber die Jochstücke *L G* liegen, welche den Fachbaum befestigen, daß er dem Druck des andringenden Wassers widerstehen kann.

Quer vor dem Fachbaume kömmt eine Reihe Pfähle *M*, die dicht an einander eingeschlagen sind.

Uiber den Fachbaum kömmt II. das Grieswerk, dieß besteht aus den Griessäulen *N B*, die so weit von einander stehen, als das Gerinne breit seyn soll. Zwischen diesen sind die Schutzbretter in Falzen befindlich, welche man aufziehen oder niederlassen kann, das Wasser dadurch wo man will zu hemmen, oder durchzulassen.

Der

II. Der zweyte Theil einer Mahlmühle ist das Gerinne oder die schiefe Fläche *BG*, über welche das Wasser von dem Fachbaume an das Mühlrad *R* herabfallen muß. Ein solches Gerinne, wo das Rad hängt, heißt ein Mahlgerinne, diejenigen, welche dazu dienen, daß das Wasser, welches nicht auf das Rad fallen soll, abfließen kann, heißen wüste Gerinne. Die Mahlgerinne werden in Nebenstücken geändert, nach dem das Mühlrad ein Staberrad, Strauberrad, oder Pansterrad ist.

III. Nun kömmt der dritte Theil zu erklären, nämlich der Mühlengang. (Fig. 36.)

Dieser besteht aus zween über einander gelegten Mühlsteinen, deren unterer *A* der Bodenstein unbeweglich liegt, der obere aber *B* der Laufer herumgedreht wird. Uiber dem Laufer befindet sich ein hölzerner Trichter *C*, der Rumpf genannt, in welchem das Getraid aufgeschüttet wird. Dieser Rumpf hat statt des Bodens ein bewegliches Brett den Schuh *D*, welcher mit einen Riemen *E* in die Höhe gebracht, oder niedergelassen werden kann. Der Schuh wird durch den Rührnagel *f*, der unten daran befestigt ist, beständig geschüttelt, bey diesem Schütteln fallen die Körner über den Schuh durch das Loch, welches mitten durch den Laufer durchgeht, bis auf den Bodenstein hinab, wo sie zermahlt werden.

Damit die zermahlte Frucht beysammen bleibe, ist der Laufer mit einem hölzernen Kranz, oder Zarge *GG* umgeben; der eine einzige Oefnung hat, nämlich das Mehlloch *H*, wo die Frucht in den Mehlbeutel *IK* hinausfällt. Dieser Beutel wird von einer Gabel *L*, die ihn angreift, und vermittelst des Steckens *Q*, der an die Zacken des Mühlsteingetriebes *M* immer anstößt, beständig geschüttelt, und also fällt das Mehl gleich als durch ein Sieb in den Mehlkasten *N*; die

Kleyen

Kleyen aber und die Grüze fallen durch die andere Mündung des Beutels bey K heraus, und kommen gemeiniglich noch auf ein oder das andere Sieb, um in mehrere Sorten eingetheilt zu werden.

Die eiserne Stange, die den Laufer trägt, oder das Mühleisen muß auf einem beweglichen Baume auf dem Steg P stehen, welcher gehoben und niedergelassen werden kann, wenn man die Mühlsteine weiter von einander entfernt, oder näher beysammen haben will.

Der Laufer wird auf folgende Art herumgedreht; das Mühleisen geht aus der Welle des Mühlsteinsgetriebes M, in dessen Triebstöcke das Kammrad O eingreift, dessen Welle zugleich die Welle des Wasserrades R ist.

Bey gemeinen Wassermühlen giebt man dem Getriebe 6 Stöcke, und dem Rade 72, bis 84 Kämme.

IV. Durch den vierten Theil einer Mehlmühle, nämlich durch die verschiedenen Arten des Zeuges versteht man verschiedene Wasserräder.

Ein Staberrad hat zween Ringe oder Reifen, zwischen denen die Schaufeln eingezapft sind.

Ein Strauberrad hat nur einen Reifen, auf dessen Stirne die Schaufeln stehen. Auch ist die Kröpfung des Mahlgerinnes bey dem Staberrade ganz flach, aber bey dem Stauberrade wird sie nach der Rundung desselben geführt.

Ein Pansterrad hat wie das Staberrad gerade Schaufeln zwischen zween Reifen, es ist aber wohl noch einmal so breit, und übt daher eine größere Gewalt aus, darum treibt es gemeiniglich in größeren Strömen zween Gänge; läßt sich das Rad in die Höhe ziehen, so heißt solches Pansterzeug.

Be=

Beschreibung der vornehmsten Theile einer Windmühle.

129. Hier ist I. der Trieb oder die Flügel zu betrachten, II. muß die innere Einrichtung der Mühle bestimmt, und III. die Art, die Flügel dem Winde entgegensetzen zu können, gezeigt werden.

I. Die Flügel sind 30 bis 32 Fuß lange Gerüste $A\alpha$, die an einer schief gestellten Welle BC dergestalt befestigt sind, daß ihre Flächen mit der Axe der Welle BC einen Winkel von 54° 44′ machen. Denn, wenn Größe des Flügels und Geschwindigkeit des Windes eben dieselben sind, so ändert sich die Kraft, mit welcher er gedrehet wird, nach seiner Stellung gegen die Axe, und verhält sich wie $Cos.\,\gamma\,.\,Sin.\,\gamma^2$. Kästners Mechanik p. 92. n. 138. Diese Bestimmung gilt aber nur für den Anfang, wenn der Flügel noch ruhet, woraus sich seine vortheilhafteste Stellung, da er nämlich von jedem Winde mit der größten Gewalt gedrehet würde, finden läßt. γ ist der Neigungswinkel des Flügels gegen die Axe.

Es muß dann $Cos.\,\gamma\,.\,Sin.\,\gamma^2$ am größten seyn. Man setze $Cos.\,\gamma = u$; so ist $Sin.\,\gamma^2 = 1 - u^2$, folglich $Cos.\,\gamma\,.\,Sin.\,\gamma^2 = u - u^3$. Nun $d\,(u - u^3) = d\,u - 3\,u^2\,d\,u$; soll aber $u - u^3$ am größten seyn, so muß das Differenzial davon gleich nichts gesetzt werden. Also $d\,u - 3\,u^2\,du = o$; oder $du = 3\,u^2\,du$; oder $1 = 3\,u^2$. Daher $\frac{1}{3} = u^2$; und $\frac{1}{\sqrt{3}} = u$. Wenn man aber sowohl den Zähler als den Nenner mit $\sqrt{3}$ multiplizirt, so wird der Werth des Bruchs nicht gestört. Also $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Also $\frac{\sqrt{3}}{3} = u$.

