1. cvičení

(1) Nechť A je komutativní grupa. Dokažte, že $\mathrm{End}(A)$ společně s operacemi sčítání a skládání zobrazení je okruh.
(2) Dokažte přímo z definice, že na každé komutativní grupě existuje právě jedna struktura $\mathbb{Z}$-modulu.
(3) Dokažte, že zadat strukturu levého R-modulu na komutativní grupě M je to samé, co zadat homomorfismus okruhů $R \to \mathrm{End}(M)$. Podobným způsobem popište pravé R-moduly.
(4) Pomocí předchozího tvrzení znovu popište $\mathbb{Z}$-moduly.
(5) Popište $\mathbb{Z}[t]$-moduly, $\mathbb{k}[t]$-moduly, $\mathbb{Z}/n$-moduly.

2. cvičení

(1) Popište konkrétně, co znamená rozšířit strukturu $\mathbb{R}$-modulu (vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$) na strukturu $\mathbb{C}$-modulu (vektorového prostoru nad $\mathbb{C}$).
(2) Popište, jakým způsobem lze R-modul R^n rozšířit na $\mathrm{Mat}_n(R)$-modul.
(3) Obraz konečně generovaného modulu je konečně generovaný.
(4) Modul M je konečně generovaný, právě když existuje surjektivní homomorfismů $R^n \to M$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.
(5) $\mathbb{Q}$-modul $\mathbb{R}$ není konečně generovaný (dokonce ani spočetně).
(6) $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ není konečně generovaný.
(7) V okruhu $\mathbb{Z}[x_n|n \in \mathbb{N}]$ polynomů ve spočetně mnoha proměnných $\{x_n|n \in \mathbb{N}\}$ ideál generovaný všemi proměnnými není konečně generovaný.

3. cvičení

(1) Dokažte, že biprodukt je součin (a tím pádem i součet). Splňují-li homomorfismy

$$A \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} M \underset{q}{\overset{j}{\leftrightarrows}} B$$

vztahy $pi = \mathrm{id}_A$, $qj = \mathrm{id}_B$, $pj = 0$, $qi = 0$, $ip+jp = \mathrm{id}_M$, potom kanonické zobrazení $M \xrightarrow{(p,q)} A \times B$ je izomorfismus stejně jako $A \oplus B \xrightarrow{i+j} M$.
(2) V $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}$ najděte lineárně nezávislou podmnožinu, kterou nelze doplnit do báze a také generující podmnožinu, z níž nelze vybrat bázi.
(3) Nechť R je obor integrity a M je R-modul. Definujme torzní podmodul

$$TM = \{x \in M \mid \exists r \neq 0 : rx = 0\}$$

(množina všech torzních prvků). Dokažte, že se jedná o podmodul, a že kvocient M/TM je již bez torze (jeho torzní podmodul je nulový). Dále ukažte, že předpoklad oboru integrity je podstatný, nad $\mathbb{Z}/6$ tvrzení neplatí pro $M = \mathbb{Z}/6$.

4. cvičení

(1) Každý projektivní modul je bez torze. Tedy platí: volný $\Rightarrow$ projektivní $\Rightarrow$ bez torze.
(2) Modul bez torze, který není projektivní: $\mathbb{Q}$ nad $\mathbb{Z}$.
(3) Projektivní modul, který není volný: $\mathbb{Z}/2$ nad $\mathbb{Z}/6$ a $\Bbbk^n$ nad $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.
(4) Popište vztah mezi projektivními R-moduly s jedním generátorem a idempotenty v okruhu R. V případě komutativního okruhu R ukažte, že se jedná o bijekci. O jaký idempotent se jedná v předchozím příkladě? Popište projektivní $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$-moduly s jedním generátorem (ve skutečnosti je každý $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$-modul projektivní).

5. cvičení

(1) Spočtěte tenzorové součiny následujících $\mathbb{Z}$-modulů: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n$, $\mathbb{Z}[1/p]$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (Spočítali jsme $\mathbb{Z}/n \otimes \mathbb{Z}/m$, $\mathbb{Z}/n \otimes \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.)

6. cvičení

(1) Platí $(R/I) \otimes_R M \cong M/IM$.
(2) Platí $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J)$.
(3) Nechť $\varphi : R \to S$ je homomorfismus okruhů a $M \in R\text{-}\mathsf{mod}$. Popište na $S \otimes_R M$ strukturu S-modulu a dokažte pro každý S-modul N isomorfismus

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, N)$$

Jako speciální případ komplexifikace vektorového prostoru V je $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$, dalším příkladem pak je $R/I \otimes_R M$.

