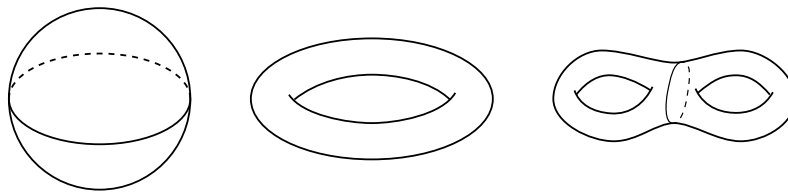


KLASIFIKACE PLOCH

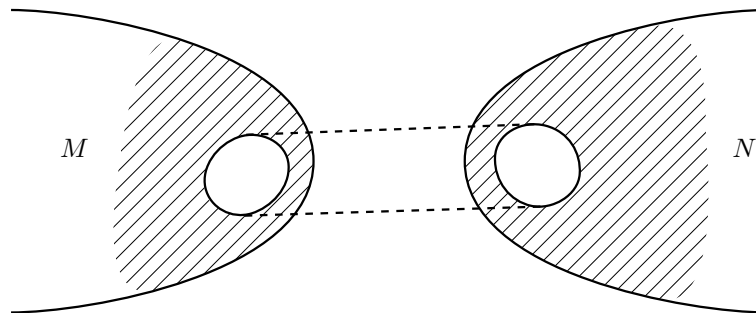
1. ÚVOD

Pojem plochy je všem intuitivně zřejmý. Klasickým příkladem plochy je sféra S^2 , tedy povrch koule. Známy je také torus \mathbb{T}^2 (duše pneumatiky). Další plocha vznikne ze dvou torů, vyřízneme-li z každého z nich kruh a tyto dva tory slepíme (sešijeme) podél hranic těchto kruhů, tedy kružnic.



Tato procedura lze zobecnit. Jsou-li M a N dvě plochy, jejich *souvislý součet* $M\#N$ je plocha vzniklá vyříznutím kruhu z každé z těchto ploch a následným slepením ploch podél jejich hranic – kružnic.

Poznámka. Na první pohled není vůbec zřejmé, proč by tato konstrukce neměla záviset na umístění těchto kruhů. Ač výsledek skutečně na tomto umístění nezávisí (alespoň pokud plochy nemají více komponent souvislosti), důkaz tohoto tvrzení je však již nad rámec našeho spíše informativního textu.

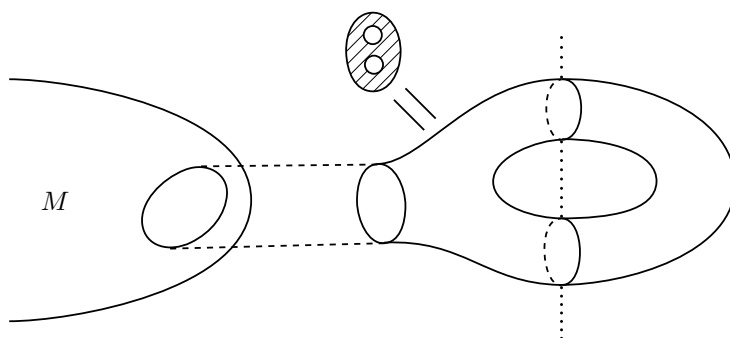


Orientovatelná plocha genu g je souvislý součet g kopií toru,

$$\Sigma_g = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2}_{g \times}$$

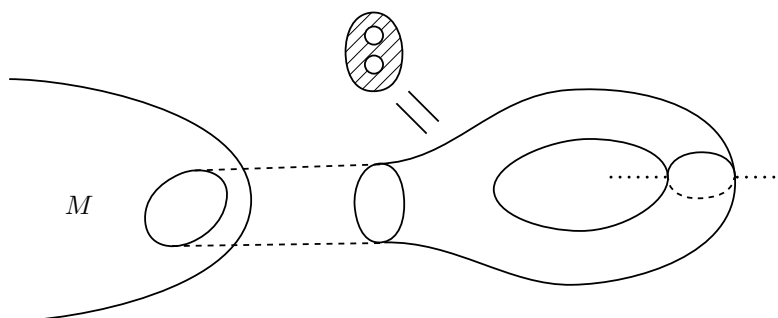
Popišme nyní operaci “souvislý součet s torem” trochu jinak. Rozdělme tuto proceduru na dvě, prvně k ploše souvisle přičteme jednu polovinu toru a poté druhou. Následující