Nun ist $\sqrt{3} = 1,7320508$; und $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $= 0,5773503$, also $0,5773503 = u = Cos. \gamma$, welchem $35° \cdot 16'$ beynahe zukommen; folglich ist γ der gesuchte Neigungswinkel, die Ergänzung des vorigen zu einem rechten, nämlich $54° \cdot 44'$.

Jeder Flügel besteht aus drey Bäumen, der mittlere heißt die Windruthe; sie werden durch Querhölzer in Fächer getheilt, und mit leichtem Bretterwerke angefüllt, welches bey starkem Sturmwinde ausgenommen werden muß. Am äußersten Ende ist jeder 6 Fuß, am innern $4\frac{1}{2}$ Fuß breit. Ihre Anzahl ist gemeiniglich viere.

II. Die innere Einrichtung der Mühle ist folgende: An der Welle der Windflügel befindet sich das Kammrad D, welches unterwärts in das Getriebe E greift, an dessen Welle sich unten der Mühlstein befindet. Das Kammrad hat 72 Zähne, das Getriebe 9 Stöcke, und der Mühlstein 5 Fuß im Durchmesser, welches ungleich mehr ist, als bey den Wassermühlen. Dadurch vertritt der Mühlstein die Stelle eines Schwungrades, welches bey einer Windmühle höchst nöthig ist, weil der Wind nicht beständig mit gleicher Stärke, sondern rückweise bläset. Die von einem Stoß verursachte Bewegung muß daher eine Zeit lang, so viel möglich, mit gleicher Stärke erhalten werden, bis ein neuer Stoß geschieht. Der Mühlstein hat zwey Mühleisen, eins, welches ihn bewegt, und eins, welches ihn trägt, an dem auch das Getriebe *e* befestigt ist, an welches die Gabel, darinn der Mehlbeutel steckt, stets anstößt.

Damit aber die Mühle, wenn es nöthig ist, in ihrer Bewegung aufgehalten werden könne, so geht um

das

das Kammrad ein aus etlichen Gliedern bestehender Kranz, der durch Hilfe eines Hebebaums niedergedrückt, und dadurch so fest an das Kammrad angepreßt werden kann, daß die Bewegung des Kammrades gehindert, und dadurch die Welle sammt den Flügeln stille zu stehen genöthigt wird.

III. Die Windflügel werden dem Winde, der nicht von derselben Gegend stets herbläset, entgegengestellt; wenn entweder das Dach der Mühle, worinn ihre Welle steckt, oder das ganze Gebäude beweglich ist; ein solches Gebäude ist von Holz, und heißt eine Bockmühle, ihr Gestelle aber, worauf sie ruht, der Bock; sie läßt sich um die Vertikalwelle *g b* vermittelst der Deichsel *o d* herumdrehen; damit aber die Bewegung erleichtert würde, so verbindet man durch ein an *d* befestigtes Seil eine Winde damit.

130. **Anmerkung.** Die Beschreibung dieser Mühle ist zum Theil aus Eberhards Mühlenbaukunst entlehnt, mit andern Mühlen sowohl dem Triebe als dem Gebrauch nach können sich meine Hrn. Schüler durch das Lesen des angeführten Werkes und Sprengels Handwerke und Künste in Tabellen 12 Sammlung bekannt machen.

Allgemeine Begriffe von den Uhrwerken.

131. Ein Uhrwerk heißt eine Maschine, die durch ihre Bewegung die Theile der Zeit anzeigt.

Man gebrauchte sich sonst der Wasseruhren, welche von Vitruvius Lib. 9. c. 9. beschrieben werden. Jtzt nennt man dieselben Sanduhren, weil man sich des Sandes statt des Wassers dabey gebraucht. Darüber machte einst ein geschickter Dichter folgendes Sinngedicht:

Tempus aqua veteres, at nos metimur arena;
Fluxere illorum tempora, nostra ruunt.

132. Die Uhrwerke, als Räderwerke lassen sich am besten nach der bewegenden Kraft abtheilen; einige von ihnen erhalten ihre Bewegung von der Schwere eines Gewichts, andere aber von einer elastischen Feder, wie man es schon vorhin erinnerte. Jene heissen Stadt- und Wanduhren, diese Tafel- oder Taschenuhren.

Der ungleiche Zug der Feder wird durch ein kleines Perpendikel, oder durch die Unruhe, das ist, durch eine Spiralhaarfeder, deren ein Ende an der Platte der Taschenuhr, das andere an der Spindel, worauf ein Rad sitzt, befestiget ist; und zugleich durch einen Schneckenkegel gehoben.

Eine Kette verknüpft die in einem hohlen Cylinder (der Trommel) eingeschlossene Feder mit dem Schneckenkegel, der mit dem größten Rade (dem Schneckenrade) zusammenhängt.

Man läßt die Kette darum um einen Schneckenkegel gehen, weil die Feder vom Anfange ihrer Ausbreitung die größte Gewalt, am Ende aber die geringste ausübt, indem die Elastizität, der zusammendrückenden Kraft immer gleich und entgegengesetzt ist.

Nun bekömmt sie durch die Gestalt des Schneckenkegels vom Anfange ihrer Ausbreitung den geringsten, am Ende aber den größten Abstand von dem Umdrehungspunkte, so ist ihr erstes Momment dem letzten, und auch dem dazwischen fallenden gleich. Z. B. Die Federkraft vom Anfange sey = 12 ℔, der Abstand der Kette, als der Richtungslinie der Kraft, vom Umdrehungspunkte oben an der konischen Schnecke = 1. Am Ende der Ausbreitung sey die Federkraft

$= 4$ ℔. Der Abstand der Kette zu unterst der Schnecke $= 3$, so wird das erste Momment $12 \times 1 = 4 \times 3$ dem letzten seyn.

133. Die Natur theilt zwar die Zeit in Jahre, Monate, und Tage ab, allein dies ist bey unendlichen Vorfällen des gesellschaftlichen Lebens nicht hinreichend. Man erwartet daher von einer Uhr, daß sie die Zeit in kleinere und gleiche Theile abtheile. Dies ist aber nicht von der wahren, sondern nur von der scheinbaren Zeit zu verstehen, da man auf jeden Tag gerade vier und zwanzig gleiche Stunden rechnet; durch den Tag aber versteht man den Aufenthalt der Sonne sowohl über den Horizont, als darunter, jede Stunde enthält in sich 60 Minuten, jede Minute 60 Sekunden, diese Theile der Zeit, nämlich sowohl die Stunden, als Minuten, und Sekunden müssen durch das Uhrwerk angezeigt werden.

