ZDVOJENÍ KOULE – PARADOX BANACHA A TARSKÉHO

1. Úvod

Věta Banacha a Tarského říká, že je možné rozdělit jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ na konečný počet (ve skutečnosti je nejmenší možný počet pět) disjunktních podmonožin a každou otočit a posunout tak, že poté vzniknou přesně dvě jednotkové koule. Tato věta způsobila ve své době (publikována byla v roce 1924) velký rozruch.

Matematicky tato věta znamená, že není možné (netriviálně) přiřadit všem podmnožinám $\mathbb{R}^3$ číslo – jejich objem – tak, aby toto přiřazení bylo konečně aditivní a invariantní vzhledem k Eukleidovským transformacím. Potom by se totiž objem jednotkové koule musel rovnat součtu objemů jednotlivých podmnožin rozkladu a tento součet zároveň dvojnásobku objemu koule, ve výsledku by tedy muselo platit $V(B^3) = 2 \cdot V(B^3)$. Z tohoto jednoduše plyne, že objem každé podmnožiny musí být nulový. Přitom tyto požadavky na objem jsou naprosto přirozené a přesně ty se od abstraktní "míry" požadují (ve skutečnosti ještě víc). Problémem této dedukce je, že jednotlivé podmnožiny, na které je koule rozdělena jsou příliš divoké a ve skutečnosti žádný objem přiřazeny mít nemohou. Takové podmnožiny se prostě v přírodě nevyskytují a doufat tedy, že se pomocí této věty podaří zdvojnásobit objem, je dosti naivní. Formálně tedy tato věta říká, že existují tzv. "neměřitelné" množiny.

2. Paradoxy v rovině

Nazvěme dvě podmnožiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ *kongruentní*, značíme $A \sim B$, jestliže lze rozložit obě dvě tyto podmnožiny na konečné disjunktní sjednocení

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i, \qquad B = \bigsqcup_{i=1}^{k} B_i$$

svých podmnožin takovým způsobem, že existují Eukleidovské transformace[1] $\rho_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ převádějící A_i na B_i, tj. platí pro ně $\rho_i(A_i) = B_i$. Výhodným způsobem, kterým budeme tuto skutečnost zapisovat je

$$\rho_1(A_1) \sqcup \cdots \sqcup \rho_k(A_k) = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_k.$$

Zároveň tuto kongruenci můžeme také popsat jako bijekci $f : A \to B$, která je "po částech" Eukleidovská transformace, tj. existuje konečný rozklad $A = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i$ takový, že $f|_{A_i}$ je Eukleidovská transformace. Říkejme takové bijekci kongruence. Dokažme pomocí tohoto popisu, že relace "být kongruentní" je ekvivalence na množině všech podmnožin $\mathbb{R}^d$. Nechť $A \sim B$ a $B \sim C$. Potom existují kongruence $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Přitom máme rozklady $A = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i$ a $B = \bigsqcup_{j=1}^{l} B_j$ na nichž jsou f a g Eukleidovské transformace.

[1]Jedná se o zobrazení zachovávající vzdálenosti. Pro $d = 2, 3$ je takové zobrazení vždy složením rotace a posunutí, obecně pak lze rotovat v různých rovinách nezávisle.

Zřejmě potom je složení $g \circ f$ Eukleidovská tranformace na každém $A_i \cap g^{-1}(B_j)$. Ke kongruenci $A \sim C$ jsme tedy potřebovali rozdělit A na $k \cdot l$ podmnožin; obecně toto číslo nelze zlepšit.

Uveďme nyní nějaké zajímavé a přitom poměrně jednoduché příklady pro $d = 2$. Nechť $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ značí jednotkovou kružnici se středem v počátku a $x \in S^1$ je libovolný její bod. Potom platí $S^1 \sim S^1 \smallsetminus \{x\}$. Nechť ρ je libovolná rotace okolo počátku o úhel, který není racionálním násobkem π. Potom každá iterace $\rho^n = \underbrace{\rho \circ \cdots \circ \rho}_{n\times}$ je rotace o nenulový úhel (samozřejmě s vyjímkou $n = 0$) a zejména $\rho(x) \neq x$ pro $n \neq 0$. Rozdělme S^1 na disjunktní sjednocení dvou podmnožin

$$A = \{\rho^n(x) \mid n \geq 0\}, \qquad B = S^1 \smallsetminus A.$$

Pokud ponecháme B na místě (tj. příslušná Eukleidovská transformace je id), zatímco A otočíme pomocí zobrazení ρ, dostáváme

$$\rho(A) \sqcup B = (A \smallsetminus \{x\}) \sqcup B = S^1 \smallsetminus \{x\}.$$

Stejným způsobem lze samozřejmě z S^1 "odstranit" konečný počet bodů.

