Kombinatorické hry

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

7. 3. 2011

Obsah přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

O čem je řeč?

Kombinatorická hra je hra **dvou** hráčů s úplnou informací (*žádné skryté ani simultánní tahy*), bez náhody (*tj. nikoliv kámen-nůžky-papír, vrhcáby, poker apod.*). Hra je určena možnými stavy (pozicemi), ve kterých se může nacházet, a tím, který hráč je zrovna na tahu. Hráči se obvykle v tazích střídají do té doby, než je dosažen koncový stav – pak je jeden z hráčů prohlášen za vítěze a druhý za poraženého.

O čem je řeč?

Kombinatorická hra je hra **dvou** hráčů s úplnou informací (*žádné skryté ani simultánní tahy*), bez náhody (*tj. nikoliv kámen-nůžky-papír, vrhcáby, poker apod.*). Hra je určena možnými stavy (pozicemi), ve kterých se může nacházet, a tím, který hráč je zrovna na tahu. Hráči se obvykle v tazích střídají do té doby, než je dosažen koncový stav – pak je jeden z hráčů prohlášen za vítěze a druhý za poraženého.

My se navíc budeme zabývat především hrami **nestrannými** (angl. *impartial*), kde mají oba hráči k dispozici stejné tahy (tím jsou vyloučeny např. šachy nebo dáma), kde je analýza podstatně jednodušší, pro **partyzánské** (*partizan*) hry dostáváme zase podstatně bohatší teorii.

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Jednoduchá hra na úvod

1. Hraje se s 21 kameny.

Jednoduchá hra na úvod

1. Hraje se s 21 kameny.
2. Tah spočívá v odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů.

Jednoduchá hra na úvod

1. Hraje se s 21 kameny.
2. Tah spočívá v odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů.
3. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrává (tj. hráč, který nemůže táhnout, prohrál).

Jednoduchá hra na úvod

1. Hraje se s 21 kameny.
2. Tah spočívá v odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů.
3. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrává (tj. hráč, který nemůže táhnout, prohrál).

Jednoduchá hra na úvod

1. Hraje se s 21 kameny.
2. Tah spočívá v odebrání jednoho, dvou nebo tří kamenů.
3. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrává (tj. hráč, který nemůže táhnout, prohrál).

Naším cílem je zjistit, jestli si některý z hráčů může **vynutit** vítězství.

Analýza jednoduché hry

Při analýze budeme postupovat zpětnou indukcí:

- jsou-li na stole 1-3 kameny, pak hráč na tahu **vyhrává**
- jsou-li na stole 4 kameny, pak hráč na tahu **prohrává** (nemá jinou možnost, než dalším tahem uvést hru do stavu, kdy jsou na stole 1-3 kameny a vyhrává tedy jeho soupeř)
- je-li na stole 5-7 kamenů, hráč na tahu vyhrává (může odebrat tolik kamenů, aby zbyly 4)
- atd.

Analýza jednoduché hry

Při analýze budeme postupovat zpětnou indukcí:

- jsou-li na stole 1-3 kameny, pak hráč na tahu **vyhrává**
- jsou-li na stole 4 kameny, pak hráč na tahu **prohrává** (nemá jinou možnost, než dalším tahem uvést hru do stavu, kdy jsou na stole 1-3 kameny a vyhrává tedy jeho soupeř)
- je-li na stole 5-7 kamenů, hráč na tahu vyhrává (může odebrat tolik kamenů, aby zbyly 4)
- atd.

U této hry je tedy poměrně snadno vidět, že stav s 0,4,8,12, . . . , 20 kameny jsou stav, kdy hráč na tahu prohrává.

Analýza jednoduché hry

Při analýze budeme postupovat zpětnou indukcí:

- jsou-li na stole 1-3 kameny, pak hráč na tahu **vyhrává**
- jsou-li na stole 4 kameny, pak hráč na tahu **prohrává** (nemá jinou možnost, než dalším tahem uvést hru do stavu, kdy jsou na stole 1-3 kameny a vyhrává tedy jeho soupeř)
- je-li na stole 5-7 kamenů, hráč na tahu vyhrává (může odebrat tolik kamenů, aby zbyly 4)
- atd.

U této hry je tedy poměrně snadno vidět, že stav s 0,4,8,12, . . . , 20 kameny jsou stav, kdy hráč na tahu prohrává.