134. Man verfertigt itzt selten Stubenuhren, die nur 24 Stunden in einem Aufzuge gehen, weil die Uhr jederzeit etwas in ihrem Lauf gehemmet wird, wenn man sie aufzieht. Die neuern Uhren dürfen daher gewöhnlich erst nach acht Tagen aufgezogen werden, und dies gilt sowohl von dem Gehwerke, als von dem Schlagwerke.

Die Bewegung und die Genauigkeit der ganzen Uhr hängt von dem Gehwerke ab. Das Perpendikel schlägt bey den vollkommensten Uhren dieser Art in einer Sekunde gewöhnlich einmal, und also in einer Stunde 3600.

Das Gehwerk einer Achttageuhr erhält vier Räder und drey Getriebe. Das Boden- oder erste Rad, welches sich in 12 Stunden einmal umdreht, wird unmittelbar von dem Gewichte bewegt. Daher steckt eine Walze mit diesem Rade auf einer Welle,

und

und um dieselbe wickelt sich beym Aufziehen der Uhr die Schnur von einer Darmsaite, welche das Gewicht trägt.

135. Meine Hrn. Schüler erhielten von mir in den Kollegien die Erklärung einer Taschenuhr, hier will ich das Gehwerk einer Stubenuhr berechnen.

Bey dieser Berechnung muß man drey folgende Stücke zum voraus festsetzen. I. Wieviel Zähne das Steigrad *N* (Fig. 38.) erhalten soll, II. in welcher Zeit sich das Bodenrad *E* um seine Axe wälzen, und III. wie oft das Perpendikel während der festgesetzten Umlaufzeit des Bodenrades schlagen soll. Aus diesen drey Gliedern wird durch die Regel Detri eine vierte Zahl gesucht. Vorläufig ist nur noch zu bemerken, daß die Zähne des Steigrades bey der Berechnung verdoppelt werden, weil das Perpendikel zweymal schlägt, während daß sich das Steigrad um einen Zahn weiter umdreht.

Beyspiel. Die Uhr solle aus vier Rädern bestehen; das Bodenrad *E* wälze sich in 12 Stunden einmal um; das Steigrad *N* habe 30 Zähne; und das Perpendikel schlage in einer Stunde 3600mal, also in 12 Stunden 43200mal.

So wird man die Umdrehungen x des letzten Getriebes und des Steigrades durch folgende Proportion finden; $60 : 1 = 43200 : x$; also $x = 720$; weil sich das Perpendikel an der Welle des englischen Hackens *M* zweymal schwingt, wenn ein Zahn des Steigrades *N* fortgestossen wird; nun sind der Zähne 30; also machen sechzig Schwingungen eine Umdrehung des Steigrades; wieviel Umdrehungen x, werden 43200 Schwingungen machen? nämlich $x = 720$.

Man zerfälle nun diese Zahl (laut §. 91.) in drey Faktoren, weil man nebst dem Steigrade drey

Räder,

Räder, und drey Getriebe haben will. Man kann sich Faktoren wählen, welche man will; es sey nun z. B. $720 = 12 . 10 . 6$.

Also verhält sich der Halbmesser des Bodenrades *E*, zum Halbmesser seines Getriebes *H* $= 12 : 1 = \frac{12}{1}$.

Der Halbmesser des Minutenrades *I*, zum Halbmesser seines Getriebes *K* $= 10 : 1 = \frac{10}{1}$.

Der Halbmesser des Mittelrades *L* zum Halbmesser seines Getriebes *R* $= 6 : 1 = \frac{6}{1}$.

Wenn man aber allen Getrieben *H*, *K*, *R*, 8 Triebstöcke giebt, so hat man $\frac{12}{1} . \frac{10}{1} . \frac{6}{1} = \frac{96}{8} . \frac{80}{8} . \frac{48}{8}$.

Folglich hat das Steigrad *N* (laut der Bedingung) 30 Zähne; das Getriebe *R* an seiner Welle 8 Triebstöcke, seine Umlaufszeit beträgt eine Minute.

> *Denn es drehet sich in 12 Stunden 720mal, also in einer Stunde 60mal, also in einer Minute einmal.*
>
> *Ist nun an der Welle dieses Rades ein Weiser angebracht, so wird er auf dem Zifferblatte die Sekunden anzeigen können, wenn der Umfang des Kreises, den er beschreibt, in 60 gleiche Theile getheilt ist.*

Das Mittelrad *L* hat 48 Zähne, die in das Getriebe *R* des Steigrades eingreifen.

> *Seine Umdrehungen sind mit dem Getriebe K einerley, weil beyde einerley Welle haben. Nun findet man die Umdrehungen desselben, die*

die auf eine Umdrehung des ersten Rades *E* gehen, wenn man *E* mit *H*, *I* mit *K* dividirt, und die Quotienten zusammen multiplizirt, das ist: die Umdrehungen des Rades *L* sind

$$= \frac{96}{8} \times \frac{80}{8} = 120.$$

Also dreht sich das Mittelrad in 12 Stunden 120; folglich in einer Stunde 10mal; also in 6 Minuten einmal; weil $10 : 60' = 1 : 6$.

Das Minutenrad *I* hat 80 Zähne, die in das Getriebe *K* eingreifen, an seiner Welle ist das Getriebe *H* von 8 Triebstöcken befestigt, beyder Umdrehungen sind einerley; nun sind die Umdrehungen *H*, die auf eine Umdrehung des ersten oder Bodenrades *E* gehen

$$= \frac{E}{H} = \frac{96}{8} = 12.$$

Also dreht sich das Rad *I* in 12 Stunden 12mal, folglich in einer Stunde einmal.

Ist nun an seiner Welle ein Weiser befestigt; so wird er auf dem Zifferblatte die Minuten anzeigen, wenn der Kreis, den er beschreibt, in 60 gleiche Theile getheilt ist. Seine Umlaufszeit ist dann eine Stunde.

Das Bodenrad *E* hat 96 Zähne, die in das Getriebe *H* eingreifen, seine Umlaufszeit ist 12 Stunden.

Also wird der an seiner Welle befestigte Weiser die Stunden auf dem Zifferblatte anzeigen.

Anmerkung. Die Berechnung des Schlagwerks und andere weitläufige Beschreibungen verschiedener Uhrwerke findet man in Sprengels Handwerken und Künsten 7. u. 8te Sammlung.

Vom

Vom Reiben.

136. Die Hinderniß der Bewegung, welche von den Rauhigkeiten der Flächen, die an einander gedrückt werden, herrührt, heißt das Reiben.