7. cvičení

(1) Ukažte, že každý modul je usměrněnou kolimitou svých konečně generovaných podmodulů.
(2) Vyjádřete $\mathbb{Z}[1/p]$, $\mathbb{Z}_{(p)}$ a $\mathbb{Q}$ jako usměrněné kolimity podmodulů izomorfních $\mathbb{Z}$.

8. cvičení

(1) Dokažte, že komutativní grupa A je p-torzní, právě když platí $\mathbb{Z}[1/p] \otimes A = 0$.
(2) Dokažte, že pokud komutativní grupa A je p'-torzní, pak $\mathbb{Z}[1/p] \otimes A \cong A$.
(3) Vyvoďte, že pro torzní komutativní grupu A platí $\mathbb{Z}[1/p] \otimes A \cong T_{p'}A$.
(4) Spočtěte (s použitím analogických tvrzení pro $\mathbb{Z}_{(p)}$, viz příklady, na které nezbyl čas) $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^\infty = \mathrm{colim}_n\, \mathbb{Z}/p^n$.
(5) Spočtěte $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathbb{Z}[1/p] \cong \mathbb{Q}$.

9. cvičení

(1) Spočtěte konečnou usměrněnou kolimitu.
(2) Dokažte, že $\mathbb{Z}$-modul je injektivní, právě když je divizibilní.
(3) Dokažte, že $\mathbb{Z}$-modul je plochý, právě když je bez torze (s použitím "Baerova kritéria" pro ploché moduly).
(4) Ploché injektivní $\mathbb{Z}$-moduly jsou právě vektorové prostory nad $\mathbb{Q}$.
(5) Dokažte, že nad oborem integrity R je každý plochý R-modul bez torze.

10. cvičení

(1) Rozšíření skalárů $S \otimes_R -$ zachovává (volné, projektivní a) ploché moduly.
(2) Modul bez torze, který není plochý: $(x, y) \subseteq \Bbbk[x, y]$ nad $\Bbbk[x, y]$.
(3) Je-li M plochý S-modul a N je injektivní $\mathbb{Z}$-modul, pak $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ je injektivní S-modul. Obecněji, je-li R-S-bimodul M plochý jako S-modul a N je injektivní R-modul, pak $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ je injektivní S-modul.
(4) Modul charakterů $R^\sharp = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ je injektivní R-modul.

11. cvičení

(1) Ukažte, že každý R-modul lze vložit do součinu systému modulů $R^\sharp$ – takové součiny nazýváme kovolné moduly.
(2) Spočtěte injektivní obaly $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^k$.

12. cvičení

(1) Nechť R je komutativní a RX značí volný R-modul na množině X, tj. $RX = \bigoplus_X R$. Dokažte

$$R(X \sqcup Y) \cong RX \oplus RY \qquad R(X \times Y) \cong RX \otimes RY.$$

Důsledek: je-li M monoid, pak RM je okruh, navíc R-modul, a to takovým způsobem, že jediný homomorfismus R-modulů $R \to RM$ posílající 1 na 1 je zároveň homomorfismus okruhů. Říkáme, že RM je R-algebra (viz grupová algebra RG). Speciálně $R\mathbb{N} = R[x]$, $R\mathbb{Z} = R[x, x^{-1}]$ a $\Bbbk G$ je grupová algebra.

13. cvičení

(1) Ukažte, že $\Bbbk(G) \cong \Bbbk(G)^* \cong \Bbbk(G)^{\mathrm{op}}$ jako $\Bbbk(G)$-moduly. Zejména je $\Bbbk(G)$ injektivní.
(2) Ukažte: je-li každý ideál $I \subseteq R$ konečně generovaný (okruh R je Noetherovský), pak součty (a usměrněné kolimity) injektivních modulů jsou injektivní.
(3) Ukažte, že každý projektivní $\Bbbk(G)$-modul je injektivní. Naopak ukažte, že každý injektivní $\Bbbk(G)$-modul je projektivní.