Ve skutečnosti ale platí $S^1 \sim S^1 \smallsetminus X$ i pro libovolnou spočetnou podmnožinu X. Důkaz je podobný, jen je potřeba uvážit všechny body množiny X zároveň a zvolit vhodný úhel rotace. Budeme chtít opět položit

$$A = \{\rho^n(x) \mid x \in X \ \& \ n \in \mathbb{N}_0\} \qquad B = S^1 \smallsetminus A$$

(tj. A dostaneme z X tak, že k této množině opakovaně přidáváme její obraz při rotaci ρ). Podmínku na úhel rotace dostaneme z toho, aby platilo $\rho(A) \sqcup B = S^1 \smallsetminus X$, protože tento rozklad bude vždy disjunktní (neboť $\rho(A) \subseteq A$). Nesmí tedy platit $x = \rho^n(y)$ pro žádné $n > 0$. Přitom $\rho^n(y)$ vznikne z y otočením o úhel $n\alpha$, kde α je úhel rotace ρ. Naše podmínka na úhel α se dá jednoduše zapsat s pomocí komplexních čísel. Uvažme množinu $\mathcal{A}$ argumentů všech podílů x/y, kde $x, y \in X$, přičemž se dohodněme, že do této množiny dáme s každým úhlem také všechny úhly, které se od něj liší o celočíselný násobek úhlu 2π. Nyní k $\mathcal{A}$ přidejme též všechny zlomky těchto úhlů,

$$\mathcal{B} = \{\tfrac{\alpha}{n} \mid \alpha \in \mathcal{A} \ \& \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Zřejmě se jedná o spočetnou množinu a stačí zvolit úhel rotace libovolně tak, aby nebyl prvkem $\mathcal{B}$, neboť podmínka $x = \rho^n(y)$ znamená $\arg(x) = \arg(y) + n\alpha$, tedy

$$\alpha = \tfrac{1}{n}(\arg(x) - \arg(y)) = \tfrac{1}{n}\arg(x/y) \in \mathcal{B}.$$

Ze spočetnosti $\mathcal{B}$ takový úhel zvolit lze.

Ačkoliv je důkaz poměrně jednoduchý, pro další bude velmi užitečné jej vyložit jinak – pomocí akcí grup. Množina $G = \{\rho^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ tvoří grupu vzhledem ke skládání (podgrupu $\mathrm{GL}(2)$ izomorfní $\mathbb{Z}$). Pro každý bod $z \in S^1$ označme Gz množinu

$$Gz = \{gz \mid g \in G, \text{ tj. } g = \rho^n\},$$

kterou nazýváme *orbitou* bodu z (vzhledem k akci grupy G na S^1). Orbity tvoří rozklad S^1 a pro naši volbu rotace platí, že každá třída tohoto rozkladu, tj. každá orbita, obsahuje nejvýše jeden prvek podmnožiny X. Pokud je tomu tak, řekněme pro Gx, kde $x \in X$, můžeme tuto orbitu ztotožnit se $\mathbb{Z}$ následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\cong} Gx \\ n &\longmapsto \rho^n x. \end{aligned}$$