137. Was ist eine rauhe Fläche? was eine rollende, was eine schabende Bewegung?

138. Das Reiben eines gegebenen Körpers, auf einem gegebenen wagrechten Boden zu untersuchen.

> Amontons hat gefunden: daß wenn Eisen, Bley, Kupfer, Holz, eine dieser Materien über der andern, oder über ihres Gleichen geht, die Friktion $\frac{1}{3}$ der Last beträgt.

139. Die Friktion hängt nicht so von der Größe der an einander gedrückten rauhen Flächen, als von dem Gewichte der angedrückten Fläche ab.

> Dies bestättigt die Erfahrung: Die schmale Fläche eines Paralellepipedums enthalte 4, die breite 12 Quadratzolle, sein Gewicht sey 24 Pfund. Man braucht ohngefähr einerley Gewicht diesen Körper auf einem wagrechten Boden fortzuziehen, welche von beyden Flächen unten liegt; liegt die schmale unten, so trägt ein Quadratzoll $\frac{24}{4} = 6$ ℔; liegt aber die breite unten, so trägt jeder Quadratzoll $\frac{24}{12} = 2$ ℔, also $6 : 2 = 3 : 1$. Sind nun die Rauhigkeiten der Flächen durch die Quadratzolle gleichförmig verbreitet, so werden so viel solcher Theilchen, als ein Quadratzoll enthält, dreymal stärker gegen die Rauhigkeiten des Bodens gedrückt, wenn die schmale Fläche, als wenn die breite unten liegt.

Dort

Dort werden wenig rauhe Theile stark in einander gedrückt, hier viele schwach. Das kann sich wohl so vergleichen, daß beydemal gleiche Hinderniß der Bewegung entsteht.

140. Die Friktion auf einer schiefen Fläche zu untersuchen. (Fig. 27.)

Soll sich der Körper auf der schiefen Ebene halten können, so muß seine respektive Schwere (102. II.) der Friktion gleich seyn, nun ist $R : Q = Sin. D : 1$. also $R = Q\ Sin. D$. Die Friktion auf der schiefen Ebene entsteht aber aus dem Drucke $CI = S$ auf diese Ebene, und (102. IV.) $S : Q = Cos. D : 1$, folglich $S = Q\ Cos. D$. Man setze also die Friktion sey $= \frac{S}{m}$; so hat man $\frac{S}{m} = \frac{Q\ Cos. D}{m}$. Nun ist die Friktion $= R$, und auch $= \frac{S}{m}$, folglich $Q.\ Sin. D = \frac{Q.\ Cos. D}{m}$ oder $Sin. D = \frac{Cos. D}{m}$, oder $\frac{Sin. D}{Cos. D} = \frac{1}{m}$. Es ist aber $\frac{Sin. D}{Cos. D} = Tang. D$ also $Tang. D = \frac{1}{m}$. Ist $m = 3$; so ist $Tang. D$ für den Halbmesser der Tafel $= 3333333$; statt welcher man die nächstkleinere 3329788 annehmen kann, zu der 18° 25′ gehören.

So muß der Neigungswinkel $D = 18° 25'$ seyn, wenn sich der Körper Q auf der schiefen Fläche durch die Friktion $= \frac{1}{3}$ des Druckes erhalten soll.

141.

141. Umgekehrt, wenn man eine schiefe Ebene nach Gefallen neigen kann, und sucht wie groß ihr Winkel mit dem Horizonte werden darf, bis ein Körper auf ihr herabzugehen anfängt, so hat man aus dieser Erfahrung D, folglich m.

Denn es ist (Fig. 28.) aus der Aehnlichk. der Dreyecke CIL, GBD; $IL : CI = GB : BD$. Oder $IL : CI = \text{Tang. } D : 1$. Nun ist IL die respektive Schwere, oder die Friktion, CI der Druck; und aus der Erfahrung $D = 18° \; 25'$ beynahe. Also $\text{Tang. } D = \frac{1}{3}$. Folglich verhält sich auch die Friktion zum Druck $= \frac{1}{3} : 1$; oder $m = 3$.

142. Die Friktion bey einem Wagebalken zu untersuchen. (Fig. 39.)

Die Friktion kömmt hier zwischen dem Zapfen D (den man sich als einen Cylinder vorstellt) und den Aushöhlungen der Scheere M vor. Die Wage sey anfänglich mit gleichen Gewichten P, P beschwert, des Wagenbalkens und der Schaalen Gewicht sey $= W$, so wird der Zapfen in seinen Lagern mit der Last $2P + W$ angedrückt, und aus diesem Drucke entsteht eine Friktion $= \frac{1}{3}(2P + W)$. Wird also in die eine Schaale bey A etwas mehr Gewicht gelegt, so muß dieses die Friktion überwinden, wenn die Wage dahin einen Ausschlag geben soll.

Aber dieses zugelegte Gewicht, das x heißen mag, vermehrt selbst den Druck, der nun $2P + W + x$ ist, und die Friktion daraus $= \frac{1}{3}(2P + W + x)$.

Es sey CH der Halbmesser des Zapfens $= e$, $CA = CB = a$. Soll der Ausschlag

bey

bey A Statt finden, so muß sich der Zapfen um seine Axe in seinem Lager drehen, also die Friktion, welche seine Fläche da leidet, überwunden werden. Diese Friktion kann man also als eine Last ansehen, die in der Entfernung $= e$ angebracht ist, die Kraft $= x$ aber in der Entfernung $= a$; beyder Momente gleich gesetzt, giebt also $\frac{1}{3}(2P + W + x) e = ax$. Man multiplizire beyde Glieder mit 3, so bekömmt man $(2P + W + x) e = 3ax$; oder $2Pe + We + ex = 3ax$, daß die Unbekannten auf einer Seiten wären, so ziehe man auf beyden Seiten ex ab; also $2Pe + We = 3ax - ex$, oder $2Pe + We = (3a - e) x$; und endlich $\frac{2Pe + We}{3a - e} = x$.

Beyspiel. $e = 1$; $a = 40''$; des Wagebalkens Gewicht $W = 20$ Pf.; in jeder Schaale $P = 150$ Pf. So ist $x = \frac{320}{119} = 2 \frac{82}{119}$ Pf.

Das Gewicht am Zapfen findet man, ohne eine unendliche fallende geometrische Progression mit Belidor summiren zu müssen; wenn man $a = e$ setzt; so wird $x = \frac{2Pe + We}{3e - e}$ seyn; das ist $x = \frac{2P + W}{2}$.