14. cvičení

(1) Dokažte: je-li M konečně prezentovatelný a N plochý, pak $M^* \otimes_R N \to \mathrm{Hom}_R(M, N)$ je izomorfismus. Jako důsledek, každý homomorfismus $M \to N$ se faktorizuje skrz R^k. Zejména pro $M = N$ konečně prezetovatelný plochý lze vzít za $f = \mathrm{id}$ a dostáváme, že M je retraktem R^k a je tedy projektivní.

lehčí příklady, na které nezbyl čas

(1) Součet je generovaný sjednocením (součin nikoliv).
(2) Dokažte, že sjednocení řetězce podmodulů je podmodul.
(3) Je-li $N \subseteq M$ konečně generovaný podmodul modulu M takový, že kvocient M/N je také konečně generovaný, pak je konečně generovaný i M.
(4) Dokažte, že pro nekonečné množiny $\bigoplus_{i\in I} R \cong \bigoplus_{j\in J} R$, právě když $|I| = |J|$.
(5) Pro ideály $I, J \subseteq R$ platí $R/I \cong R/J$ jako R-moduly, právě když $I = J$.
(6) Definujte p-torzní podgrupu T_pA a ukažte, že kvocient A/T_pA je bez p-torze. Dokažte, že každá torzní komutativní grupa se rozkládá na přímý součet p-torzních podgrup, $A \cong \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} T_pA$. Jako aplikaci rozložte $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p^\infty$.
(7) Nechť R je okruh a $I \subseteq R$ jeho ideál. Ověřte, že strukturu R-modulu lze rozšířit[1] podél projekce $R \to R/I$ na strukturu R/I-modulu nejvýše jedním způsobem. Popište, kdy tato situace nastává. Dále ukažte, že homomorfismus $f : M \to N$ z R-modulu M do R/I-modulu se jednoznačně faktorizuje přes R/I-modul M/IM jako $f : M \to M/IM \to N$.
(8) Homomorfismy $f : M \to N$ se faktorizují skrz M/TM pokud je N bez torze a skrz TN pokud je M torzní. Dále popište homomorfismy z torzního modulu do modulu bez torze.
(9) Nechť R je komutativní okruh. Ukažte, že R-moduly R a R^2 nejsou izomorfní.
(10) Dokažte, že komutativní grupa A je p'-torzní, právě když platí $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes A = 0$.
(11) Dokažte, že komutativní grupa A je torzní, právě když $\mathbb{Q} \otimes A = 0$.
(12) Dokažte, že pokud komutativní grupa A je p-torzní, pak $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes A \cong A$.
(13) V předchozím dokažte následující obrácení: je-li A *torzní*[2] komutativní grupa a kanonické zobrazení $A \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \otimes A$ dané předpisem $x \mapsto 1 \otimes x$ je izomorfismus, pak A je p-torzní. Obecněji $A \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \otimes A$ je izomorfismus, právě když násobení všemi prvočísly $q \neq p$ je izomorfismus $A \xrightarrow{q\times} A$. To nastane právě když je A (jediným možným způsobem) $\mathbb{Z}_{(p)}$-modul.

těžší příklady, na které nezbyl čas

[1] Obecně rozšířením struktury R-modulu na M podél $\varphi : R \to S$ rozumíme strukturu S-modulu na M, pro níž platí $\varphi(r) \cdot x = r \cdot x$ (první je násobení S-modulové, druhé R-modulové). Popis modulů jako homomorfismů okruhů je velmi výhodný.

[2] Případ $A = \mathbb{Q}$ ukazuje, že tento předpoklad je nutný.

(1) Popište $\Bbbk(G)$-moduly.
(2) Nechť $R = C^0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ spojitá}\}$. Potom zřejmě R je konečně generovaný R-modul, jeho ideál $\mathfrak{m}_0 = \{f \mid f(x) \equiv 0 \text{ na nějakém okolí } 0\} \subseteq R$ není konečně generovaný.
(3) V okruhu $T\mathbb{Z}\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ "polynomů" v nekomutujících proměnných $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ (jedná se tedy o formální celočíselné kombinace výrazů $x_{n_1}x_{n_2}\cdots x_{n_k}$ a je to volný okruh na spočetné množině) je ideál generovaný proměnnými dokonce volný na spočetné množině. Dále ukažte, že, je-li M volný nad spočetnou množinou, pak není konečně generovaný.
(4) Dokažte klasifikaci konečných komutativních grup.
(5) Dokažte, že každý projektivní $\mathbb{Z}$-modul je ve skutečnosti volný. Ve skutečnosti dokažte, že podmodul volného $\mathbb{Z}$-modulu musí být volný (navíc na menším počtu generátorů). Důkaz proveďte (transfinitní) indukcí podle počtu generátorů volného modulu. Nápověda: důkaz lze vézt tak, že bude aplikovatelný pro libovolný obor hlavních ideálů (obor integrity, kde každý ideál je hlavní; anglicky principal ideal domain, PID).
(6) Pro komutativní okruh R dokažte obrácení předchozího cvičení: je-li každý podmodul každého volného R-modul volný, pak R je obor hlavních ideálů.
(7) Příklad modulu, který je zároveň volný nad jedním a nad dvěma generátory: důležité je si rozmyslet, jak přesně vypadá identifikace $R \cong \mathrm{Hom}_R(R, R)$. Protože je tento příklad o nekomutativních okruzích, bude v našem případě důležité se rozhodnout, jaké moduly budeme uvažovat. Na tom také závisí výše zmiňovaná identifikace. Pro nás bude výhodnější pracovat s pravými moduly (příklad pro levé moduly dostaneme uvažováním R^{op} místo R). Stačí vzít komutativní grupu A splňující $A \cong A \oplus A$, celé to poskládat do biproduktového diagramu $A \rightleftarrows A \leftrightarrows A$ určující čtyři prvky v $\mathrm{End}(A)$ splňující relace biproduktu. Násobení jimi určená zadávají pro $R = \mathrm{End}(A)$ biproduktový diagram $R \rightleftarrows R \leftrightarrows R$ zaručující $R \cong R \oplus R$ jako R-moduly. Odvoďte, že potom $R^m \cong R^n$ pro libovolná konečná m, n.