obrázek by měl čtenáře přesvědčit, že po souvislém součtu s jednou polovinou toru ve skutečnosti z plochy vyřezeme dva disjunktní disky (jak budeme v dalším říkat kruhům), polovina toru je totiž válec a po odstranění disku z válce vzniknou tzv. kalhoty, které nejsou ničím jiným než diskem se dvěma disjunktními poddisky odstraněnými (to si lze představit například tak, že pas kalhot roztáhneme tak, že při pohledu zleva – u skutečných kalhot shora – skutečně vidíme disk se dvěma dírami).



Souvislý součet s torem tedy můžeme zrealizovat tak, že z plochy vyřezeme dva disjunktní disky a do vzniklých děr přilepíme válec podél dvou komponent jeho hranice – dvou kružnic.

Analogický popis dostaneme tak, že torus rozřízneme podél kružnice na následujícím obrázku. Opět dostáváme po odstranění disku kalhoty.



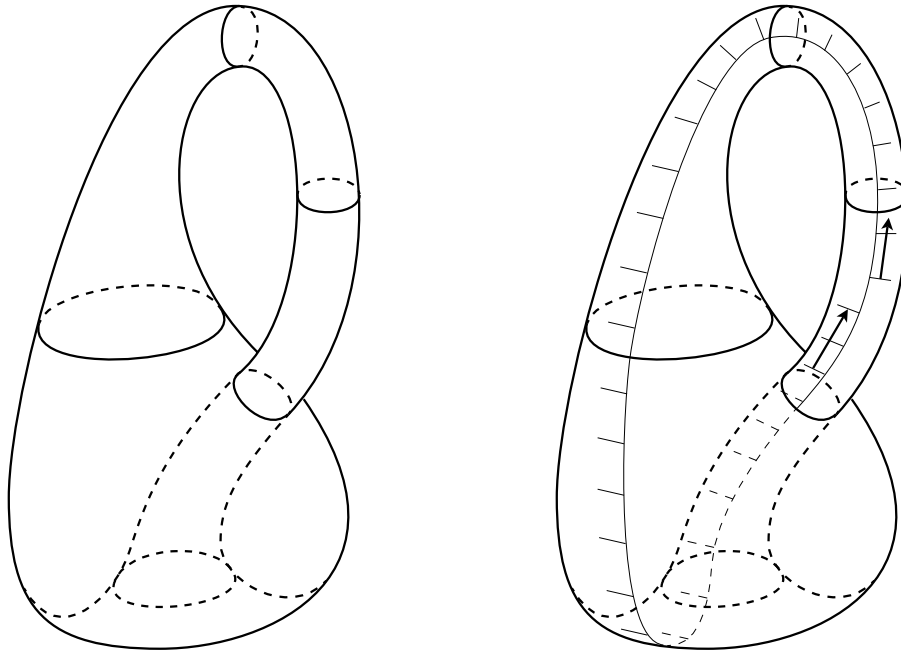
Ve výsledku tak souvislý součet s torem můžeme zrealizovat tak, že z plochy odstraníme dva disjunktní disky a poté dvě vzniklé hraniční kružnice slepíme dohromady. Toto bude popis, který nám bude v následujícím nejvíce vyhovovat.

Poznámka. Při tomto popisu je však potřeba dávat pozor, jakým způsobem plochu podél těchto kružnic slepujeme. V \mathbb{R}^3 to lze pouze jedním způsobem a to je ten správný. Můžeme tedy říct, že hraniční kružnice slepíme “logickým způsobem”. Pro ilustraci – pokud popsanou operaci provedem na sféře, vznikne po vyříznutí dvou disků válec a po slepení kružnic potom torus. Pokud bychom však tyto kružnice slepili “jinak”, dostali bychom Kleinovu láhev, kterou podrobněji popíšeme za chvíli.