143. Weil $x = \frac{(2P + W) e}{3a - e}$; so wird x abnehmen, je kleiner e gegen a seyn wird, wenn alles übrige unverändert bleibt, denn der Bruch $\frac{(2P + W) e}{3a - e}$ wird

wird einen desto größern Nenner haben, je kleiner e in Vergleichung mit a seyn wird, also wird er und zugleich auch x dadurch verkleinert. Hieraus übersieht man, warum bey einem dünnen Zapfen die Wage schneller ist; nicht die Friktion wird durch diese Verminderung der Fläche geringer, sondern ihr Moment.

144. Die Friktion bey einem Rade an der Welle zu berechnen. (Fig. 40.)

Auflösung. Des Rades A sein Halbmesser sey $= a$, so auch der Halbmesser der Welle D sey $= d$, und des Zapfens E (der an die Lagerpfanne L angedrückt wird, wodurch die Friktion entsteht) sein Halbmesser sey $= e$. Das Gewicht des Rades und der Welle $= W$; die Last Q, so wird man $a : d = Q : P$, also

$P = \frac{dQ}{a}$ haben; wirkt nun die Kraft P nach der Tangente des Rades Pn, so vermehrt sie den Druck des Zapfens an die Lagerpfanne. Sollte sie aber die Friktion überwinden, so müßte sie um ein Gewicht x vergrößert werden, welches ebenfalls den Druck vermehrte; der ganze Druck wäre dann $P + Q + W + x$, die Friktion $= \frac{1}{3}(P + Q + W + x)$, welche als eine neue Last in der Entfernung e, von der Axe der Welle zwischen den Flächen des Zapfens und des Lagers anzusehen ist. So ist dann ihr Momment $\frac{1}{3}(P + Q + W + x)e$; und das Momment des Gewichts x in der nämlichen Entfernung mit der Kraft ist ax. Folglich $\frac{1}{3}(P + Q + W + x)e = ax$; oder $eP + eQ + eW + ex = 3ax$; oder $eP + eQ + eW$

$= 3ax - ex$; woraus $\frac{e(P+Q+W)}{3a-e} = x$, wie bey dem vorigen Wagebalken.

Beyspiel. $a = 30''$, $d = 6''$, $e = 1''$; $W = 60$ Pf.; $Q = 100$ Pf. So ist $30 : 6 = 100 : P$; folglich $P = 20$ Pf., also $x = \frac{180}{89} = 2\frac{2}{89}$ Pf. Es wird nun nicht allein zwischen 20 und 100 Pf., sondern auch zwischen $22\frac{2}{89}$ Pf. und 100 Pf. ein Gleichgewicht erfolgen, weil die $2\frac{2}{89}$ Pf. von der Friktion verzehrt werden.

145. Wenn man sich statt einer schabenden, einer rollenden Bewegung gebraucht; so vermindert man dadurch das Momment der Friktion.

Weil die Kraft, die sie überwinden soll, in einer größeren Entfernung von dem Umdrehungspunkte ist, als der Ort, wo das Reiben vorkömmt; welches Mittel wider die Reibung das mechanische heißt.

Physikalische Mittel dagegen, welche die Friktion in der That vermindern; sind folgende:

I. Wenn die Hervorragungen der einander berührenden Flächen hinweggenommen werden, welches durch Feilen, Schleifen, Poliren, durch die Bewegung selbst geschieht.

II. Wenn die Vertiefungen mit Oel oder andern Fetten, oder auch mit Wasser ausgefüllt werden.

Aus der Erfahrung weiß man, daß, um die Reibung auf diese zweyte Art zu vermindern, bey Metall Baumöl, oder Ochsenklaufette; bey Metall auf Holz Unschlitt; bey Holz auf Holz Seife; bey Holz auf Stein Wasser die besten Dienste thun.

III.

III. Wenn man nie zwey Körper von einerley Art über einander fortgehen läßt. Denn Kupfer auf Kupfer, Stahl auf Stahl rc. reiben sich überhaupt heftiger, als verschiedene Körper.

Aus dieser Ursache läßt man die eisernen Zapfen auf messingenen; die messingenen aber gemeiniglich auf zinnenen Pfannen laufen, einem Zahnrade aus Messing giebt man ein eisernes Getriebe. Die Triebstöcke macht man aus andern Holze als die Kämme: die eisernen Spitzen an den Spullen einer Seidenmühle laufen auf Glas u. s. w. wie es das Tribometrum Muschenbroekianum erweißt.

146. Die Friktion macht es, daß sich die Räder bey einem Wagen um ihre Axen herumdrehen, wenn der Wagen auf einer Fläche *BD* (Fig. 41.) fortgezogen wird; denn geht die Richtung der Kraft durch die Mitte *A* der Axe des Rades wie immer nach *AP*; so muß sich das ganze Rad *BCA* nach dieser Richtung bewegen, weil der Schwerpunkt desselben in *A* ist, sofern ihm auf der Fläche *BD* keine Hinderniß im Wege steht. Ist aber in *B* eine Hinderniß, nämlich die Rauhigkeit der Fläche *BD*, so wird sich der Punkt *C*, dem nichts im Wege steht, eher als der Punkt *B* bewegen, und dadurch die Herumdrehung des Rades gegen *P* zu entstehen.

Die Friktion des Rades auf dem Boden, über welchen es fortgezogen wird, verursacht eine rollende Bewegung, welche das Fortziehen erleichtert.

Zugleich aber wird durch eine andere Friktion die Bewegung erschwert, welche die Last auf dem Wagen vermittelst der Axen in den Naben der Räder hervorbringt.

Der Ausdruck also, ein Pferd könne z. E. zehn Zentner ziehen, würde sehr unrichtig so verstanden wer-

den,

den, als könne es so viel, etwa vermittelst eines Seiles, das über eine Rolle gienge, erhalten, oder erheben. Nein — — Sondern ein Pferd kann nur die Friktion, die von 10 Zentnern an dem gemeldeten Orte verursacht wird, überwältigen.

Wenn nun ein Pferd vermittelst eines um eine Rolle gewundenen Seils eine Last erhalten soll; so schätzt man es siebenmal stärker als einen Menschen. Die Erfahrung lehrt uns aber, daß ein Mensch, wenn er eine Maschine so bewegt, daß die Schwere seines Körpers nichts dazu beyträgt, seine Nerven drey Stunden nacheinander nicht mehr anstrengen kann, als was ein Gewicht von 25 Pf. ausmacht. So ist dann eines Pferdes Stärke $= 25 \cdot 7 = 175$ Pf.