V naší hře tedy **vítězí hráč, který začíná** – stačí v 1. tahu odebrat jeden kámen a poté postupovat tak, aby po jeho tahu zbyl počet kamenů, který je násobkem 4.

Definice kombinatorické hry

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

1. Hrají 2 hráči.

Definice kombinatorické hry

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

1. Hrají 2 hráči.
2. Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.

Definice kombinatorické hry

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

1. Hrají 2 hráči.
2. Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.
3. Pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy. Pokud pravidla nerozlišují hráče, nazývá se hra **nestranná** (impartial), v opačném případě **partyzánská** (partizan).

Definice kombinatorické hry

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

1. Hrají 2 hráči.
2. Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.
3. Pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy. Pokud pravidla nerozlišují hráče, nazývá se hra **nestranná** (impartial), v opačném případě **partyzánská** (partizan).
4. Hráči se ve svých tazích střídají.

Definice kombinatorické hry

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

1. Hrají 2 hráči.
2. Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.
3. Pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy. Pokud pravidla nerozlišují hráče, nazývá se hra **nestranná** (impartial), v opačném případě **partyzánská** (partizan).
4. Hráči se ve svých tazích střídají.
5. Hra končí ve chvíli, kdy je dosažen stav, v němž není možný další tah. Při **normální hře** (normal play rule) pak vyhrává hráč, který učinil poslední tah, při **nuzné hře** (misère play rule) takový hráč prohrává.

Definice kombinatorické hry

Definice

Kombinatorická hra splňuje následující podmínky:

1. Hrají 2 hráči.
2. Je dána množina (obvykle konečná) možných tahů.
3. Pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy. Pokud pravidla nerozlišují hráče, nazývá se hra **nestranná** (impartial), v opačném případě **partyzánská** (partizan).
4. Hráči se ve svých tazích střídají.
5. Hra končí ve chvíli, kdy je dosažen stav, v němž není možný další tah. Při **normální hře** (normal play rule) pak vyhrává hráč, který učinil poslední tah, při **nuzné hře** (misère play rule) takový hráč prohrává.
6. (**konečnost hry**) Hra skončí po konečném počtu tahů bez ohledu na zahrávané tahy.

P-stavy a N-stavy

V analýze naší jednoduché hry na úvod jsme odvodili, že 0,4,8,. . . ,20 jsou stavy, v nichž vyhrává **P**ředchozí hráč (tj. hráč, který svým tahem hru do tohoto stavu dovedl). V ostatních stavech vyhrává **N**ásledující hráč.

V analýze naší jednoduché hry na úvod jsme odvodili, že 0,4,8,. . . ,20 jsou stavy, v nichž vyhrává **P**ředchozí hráč (tj. hráč, který svým tahem hru do tohoto stavu dovedl). V ostatních stavech vyhrává **N**ásledující hráč.
P-stavy a N-stavy se dají u námi studovaných kombinatorických her odvodit podle následujícího (induktivního) postupu:

Krok 1 Všechny koncové stavy označ jako P-stavy (v případě misère jako N-stavy).

P-stavy a N-stavy

V analýze naší jednoduché hry na úvod jsme odvodili, že 0,4,8,. . . ,20 jsou stavy, v nichž vyhrává **P**ředchozí hráč (tj. hráč, který svým tahem hru do tohoto stavu dovedl). V ostatních stavech vyhrává **N**ásledující hráč.
P-stavy a N-stavy se dají u námi studovaných kombinatorických her odvodit podle následujícího (induktivního) postupu:

Krok 1 Všechny koncové stavy označ jako P-stavy (v případě misère jako N-stavy).

Krok 2 Všechny stavy, z nichž **existuje** tah do P-stavu, označ jako N-stavy.

P-stavy a N-stavy

V analýze naší jednoduché hry na úvod jsme odvodili, že 0,4,8,. . . ,20 jsou stavy, v nichž vyhrává **P**ředchozí hráč (tj. hráč, který svým tahem hru do tohoto stavu dovedl). V ostatních stavech vyhrává **N**ásledující hráč.
P-stavy a N-stavy se dají u námi studovaných kombinatorických her odvodit podle následujícího (induktivního) postupu:

- Krok 1 Všechny koncové stavy označ jako P-stavy (v případě misère jako N-stavy).
- Krok 2 Všechny stavy, z nichž **existuje** tah do P-stavu, označ jako N-stavy.
- Krok 3 Označ jako P-stav takový stav, z nějž všechny možné tahy vedou do N-stavů.