Při této identifikaci odpovídá bod $x \in X$ číslu $0 \in \mathbb{Z}$. Přitom můžeme rozdělit $\mathbb{Z}$ na dvě disjunktní podmnožiny $\mathbb{Z}_-$ a $\mathbb{N}_0$ a platí, že přičtením čísla 1 ke všem prvkům $\mathbb{N}_0$ dostaneme právě všechna kladná celá čísla,

$$\mathbb{Z}_+ = \{n + 1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Stejná formulka samozřejmě zadává identifikaci orbity se $\mathbb{Z}$ nezávisle na tom, jestli tato obsahuje bod z X či nikoliv. Představujeme-li si tedy každou orbitu jako "kopii" $\mathbb{Z}$, některé kopie obsahují (jediný) prvek X a ten v této kopii nulou. Naše Eukleidovská transformace potom "přičte jedničku" ke všem "nezáporným číslům" v orbitách obsahujících bod z X (což ve skutečnosti znamená, že příslušné body se otočí pomocí rotace ρ), čímž z těchto kopií odstraníme nulu, tj. právě prvky množiny X.

3. Paradoxy v prostoru

Naším prvním a hlavním cílem bude jednotkovou sféru $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ rozdělit na konečný počet podmnožin, každou pootočit a získat dvě sféry; o kouli se budeme bavit později.

V rovině bylo důležité zvolit pro rotaci ρ úhel, který byl iracionálním násobkem π. Důvodem bylo, aby žádná jeho mocnina ρ^n s vyjímkou ρ^0 nebyla rovna identitě. V prostoru toto bude o něco složitější, budeme potřebovat 2 rotace, které "nesplňují žádnou relaci" (což je analogie $\rho^n \neq \mathrm{id}$). Grupa jimi generovaná se pak nazývá "volná grupa řádu 2" a značí se F_2. Popišme její kostrukci tak, jak se nám bude pro pozdější výklad hodit.

Definujme prvně rekurzivně nekonečný orientovaný (a obarvený) strom T takto. Nechť T_0 má jediný vrchol e a žádnou hranu, strom T_1 vyrobíme z T_0 přídáním dvou hran vycházejících z e, které označíme a a b, a dvou do něj vcházejících; opět je označme a a b. Tím zároveň přidáme k T_0 čtyři nové vrcholy (s každou novou hranou přidáváme i *nový* koncový vrchol). V každém dalším kroku vyrobíme T_k z T_{k-1} tak, že doplníme ke každému vrcholu T_{k-1} hrany tak, aby z něj vycházely právě dvě, jedna označená a a druhá b, a právě dvě do něj vcházely, opět označené jedna a a druhá b a opět s každou přidávanou hranou přidáme i *nový* vrchol. Definujme T jako sjednocení grafů T_k pro $k = 0, 1, \ldots$. Mělo by být jasné, že se jedná o souvislý graf (každé dva body lze spojit *neorientovanou* cestou).

Dokažme nyní, že se opravdu jedná o strom. Nechť v T existuje nějaký cyklus. Potom tento cyklus je ve skutečnosti obsažený v nějakém T_k, neboť se skládá z konečného počtu hran a každá se vyskytuje v nějakém konečném stupni naší konstrukce (stačí pak vzít maximum z vyskytujících se stupňů). Nechť v je vrchol, který se vyskytuje v $T_k \smallsetminus T_{k-1}$. Jelikož všechny vrcholy nově přidané k T_k jsou spojeny hranou vedoucí v T_k s jediným dalším vrcholem, musí hrana vyskytující se v našem cyklu před a po vrcholu v být stejná. To je spor s definicí cyklu.

Jelikož je T strom, existuje pro každý vrchol v jediná cesta z počátečního vrcholu $e \in T_0$ do v, nechť se tato skládá z hran označených $\ell_1, \dots, \ell_k$, kde ℓ_i je buď a nebo b. Definujme $\varepsilon_i = \pm 1$ tak, že hodnota $+1$ značí, že jsme hranu prošli po směru, a hodnota -1, že jsme ji prošli proti směru. Můžeme nyní reprezentovat vrchol v posloupností $\ell_1^{\varepsilon_1} \cdots \ell_k^{\varepsilon_k}$, které budeme říkat slovo (přesněji tedy slovo je pro nás konečná posloupnost písmen z množiny a, b, a^{-1}, b^{-1}). Podle definice cesty se nemohou vedle sebe vyskytovat a, a^{-1} ani b, b^{-1}. Říkáme, že takové slovo je *redukované*. Je-li však $\ell_1^{\varepsilon_1} \cdots \ell_k^{\varepsilon_k}$ libovolné (ne nutně redukované) slovo, umíme pro každý vrchol u nalézt jediný sled, který začíná v u, a ve kterém jsou hrany označeny písmeny ze zadaného slova.