Wenn Wasser, das an eine Schaufel des unterschlächtigen Rades anstößt, 100 Pf. stark ist, so ist seine Wirkung $= 15$ Pf., wenn schon das Rad in die Bewegung gekommen ist.

Der Raum, den ein Mensch durch die Bewegung seiner Hände oder Füsse zurücklegt, in eine grade Linie gebracht, beträgt in der Zeit von einer Sekunde 3 Fuß, folglich in einer Stunde 10800 Fuß; und dieser in einer Stunde beschriebener Raum verhält sich so wie die Geschwindigkeit eines Menschen, und eines Pferdes.

Man bewies, daß sich bey jeder Maschine, den einzigen Keil ausgenommen, der Raum der Kraft, zum Raume der Last so verhalte, wie die Last zur Kraft; oder $S : s = Q : P$; woraus man $SP = sQ$ hat.

Sind nun drey Dinge dieser Gleichung bekannt, so läßt sich immer das vierte finden. Z. B. die Last $Q = 1000000$ Pf. sollte 100 Fuß hoch gebracht werden; also $s = 100$; es wird aber gefragt, welche

Zeit

Zeit 14 Menschen dazu brauchen werden; also $P =$ 14 = 350 Pf. Folglich $S = \frac{sQ}{P}$ = 285714 Fuß. Es werden aber von der Kraft in einer Stunde 10800 zurückgelegt, folglich 285714 in 26 Stunden und $\frac{4914}{10800}$, und dies ist die gesuchte Zeit.

Sowohl sQ als SP heißt der Effekt der Maschine, wenn sie im Beharrungsstande ist, das ist, wenn sie eine zeitlang ununterbrochen in gleichförmiger Bewegung bleibt.

147. Wenn die Bewegung gehemmet werden soll, ist die Reibung so nützlich, als sie sonst schädlich ist. Sie macht die Bewegung härter, mithin auch langsamer. Aus dieser Ursache pflegt man bey einem schwer beladenen Wagen, wenn er über einen gähen Berg hinabgehen muß, die Räder zu sperren.

Eine grosse Last von einer großen Höhe bequem und leicht herabzulassen, ist die Reibung der Stricke dienlich.

Eben diese Reibung ist Ursache, daß eine Drehspindel, eine elektrische Maschine, eine Schleif- oder Polirmühle durch Saiten oder Riemen kann bewegt werden.

Von der zwoten Aufgabe in der Mechanik.

148. Die zwote Aufgabe in der Mechanik ist: die Verhältniß der Kraft zur Last zu finden, damit eine Maschine den größten Effekt in der gegebenen Zeit leiste, wenn sie sich schon gleichförmig bewegt.

149. Wenn die Kraft nur um etwas weniges größer ist, als sie blos die Last zu erhalten nöthig wäre; so entsteht eine sehr langsame Bewegung. Und obwohl in diesem Falle eine größere Last mit einer geringeren Kraft erhoben wird, so wird doch der Verlust an der Zeit, den man dabey unumgänglich leidet, nicht genugsam dadurch ersetzt.

150. Wenn die Last viel geringer ist als jene, welche mit der Kraft im Gleichgewichte seyn könnte, so wird sie desto geschwinder erhoben. Es kann sich aber ereignen, daß dieser Gewinn an der Zeit, den Verlust an der Kraft nicht allerdings ersetze.

151. Es ist nun zu bestimmen, in welchem Falle das Produkt aus der Last in ihre Geschwindigkeit oder Raum, den sie beschreibt am größten sey: denn dieses Produkt mißt den Effekt der Maschine, und dieser Effekt ist desto größer, je größer die zuerhebende Last und ihre Geschwindigkeit ist.

Folgende Aufgabe wird uns an die Hand geben, wie man sich dabey benehmen soll. Ehe man aber zu ihrer Auflösung schreitet, müssen nachstehende Lehnsätze vorausgeschickt werden.

152. I. **Lehnsatz.** Die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Fläche ist gleichförmig beschleinigt.

Beweis. Ein Körper bewegt sich darauf mit der respektiven Schwere, welche sich in jedem Punkte der schiefen Fläche zur absoluten verhält, wie die Höhe zur Länge dieser Fläche, also ist sie beständig; daher bekömmt der Körper in gleichen Zeittheilchen gleiche Vermehrungen der Geschwindigkeit; folglich bewegt er sich, gleichförmig beschleinigt.

153. II. **Lehnsatz.** Wenn die beschleinigenden Kräfte verschieden sind, so verhalten sich die Räume bey einer gleichförmig beschleinigten Bewegung, wie die Produkte aus den beschleinigenden Kräften in die Quadrate der Zeiten.

Beweis. Die Vermehrungen der Geschwindigkeit, die ein Körper alle Augenblicke bekömmt, folglich auch der von ihm zurückgelegte Raum, hängen von der Stärke der auf ihn wirkenden beschleinigenden Kraft ab. Je stärker oder schwächer sie seyn wird, je größer, oder kleiner werden die Vermehrungen der Geschwindigkeit, und so auch die beschriebenen Räume entstehen. Nun verhalten sich die mit den hervorgebrachten Geschwindigkeiten beschriebenen Räume wie die Quadrate der Zeiten, und die Geschwindigkeiten sind in der einfachen Verhältniße der Zeiten, also verhalten sich die Räume wie die Produkte aus den beschleinigenden Kräften in die Quadrate der Zeiten.

Dies läßt sich überhaupt auf folgende Art darthun. Es seyen zwey Körper A, und B, jener beschreibe den Raum S mit der beschleinigenden Kraft F, in der Z·it T; dieser den Ranm s mit der beschleinigenden Kraft f, in der Zeit t. Es sey ferner ein dritter Körper C, der den Raum σ in der Zeit T mit der Kraft f beschreibe; so wird seyn

$$S : \sigma = F : f. \quad \text{denn}$$
$$\sigma : s = T^2 : t^2. \quad \text{folglich}$$
$$S : s = FT^2 : ft^2.$$

154. W nn sich ein paar Größen von einer Art beständig, wie ein paar Größen von einer andern Art verhalten, so drückt man diese Verhältniß oft so aus, als ob die Größe von einer, der von der andern Art gleich wäre. Weil nun $S : s = T^2 F : t^2 f$, oder

$S : T^2 F = s : t^2 f$ für immer ist. So setzt man $S = T^2 F$; und $s = t^2 f$; woraus $\frac{S}{F} = T^2$, und $\frac{s}{f} = t^2$. Welche Gleichungen nur vorige Proportion bedeuten 2c. Siehe Kästners IV. Theil der mathematischen Anfangsgründe §. 13.