Hlavní věta klasifikace říká, že každá souvislá orientovatelná plocha je ve skutečnosti jedna ze Σ_g . Postup, kdy plochu (či její vícerozměrnou obdobu – varietu) upravujeme

tak, že z ní část vyřízneme a pak do vzniklé díry přisijeme nějakou jinou plochu, se nazývá chirurgie. Můžeme tedy říct, že každou souvislou plochu vyrobíme ze sféry pomocí chirurgií. Nesouvislé plochy vzniknou přirozeně z těch souvislých pomocí disjunktního sjednocení.

Podobná věta platí i pro neorientovatelné plochy. Typickým a nejvíce profláklým příkladem je Kleinova láhev.



Tato plocha nelze zrealizovat v \mathbb{R}^3 ; v \mathbb{R}^4 to již lze – představíme-li si čtvrtou souřadnici jako barvu, můžeme hrdlu měnit v okolí nechtěného průniku se stěnou láhve barvu tak, aby byla odlišná od barvy stěny. Potom v \mathbb{R}^4 žádný průnik nenastane. Její neorientovatelnost je demonstrována následovně. Při projítí křivky na druhém obrázku se cestovatel přemístí z vnější strany láhve na vnitřní. To je na obrázku naznačeno úsečkou směřující napravo po směru cesty – při dokončení cesty je tento směr opačný než na začátku. Toto je popis, který funguje “uvnitř plochy”, tj. bez odkazu na okolní prostor. Jiný, a pro nás velice užitečný popis je, že okolí této křivky vypadá jako Möbiův pásek. Plocha se pak nazývá *neorientovatelná*, jestliže na ní existuje uzavřená křivka, jejíž okolí vypadá jako Möbiův pásek, v opačném případě je plocha *orientovatelná*.

Lze ukázat, že Kleinova láhev vznikne slepením dvou Möbiových pásků podél jejich společné hranice – kružnice. Z hlediska klasifikace jednodušší avšak nikoliv natolik známou plochou je takzvaná projektivní rovina. Ta vznikne slepením Möbiova pásku a disku. Další neorientovatelné plochy opět dostaneme tak, že z plochy vyřízneme disk a do něj vlepíme Möbiův pásek. Takto dostáváme sérii neorientovatelných ploch, která začíná projektivní rovinou a pokračuje Kleinovou láhví. Klasifikační věta říká, že na tomto seznamu jsou všechny souvislé neorientovatelné plochy.

Zmíňme ještě v rychlosti, že plochy, které jsme uvažovali nemají hranici, to by musely přibýt na seznam další plochy, například již zmiňované kalhoty. Také jsou kompaktní, tj. neuvažujeme orientovatelné plochy nekonečného genu, také neuvažujeme \mathbb{R}^2 .

Z hlediska ploch je tato klasifikační věta konec příběhu, z hlediska moderní geometrie (variet) naopak počátek. Již Poincaré položil otázku klasifikace 3-rozměrných variet. Nej-jednodušší taková je 3-rozměrná sféra (kterou si lze představovat tak, že k \mathbb{R}^3 přidáme jeden bod v nekonečnu, do kterého se dostaneme putováním v libovolném směru). Ve zjednodušené verzi se ptal, jak poznat, jestli daná 3-rozměrná varieta je sféra.

Pro plochy na tuto otázku odpovídá tzv. genus. Uvážíme-li na S^2 libovolnou uzavřenou křivku, rozdělí sféru na dvě části. Pro ostatní plochy vždy existuje křivka taková, že rozříznutím plochy podél ní zůstane plocha souvislá, v druhém popisu souvislého součtu s torem jsme toto demonstrovali právě na toru. Genus plochy je největší číslo g takové, že existuje g disjunktních uzavřených křivek tak, že po rozříznutí plochy podél nich plocha zůstane stále souvislá. Genus plochy Σ_g je právě g .