Zároveň je dobré si uvědomit, že z každého sledu lze cestu vyrobit tak, že opakovaně vynecháme dvojici hran sestávající z hrany a po ní bezprostředně následující totožné hrany projíté v opačném směru. Z každého slova tedy získáme redukované opakovaným vynecháváním podslov tvaru $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ a tyto operace nemají vliv na to, kam se z vrcholu u procházením slova dostaneme. Ve výsledku dostáváme bijekci mezi vrcholy stromu T a redukovanými slovy. Množinu vrcholů budeme značit F_2, podle předchozího však budeme často identifikovat vrchol s příslušným redukovaným slovem.

$$\begin{tikzcd}
\{\text{slova}\} \arrow[rr, shift right, "\text{projítí slova}"'] & & \{\text{vrcholy}\} \arrow[ll, shift right, "\text{zápis cesty z } e"'] \arrow[dl, shift left] \\
& \{\text{redukovaná slova}\} \arrow[ul, hook] \arrow[ur, shift left, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Nyní můžeme definovat strukturu grupy na množině F_2 vrcholů stromu T. Nechť dvěma vrcholům v_1, v_2 odpovídají redukovaná slova w_1, w_2. Jejich navázání $w_1 w_2$ (což je slovo vzniklé prostým zapsáním w_1 před w_2) vznikne slovo, které není nutně redukované, nicméně umíme podle tohoto slova projít stromem od e k jedinému vrcholu u. Položme $w_1 w_2 := u$. Protože vrcholu e odpovídá "prázdné slovo" (jediné slovo délky 0), je vrchol e zřejmě jednotkou pro násobení. Asociativita pak plyne z asociativity navazování slov (a toho, že jsme ve skutečnosti nemuseli začínat s w_1, w_2 redukovanými). Inverze se také jednoduše zkonstruuje, například tak, že každý vrchol je iterovaným součinem prvků a, b, a^{-1}, b^{-1}, které mají zřejmou inverzi.

Označme $S(a^{-1}) \subseteq F_2$ množinu redukovaných slov začínajících písmenem a^{-1} a uvažme

$$aS(a^{-1}) = \{av \mid v \in S(a^{-1})\}.$$

Zřejmě takto dostaneme

$$aS(a^{-1}) = S(a^{-1}) \cup S(b) \cup S(b^{-1}) \cup \{e\}$$

(za úvodním a^{-1} může být jakékoliv písmeno s vyjímkou a). V analogii s reinterpretací případu kružnice bude výsledek Banacha a Tarského odvozen z rozkladu

$$F_2 = S(a^{-1}) \cup S(a) \cup S(b^{-1}) \cup S(b) \cup \{e\}$$

a podobných rozkladů

$$F_2 = aS(a^{-1}) \cup S(a), \qquad F_2 = bS(b^{-1}) \cup S(b).$$

Pokud tedy zvládneme rozdělit S^2 na podmnožiny, z nichž každá bude vypadat jako F_2, a to tak, že násobení prvky a a b bude odpovídat rotacím sféry, tak stačí každou takovou podmnožinu rozložit podle návodu nahoře a zdvojení sféry je na světě.

Prvně potřebujeme najít podgrupu $G \subseteq \mathrm{SO}(3)$, která je izomorfní F_2. K tomu popíšeme, jak lze obecně konstruovat homomorfismy $\varphi : F_2 \to \mathrm{SO}(3)$ (ve skutečnosti do *libovolné* grupy). Jelikož je každý prvek F_2 součinem prvků a, b, a^{-1}, b^{-1} je takovýto homomorfismus jednoznačně určen svými hodnotami $\varphi(a), \varphi(b)$. Ukážeme nyní, že tyto můžou být libovolné a tedy zadat φ je totéž, co zadat dva prvky SO(3), tedy dvě rotace[2]. Nechť tedy jsou dány libovolné dva prvky $\varphi(a), \varphi(b) \in \mathrm{SO}(3)$. Definujme pak pro prvek w jeho obraz $\varphi(w)$ jako součin obrazů jednotlivých písmen ve slově w. Stejného výsledku bychom dosáhli použitím neredukovaného slova zadávající týž vrchol (ukázali jsme totiž, že se liší pouze tím, že se v něm vyskytují navíc dvojice $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$). Jelikož na neredukovaných slovech je násobení dáno navazováním, jedná se opravdu o homomorfismus grup.