155. III. Lehnsatz. Das Differentiale oder $d\left(\frac{x^2}{px - pc}\right)$ ist $= \frac{px^2 dx - 2pcxdx}{(px - pc)^2}$

Beweis. Es sey $\frac{x^2}{px - pc} = z$; folglich $d\left(\frac{x^2}{px - pc}\right) = dz$, so ist auch durch die Multiplikation $x^2 = pxz - pcz$, beyde Glieder dieser Gleichung weiß man zu differenziren; das Differentiale davon ist $2xdx = pxdz + pzdx - pcdz$; weil p, c beständig sind; um dz auf einer Seite zu bekommen, muß $pzdx$ weggeschafft werden; also $2xdx - pzdx = (px - pc)dz$, woraus wegen $z = \frac{x^2}{px - pc}$ folgende Gleichung entsteht $2xdx - \frac{px^2 dx}{px - pc} = (px - pc)dz$. Wenn man $2xdx$ mit dem daneben stehenden Bruche unter einerley Benennung bringt, so bekömmt man $\frac{2px^2 dx - 2pcxdx - px^2 dx}{px - pc} = (px - pc)dz$, oder $\frac{px^2 dx - 2pcxdx}{px - pc} = (px - pc)$

dz,

dz, woraus durch die Division $\frac{px^2\,dx - 2pcx\,dx}{(px - pc)^2}$ $= dz = d\left(\frac{x^2}{px - pc}\right)$ ist.

156. **Aufgabe.** Das gegebene Gewicht p als eine Kraft angesehen, erhebe vermittelst einer um die Rolle M gelegten Schnur, über der schiefen Fläche BD die Last W; die Höhe der schiefen Fläche $AB = a$ sey bekannt; man will die unbekannte Länge derselben schiefen Fläche BD wissen, auf welcher die Last W am geschwindesten von der Horizontallinie AD an bis B erhoben werden kann. (Fig. 42.)

Auflösung. $BC = c$ sey jene schiefe Fläche, auf welcher p mit W im Gleichgewichte ist; die gesuchte schiefe Fläche BD sey $= x$, die gesuchte Zeit $= t$, die respektive Schwere der Last W auf der gesuchten schiefen Fläche $= v$. Man wird (aus §. 101. ꝛc.) folgende Proportionen haben $p : W = a : c$ und
$v : W = a : x$ also

perturbatim & ex æquo $p : v = x : c$ und
Dividendo $p - v : p = x - c : x$, woraus $p - v$ $= \frac{px - pc}{x}$; es ist aber $p - v$ die beschleinigende Kraft, nämlich der Uiberschuß der gegebenen Kraft über diejenige v, mit welcher die Last auf der gesuchten Fläche zu sinken trachtet, und $t^2 = \frac{s}{f}$ (§. 154.), hier aber $t^2 = \frac{x}{f}$ weil $s = x$ ist, nebstdem $f = p - v$. Also $t^2 = \frac{x^2}{px - pc}$. Soll aber diese Zeit die kürzeste seyn,

so

so muß $d\left(\frac{x^2}{px-pc}\right) = o$ seyn; das ist

$\frac{px^2dx - 2pcxdx}{(px-pc)^2} = o$ (§. 155.). Wenn man beyde Glieder der Gleichung mit $(px-pc)^2$ multiplizieret, so bekömmt man $px^2dx - 2pcxdx = o$, oder $px^2dx = 2pcxdx$; endlich geben beyde Glieder mit $pxdx$ dividirt $x = 2c$.

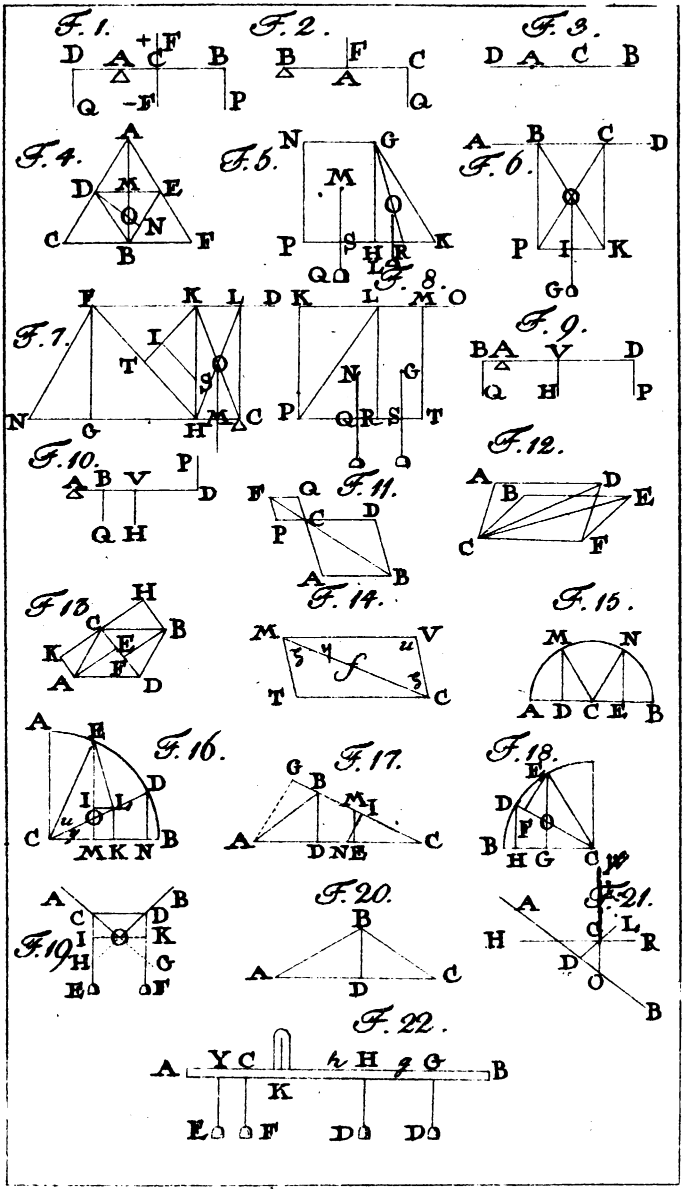
Es ist nun die gesuchte Länge der schiefen Fläche BD doppelt so groß, als jene, auf welcher W von p erhalten wird.