V 3-rozměrných varietách již tato myšlenka neobstojí. Vyjádřeme nyní tuto vlastnost trochu jinak. Každá křivka na sféře S^2 je hranicí disku nebo ještě lépe lze takovouto křivku spojitě zdeformovat (stáhnout) do jednoho bodu (tak, jako se gumička, když ji natáhnete a pak uvolníte smrskne do své původní velikosti). Prostory s touto vlastností se nazývají jednoduše souvislé. Žádná jiná plocha než sféra jednoduše souvislá není. Otázka Poincarého tedy zněla: je každá jednoduše souvislá 3-rozměrná varieta ve skutečnosti sférou S^3 ? Tato otázka je známá jako Poincarého hypotéza. Její vícerozměrná varianta byla dokázána v roce 1961 pro dimenze větší než čtyři, v roce 1982 v dimenzi čtyři a teprve v roce 2003 v dimenzi tři. To je 100 let po její formulaci Poincarém.

2. EULEROVA CHARAKTERISTIKA GRAFŮ

Nechť $G = (V, E)$ je konečný graf s množinou vrcholů V a množinou hran E . Definujme Eulerovu charakteristiku $\chi(G) = |V| - |E|$.

Věta 1. *Nechť G je souvislý graf. Pak platí $\chi(G) \leq 1$, přičemž rovnost nastává, právě když G je strom.*

Důkaz. Nechť $T \subseteq G$ je kostra grafu G . Jelikož T obsahuje všechny vrcholy G , platí $\chi(G) \leq \chi(T)$, přičemž rovnost nastává právě když $T = G$, tj. právě když G je sám stromem. Rovnost $\chi(T) = 1$ je známá, lze dokázat pomocí indukce odstraněním jednoho listu a jediné hrany s ním sousedící. Takto vzniklý strom T' má o jeden vrchol a jednu hranu méně a tedy $\chi(T) = \chi(T') = 1$ podle indukčního předpokladu. \square

3. EULEROVA CHARAKTERISTIKA PLOCH

Definice 2. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^m$ je podmnožina. Její triangulací (dimenze 2) rozumíme konečnou podmnožinu $V \subseteq M$ vrcholů a $F \subseteq \mathcal{P}(V)$ množinu tříprvkových podmnožin – stěn, splňují-li tyto podmínky

- $M = \bigcup_{f \in F} [f]$, kde $[f]$ značí afinní obal množiny $f = \{u, v, w\}$, tj. trojúhelník s vrcholy u, v, w .

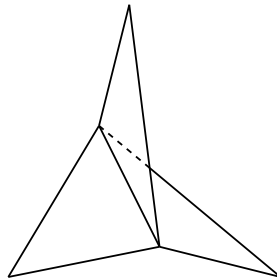
- Každé dva takové trojúhelníky $[f], [f']$ se protínají nanejvýš ve společné hraně či vrcholu.

Je výhodné zavést ještě množinu $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ dvouprvkových podmnožin – hran triangulace. Definujme ji takto

$$E = \{\{u, v\} \mid \exists w \in V : \{u, v, w\} \in F\}$$

jsou to tedy právě všechny dvouprvkové podmnožiny stěn triangulace, tedy hrany stěn. Trojici $T = (V, E, F)$ nazýváme *triangulací* M . Tato podmnožina M se nazývá (triangulovanou) *plochou*, jestliže navíc platí

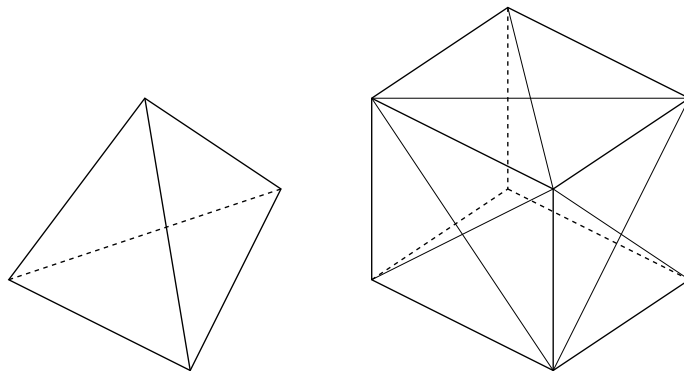
- Každá hrana leží právě ve dvou stěnách, to vylučuje jednak existenci hranice plochy a hlavně pak následující situaci:



Ve skutečnosti můžeme nadefinovat abstraktní, kombinatorickou plochu pomocí množiny jejích vrcholů V , hran E a stěn F . Má-li množina vrcholů V právě m prvků, můžeme snadno zrealizovat tento kombinatorický systém v \mathbb{R}^m . Vyberme si m afinně nezávislých bodů, např. e_1, \dots, e_m . Ztotožníme-li vrcholy s těmito body, můžeme položit $M = \bigcup_{f \in F} [f]$.

Nebudeme definovat obecnou (netriangulovanou) plochu, nicméně platí, že každá plocha lze triangulovat, nevynechali jsme tedy žádné možnosti. Toto tvrzení není vůbec jednoduché a ve vyšších dimenzích dokonce neplatí.

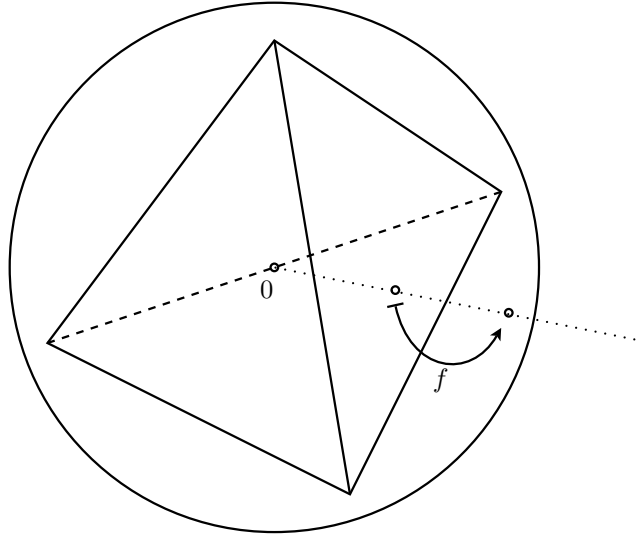
Příklad 3. Čtyřstěn a krychle jsou plochy.



Krychle lze triangulovat rozdělením každé stěny na trojúhelníky. Analogicky lze triangulovat každý mnohostěn. Z pohledu klasifikace ploch vypadají čtyřstěn a krychle stejně, konkrétně stejně jako sféra S^2 . Vysvětlíme si, co to znamená po následující definici.

Definice 4. Dvě podmnožiny $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývají *homeomorfní*, jestliže existuje bijekce $f : M \rightarrow N$ taková, že jak f , tak f^{-1} jsou spojitá zobrazení (definici spojitosti byste měli znát z metrických prostorů).

Příklad 5. Ukažme, že čtyřstěn a krychle jsou obě homeomorfní sféře S^2 . Představme si čtyřstěn $\partial\Delta^3$ uvnitř jednotkové sféry se středem v počátku.



Zobrazení $f : \partial\Delta^3 \rightarrow S^2$ je dáno tzv. radiální projekcí, $v \mapsto \frac{v}{|v|}$, které promítá bod na čtyřstěnu pomocí paprsku z počátku na odpovídající průsečík se sférou. Stejný předpis funguje pro krychli.

Definice 6. Eulerovou charakteristikou podmnožiny $M \subseteq \mathbb{R}^m$ s triangulací $T = (V, E, F)$ nazýváme číslo

$$\chi_T(M) = |V| - |E| + |F|$$

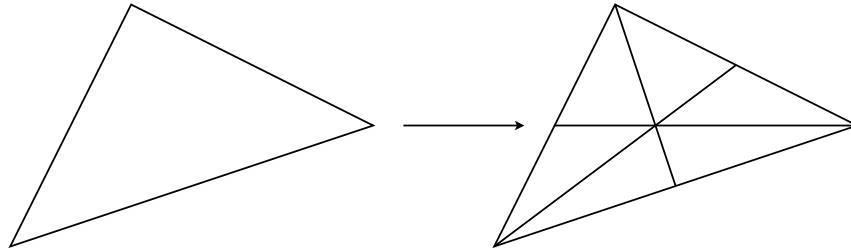
Platí, že toto číslo nezávisí na triangulaci T . Ve speciálním případě ploch lze tento výsledek odvodit z námi dokazované klasifikace ploch.