Tu nejtechničtější část vynecháme. Nechť σ značí rotaci okolo osy x o úhel $\arccos(1/3)$ a τ rotaci okolo osy y o stejný úhel $\arccos(1/3)$. Potom platí, že příslušný homomorfisms $\varphi : F_2 \to \mathrm{SO}(3)$ posílající $a \mapsto \sigma$ a $b \mapsto \tau$ je injektivní, tj. podgrupa G generovaná σ a τ (tedy obraz φ) je právě F_2. Injektivita konkrétně znamená, že tyto dvě rotace nesplňují žádnou relaci, tedy, že po dosazení rotací σ a τ za a a b do kteréhokoliv neprázdného redukovaného slova nelze dostat identické zobrazení. Zcela elementární a poměrně nenáročný důkaz lze najít třeba v knize "The Banach-Tarski Paradox", jejímž autorem je Stan Wagon.

Podgrupa $G \subseteq \mathrm{SO}(3)$ je spočetná (zřejmě F_2 je spočetná a $F_2 \cong G$) a každý její netriviální prvek ρ má právě dva "pevné body" na S^2, tj. body x, pro něž $\rho(x) = x$; jsou to právě průsečíky osy rotace ρ se sférou. Takto dostáváme spočetnou podmnožinu $D \subseteq S^2$, kterou v první fázi vynecháme. Ukážeme, že

$$(S^2 \smallsetminus D) \sim (S^2 \smallsetminus D) \sqcup \mathrm{tr}(S^2 \smallsetminus D),$$

kde tr značí nějaké posunutí – libovolné takové, aby byl obraz S^2 s původní S^2 disjunktní. Toto tvrzení se nazývá Hausdorffova věta.

Pro každý bod $x \in S^2 \smallsetminus D$ opět uvážíme orbitu

$$Gx = \{\rho(x) \mid \rho \in G\}$$

(jedná se o množinu, kterou dostaneme z bodu x tak, že jej budeme postupně otáčet rotacemi $\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}$, na nově vzniklé body opět aplikujeme tyto čtyři rotace, atd.). Protože $x \notin D$, bude zobrazení

$$\begin{aligned} F_2 \cong G &\longrightarrow S^2 \\ \rho &\longmapsto \rho(x) \end{aligned}$$

injektivní: pokud by platilo $\rho_1(x) = \rho_2(x)$, potom $x = \rho_1^{-1}\rho_2(x)$ a z definice D plyne $\rho_1^{-1}\rho_2 = \mathrm{id}$, tedy $\rho_1 = \rho_2$. Opět tedy dostáváme rozklad $S^2 \smallsetminus D$ na disjunktní sjednocení

[2] Toto by mělo čtenáři připomínat podobnou vlastnost bází vektorového prostoru: lineární zobrazení je jednoznačně zadáno svými hodnotami na vektorech báze a tyto mohou být libovolné. Prvky a, b tedy tvoří jakousi "bázi" grupy F_2; přesněji se říká, že F_2 je *volná grupa na dvou generátorech* a, b. Na rozdíl od vektorových prostorů není každá grupa volná, například jediná konečná volná grupa je ta triviální $\{e\}$.

orbit, kde každá je v bijekci s $\varphi : F_2 \xrightarrow{\cong} G$. Při výše uvedené identifikaci odpovídá bod x identitě a ta při zobrazení φ^{-1} zase neutrálnímu prvku e. Vyberme z každé orbity jeden bod a množinu takto vybraných bodů označme X. Zde se poměrně zásadním způsobem využívá axiomu výběru (ve skutečnosti k důkazu stačí jeho slabší varianta – tzv. ultrafilter lemma).