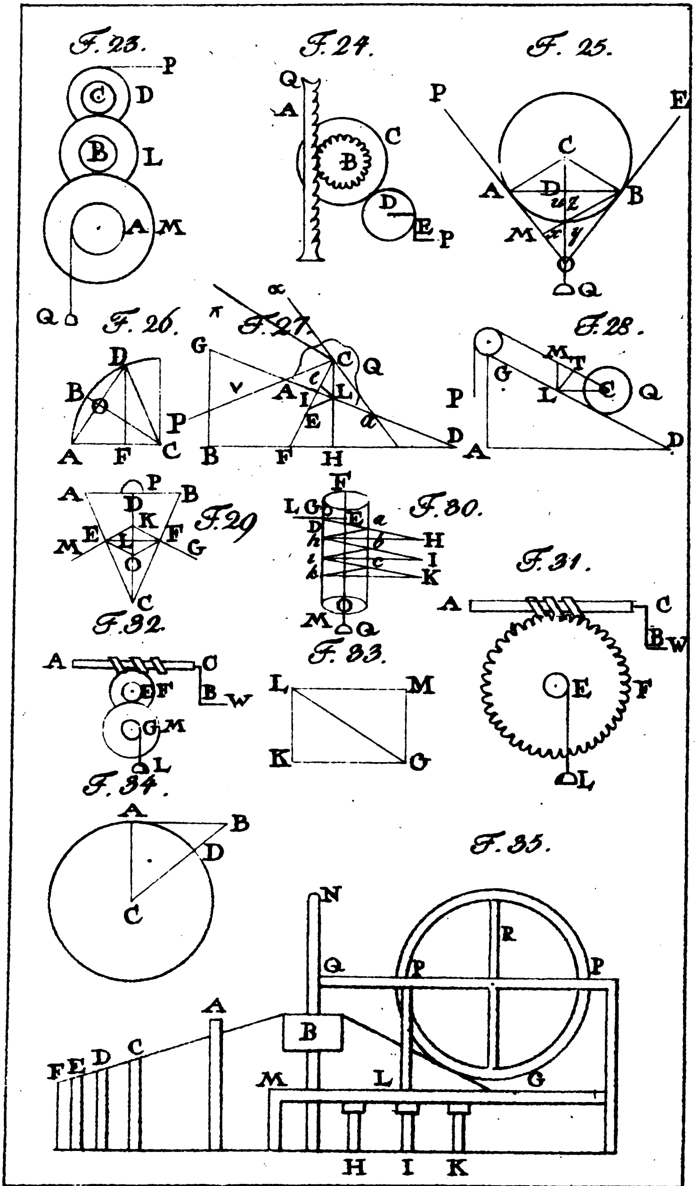
Daß aber auf dieser gefundenen schiefen Fläche die Bewegung in der kürzesten Zeit geschieht, wird so dargethan: Das gefundene ist sicher entweder das Maximum, oder das Minimum. Nun ist eine langsamere Bewegung möglich, als auf der gefundenen Fläche, also ist die gefundene von der kürzesten Dauer.

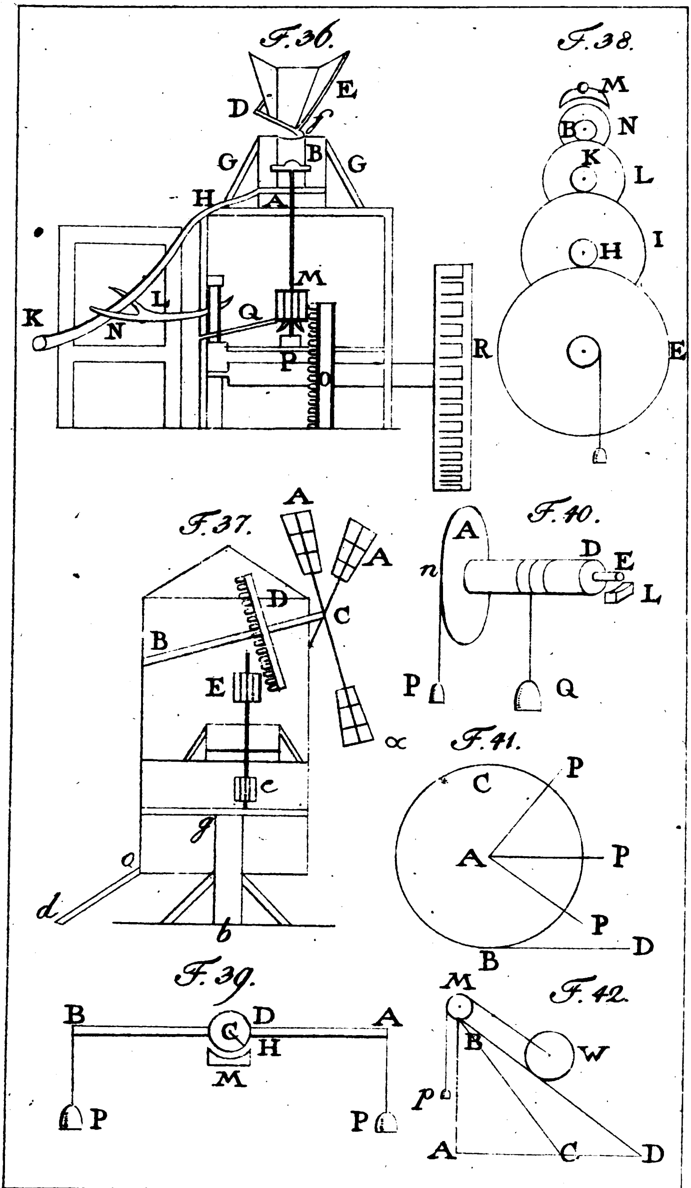
Denn wäre BD kleiner als $2c$, so müßte sich diese kleinere schiefe Fläche der BC mehr nähern, auf welcher W ruhete, und folglich entstünde darauf eine langsamere Bewegung, als auf $BD = 2c$.

157. Ich berührte nur diese erhabene Materie, die ohnehin zu der höhern Mathematik gehört, und aus den Werken, die Kästner §. 151. anführt, gehörig erlernt werden kann.

A. M. D. G.


F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
F. 15.
F. 16.
F. 17.
F. 18.
F. 19.
F. 20.
F. 21.
F. 22.


F. 23.
F. 24.
F. 25.
F. 26.
F. 27.
F. 28.
F. 29
F. 30.
F. 31.
F. 32.
F. 33.
F. 34.
F. 35.


F. 36.
D
E
f
B
G
G
H
A
M
K
L
N
Q
P
O
R
F. 38.
M
B
N
K
L
I
H
E
F. 37.
A
A
D
C
B
E
α
e
g
a
d
b
F. 40.
A
n
D
E
L
P
Q
F. 41.
C
P
A
P
P
B
D
F. 39.
B
C
D
A
H
M
P
P
M
F. 42.
B
W
p
A
C
D

Io. Borka sc.