Věta 7. Platí $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$. Speciálně $\chi(M \# \mathbb{T}^2) = \chi(M) - 2$.

Důkaz. Prvně odvodíme, že $\chi(M \setminus D^2) = \chi(M) - 1$, ale abychom mohli vůbec něco spočítat, budeme muset být trochu konkrétnější. V naší aplikaci bude odstraňovaný disk tvořen právě některými trojúhelníky triangulace, ještě konkrétněji se bude jednat o podrozdělení pravidelného k -úhelníku (vzniklé z mnohoúhelníku přidáním středu a úseček spojujících tento střed s jeho vrcholy) a proto se omezíme pouze na tento případ. Takto se odstraněním

disku zbavíme právě 1 vrcholu, k hran (odstraňujeme pouze ty vnitřní) a k stěn, tedy Eulerova charakteristika klesne o 1. Následným slepením $M \setminus D^2$ a $N \setminus D^2$ podél hranic S^1 vyřezaných disků D^2 se zbavíme k vrcholů a k hran, tedy Eulerova charakteristika se nezmění. V případě souvislého součtu s torem můžeme postupovat takto: vyřezáním dvou disků klesne Eulerova charakteristika o 2 a slepením dvou vzniklých kružnic se nezmění. \square

Nechť T je triangulace M . Jejím *barycentrickým podrozdělením* rozumíme triangulaci $T' = (V', E', F')$ vzniklou podle následujícího obrázku.

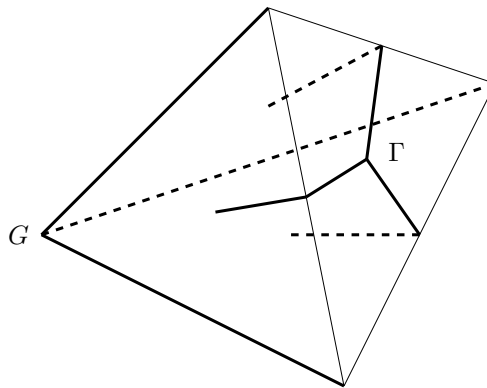


Vrcholy V' jsou tedy tři druhů – staré vrcholy, středy starých hran a těžiště starých stěn, tedy první z následující vztahů je zřejmý.

$$|V'| = |V| + |E| + |F| \quad |E'| = 2|E| + 6|F| \quad |F'| = 6|F|$$

Druhý platí, neboť z každé staré hrany vznikly dvě nové a navíc jsme přidali za každou starou stěnu šest nových hran. Z každé staré stěny vzniklo šest nových, což je přesně třetí vztah. Ve výsledku $\chi_{T'}(M) = \chi_T(M)$.

Nechť nyní M je souvislá plocha. Protože každý bod M lze zjevně spojit s vrcholem triangulace, souvislost M znamená, že graf (V, E) vzniklý zapomenutím stěn triangulace, je souvislý. Nechť $G = (\tilde{V}, \tilde{E}) \subseteq (V, E)$ je nějaký podgraf, v dalším pak bude hlavním příkladem kostra tohoto grafu. Definujme *duální graf* $\Gamma \subseteq (V', E')$ následovně.



Jeho vrcholy jsou právě těžiště všech stěn a středy těch hran, které nejsou obsaženy v G . Hrany Γ jsou pak všechny hrany mezi těmito vrcholy. Počítejme Eulerovu charakteristiku

duálního grafu Γ . Zřejmě počet vrcholů Γ je $|F| + |E \setminus \tilde{E}|$, zatímco počet hran je $2|E \setminus \tilde{E}|$, protože každá hrana sousedí právě se dvěma stěnami – zde jsme poprvé využili toho, že se opravdu jedná o plochu a ne pouze o triangulovanou množinu. Ve výsledku tak $\chi(\Gamma) = |F| - |E \setminus \tilde{E}|$.