příklady "na další cvičení"

(1) Platí $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong \frac{I \cap J}{IJ}$.
(2) Dokažte pro $m, n \in \mathbb{N}$ následující izomorfismy, ve kterých $d = \gcd(m, n)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/d, \qquad \mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/d,$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/d, \qquad \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/d.$$

(3) Platí $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) = TA$, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}, A) = T_pA$, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}, A) = T_{p'}A$ a obecněji pro obor integrity a jeho lokalizace.
(4) Klasifikace rozšíření

$$\mathbb{Z}/2 \to B \to \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z} \to B \to \mathbb{Z}/2, \qquad A \to B \to C,$$

kde $\gcd(|A|, |C|) = 1$.

(5) Moritova teorie: Nechť $F : R\text{-}\mathsf{mod} \rightleftarrows S\text{-}\mathsf{mod} : G$ je aditivní ekvivalence. Potom musí F nutně být tvaru $F = P \otimes_R -$, kde $P = FR$ je S-R-bimodul, analogicky $G = Q \otimes_S -$, kde $Q = GS$ je R-S-bimodul. Nutně pak $P \otimes_R Q \cong S$ a $Q \otimes_S P \cong R$ jako příslušné bimoduly. Příklad s R a $S = \mathrm{Mat}_n(R)$ a příslušnými bimoduly $P = R^n$ (S-R-bimodul) a $Q = (R^n)^*$ (R-S-bimodul).

(6) Nechť $f : M \to M$ je idempotentní, tj. $f \circ f = f$. Ukažte, že $M \cong \operatorname{im} f \oplus \ker f$.

(7) Spočtěte kolimitu $M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} \cdots$, kde f je idempotentní.

(8) Definice lokalizace komutativního okruhu R vzhledem k podmnožině S pomocí univerzální vlastnosti. Ukažte, že podílové těleso oboru integrity R je lokalizace vzhledem k R^*. Příklad lokalizace v prvoideálu p (vzhledem k $R \smallsetminus p$).

(9) Lokalizace jako usměrněná kolimita (pro obor integrity; pro obecný komutativní okruh filtrovaná kolimita). Pro moduly jako usměrněná kolimita a jako tenzorový součin. Důsledek: lokalizace okruhu R je plochý R-modul a proto lokalizace modulů je exaktní funktor.

(10) Každý $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$-modul je projektivní.

(11) Nad komutativním okruhem je tenzorový součin dvou volných, resp. projektivních, resp. plochých modulů opět modul téhož typu.

(12) Definujte rank konečně generované grupy (konečně generovaného modulu nad PID) a dokažte, že rank se v krátké exaktní posloupnosti sčítá (a taky v dlouhé).

(13) Každý konečně generovaný projektivní modul je konečně prezentovatelný.

(14) Vylepšené Baerovo kritérium pro ploché moduly: stačí vzhledem k inkluzím konečně generovaných ideálů.

(15) Je-li $f : M \twoheadrightarrow N$ surjektivní homomorfismus, kde M je konečně generovaný a N je konečně prezentovatelný, pak $\ker f$ je konečně generovaný (vlastnost konečné prezentovanosti nezávisí na prezentaci).