Rozložme nyní každou orbitu na čtyři podmnožiny (toto je verze, která se chová lépe k neutrálnímu prvku, v předchozím nám zbyl jednou navíc) a uvažme jejich sjednocení

$$S(a^{-1})X, \qquad S(a)X, \qquad S(b^{-1})X \cup \{b^n X \mid n \geq 0\}, \qquad S(b)X \smallsetminus \{b^n X \mid n \geq 0\}.$$

Jak jsme již zmínili předtím, platí

$$aS(a^{-1})X \sqcup S(a)X = F_2 X = S^2 \smallsetminus D.$$

Podobně lze ověřit, že aplikací b na třetí množinu v rozkladu získáme přesně doplněk čtvrté a složením s translací tak dostaneme druhou, posunutou sféru.

Popíšeme nyní, jak do hry vložit (spočetnou!) podmnožinu D. Zvolme osu rotace, která neprochází žádným bodem množiny D. Stejným postupem jako v rovině můžeme dokázat (s použitím rotace okolo této osy o vhodný úhel), že $S^2 \sim (S^2 \smallsetminus D)$. Dohromady tak

$$S^2 \sim (S^2 \smallsetminus D) \sim (S^2 \smallsetminus D) \sqcup \mathrm{tr}(S^2 \smallsetminus D) \sim S^2 \sqcup \mathrm{tr} S^2.$$

S použitím týchž rozkladů a rotací lze tuto kongruenci jednoduše rozšířit na

$$(B^3 \smallsetminus \{0\}) \sim (B^3 \smallsetminus \{0\}) \sqcup \mathrm{tr}(B^3 \smallsetminus \{0\})$$

(rotace, které jsme využívali, měly osy procházející počátkem, chápeme-li tedy $B^3 \smallsetminus \{0\}$ jako sjednocení sfér o poloměrech z množiny $(0, 1]$, můžeme rozklady a rotace použít na každou tuto slupku zvlášť, obdržet tak z každé dvě identické a jednu posunout pomocí zafixované translace tr).

Přidání středu se vyřeší uvážením kružnice uvnitř B^3 a opět použitím rovinného případu, který dává $B^3 \sim (B^3 \smallsetminus \{0\})$.

Poznámka. Silná verze Banachovy-Tarského věty říká, že libovolné dvě omezené podmnožiny $\mathbb{R}^d$ s neprázdným vnitřkem jsou kongruentní pro $d \geq 3$. To plyne z předchozího a následující varianty známé věty (Schröder-Bernstein): jsou-li A a B dvě podmnožiny $\mathbb{R}^d$ takové, že A je kongruentní s podmnožinou $B' \subseteq B$, a B je kongruentní s podmnožinou $A' \subseteq A$, potom ve skutečnosti A je kongruentní s B, tedy $A \sim B$. Důkaz je totožný s klasickým důkazem z teorie množin, označíme-li kongruence $f : A \xrightarrow{\sim} B'$ a $g : B \xrightarrow{\sim} A'$, můžeme psát

$$A = \Big((A \smallsetminus B') \sqcup gf(A \smallsetminus B') \sqcup \cdots\Big) \sqcup \Big(g(B \smallsetminus A') \sqcup gfg(B \smallsetminus A') \sqcup \cdots\Big).$$

Aplikací f na první závorku a g^{-1} na druhou závorku dostáváme bijekci mezi A a B. Podle definice kongruence lze první závorku rozložit na disjunktní sjednocení konečného počtu podmnožin (jsou to průniky rozkladu A s touto závorkou), na nichž je f Eukleidovská transformace a to samé platí pro druhou závorku.

Nechť tedy například A je koule o poloměru 1 a B koule o poloměru 2. Kongruencí $A \to B'$ je například vložení. Zkonstruování kongruence $B \to A'$ nám poskytuje předchozí slabá verze Banachovy-Tarského věty. Rozdělme B na konečný počet částí tak, aby měla každá poloměr maximálně 1. Při vhodných translacích je pak B kongruentní podmnožině disjunktního sjednocení konečného počtu koulí o poloměru 1. Přitom je ale toto konečné disjunktní sjednocení kongruentní A a tedy B je kongruentní podmnožině $A' \subseteq A$.