Věta 8. *Je-li G strom, pak duální graf Γ je souvislý.*

Důkaz. Předpokládejme, že duální graf Γ není souvislý a zkonstruujeme v původním grafu G kružnici. Jelikož je Γ nesouvislý a obsahuje barycentra všech stěn, lze najít v grafu G hranu, která sousedí (náleží do) se stěnami náležícími různým komponentám souvislosti duálního grafu Γ . Vyberme si jednu z těchto komponent a představujme si pro určitost, že leží “nalevo” od naší hrany. Budeme nyní po ploše M cestovat podél této hrany. Z vrcholu, do kterého dorazíme, vychází několik hran, my se vydáme tou nejvíce vlevo, která má po levé straně naší zafixovanou komponentu a napravo nějakou jinou. To je možné proto, že to samé splňovala předchozí hrana a tak v okolí vrcholu leží *různé komponenty*. Jelikož je graf konečný, musíme po konečném počtu kroků vytvořit kružnici. \square

Důsledek 9. *Je-li M souvislá plocha, potom $\chi_T(M) \leq 2$. Rovnost nastává právě když duální graf Γ ke kostře G grafu (V, E) je strom.*

Důkaz. Nechť G je kostra grafu (V, E) . Potom platí

$$\chi_T(M) = (|V| - |\tilde{E}|) + (|F| - |E \setminus \tilde{E}|) = \chi(G) + \chi(\Gamma) \leq 1 + 1.$$

\square

Důkaz klasifikační věty (resp. jeho náznak). Nechť M je libovolná souvislá orientovatelná plocha. Nechť G je libovolná kostra (V, E) a Γ její duální graf. Důkaz budeme provádět indukci podle Eulerovy charakteristiky $\chi_T(M) = 2, 1, \dots$. Bázi indukce $\chi_T(M) = 2$ si necháme na konec. Nechť tedy $\chi_T(M) < 2$, potom však Γ musí nutně obsahovat cyklus, označme jej $C \subseteq (V', E')$. Rozříznutím triangulace T' plochy M podél C dostáváme souvislou množinu. Opravdu, každý nově vzniklý vrchol lze spojit hranou s jedním ze starých vrcholů V a ty jsou navzájem spojeny kostrou G , resp. jejím podrozdělením G' .

Jelikož byla M orientovatelná, vzniknou po rozříznutí dvě hraniční kružnice a my vlepíme do každé z nich disk. Označme vzniklou plochu M' . Potom $M = M' \# \mathbb{T}^2$ a podle našeho lemmatu platí $\chi(M) = \chi(M') - 2$, tedy podle indukčního předpokladu je M' jednou z ploch na našem seznamu. Potom ale také M je na seznamu o jednu položku dále.

Zbývá dokázat bázi indukce. Nechť tedy $\chi(M) = 2$, tj. nechť graf Γ je stromem. Potom po dalším barycentrickém podrozdělení lze M rozdělit na dvě podmnožiny, “okolí grafů G a Γ ” – toto je naznačeno v následujících obrázcích ve dvou různých situacích v jedné stěně původní triangulace.

Každá z těchto podmnožin je homeomorfní disku – toto se dá ukázat indukci. Po odstranění listu stromu Γ zůstane opět strom, o jehož okolí tedy můžeme předpokládat indukci, že je disk. To je naznačeno na druhém obrázku. Po opětovném přidání listu k tomuto disku přilepíme další disk (okolí barycentra trojúhelníka v předchozím obrázku), který sdílí se starým diskem společně právě dvě hrany. Nemělo by být těžké uvěřit, že tímto slepením vznikne opět disk. Vraťme se nyní k původní ploše M . Právě jsme ji rozložili na sjednocení

dvou disků, které se protínají právě ve společné hranici, tj. kružnici. Opět by mělo být intuitivně zřejmé, že tímto sjednocením dostaneme sféru S^2 . Preciznější důkazy vyžadují jistou znalost topologie. \square