Cvičení

1. 1 hromádka, 2 hráči. První hráč smí odebrat libovolný nenulový počet kamenů, ale ne všechny, následující hráč pak vždy nejvýše tolik kamenů, co protihráč v předchozím tahu.
2. Jako výše, ale s touto změnou: hráč smí odebrat nejvýš dvojnásobek tahu protihráče (tzv. Fibonacci Nim)[1]

Tyto úlohy přísně vzato nesplňují předchozí definici (hromádka s 1 kamenem je pro prvního hráče P-stav, ale pro druhého N-stav!), můžete si ale s jejich pomocí tříbit uvažování hráče.

[1] Využijete Fibonacciho čísla a Zeckendorfovu větu.

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Nejznámější odebírací hrou je **Nim**. V klasické variantě se hraje se třemi hromádkami kamenů (např. 5,7 a 9 kamenů). Tah spočívá ve výběru hromádky a odebrání libovolného (ale nenulového) počtu kamenů z této hromádky. Vítězí hráč, který odebere poslední kámen.

Nejznámější odebírací hrou je **Nim**. V klasické variantě se hraje se třemi hromádkami kamenů (např. 5,7 a 9 kamenů). Tah spočívá ve výběru hromádky a odebrání libovolného (ale nenulového) počtu kamenů z této hromádky. Vítězí hráč, který odebere poslední kámen.

Příklad

Hru je možné si vyzkoušet na adrese
`http://www.chlond.demon.co.uk/Nim.html` (lokálně: zde)

Nejznámější odebírací hrou je **Nim**. V klasické variantě se hraje se třemi hromádkami kamenů (např. 5,7 a 9 kamenů). Tah spočívá ve výběru hromádky a odebrání libovolného (ale nenulového) počtu kamenů z této hromádky. Vítězí hráč, který odebere poslední kámen.

Příklad

Hru je možné si vyzkoušet na adrese `http://www.chlond.demon.co.uk/Nim.html` (lokálně: zde)

První analýza

- Jediný koncový stav je (0,0,0).
- Stavy s jedinou neprázdnou hromádkou jsou zřejmě N-stavy.
- (Tweedledum-Tweedledee strategie) Při dvou neprázdných hromádkách jsou P-stavy právě ty stavy, v nichž obě hromádky mají stejný počet kamenů.
- N-stavy: (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,2); P-stav: (1,2,3).

Jak poznat P- a N-stavy jednodušeji?

Induktivní metoda popsaná dříve sice vede k řešení, ale zjistit s její pomocí, jestli je např. stav (16,27,32) P-stavem je bez pomoci počítače obtížné. Existuje přitom velmi elegantní způsob nejen pro to, jak určit P- a N-stavy, ale zároveň na určení vítězné strategie (tj. návod na určení tahu, který vede z daného N-stavu do P-stavu).

Jak poznat P- a N-stavy jednodušeji?

Induktivní metoda popsaná dříve sice vede k řešení, ale zjistit s její pomocí, jestli je např. stav (16,27,32) P-stavem je bez pomoci počítače obtížné. Existuje přitom velmi elegantní způsob nejen pro to, jak určit P- a N-stavy, ale zároveň na určení vítězné strategie (tj. návod na určení tahu, který vede z daného N-stavu do P-stavu). Tato metoda je založena na zápisu přirozených čísel ve dvojkové soustavě (tzv. binárním zápisu) a na operaci `XOR` (sčítání ve dvojkové soustavě **bez** přenosu).

Definice (Nim-součet)

Nim-součtem čísel $x = (x_m \dots x_0)_2$ a $y = (y_m \dots y_0)_2$ je číslo $x \oplus y = z = (z_m \dots z_0)_2$, kde $z_k = x_k + y_k \mod 2$, pro $k = 0, \dots, m$.

Příklad

$16 \oplus 27 = (10000)_2 \oplus (11011)_2 = (01011)_2 = 11.$

Poznámka (Algebraická)

Nim-součet je na množině nezáporných celých čísel *komutativní* a *asociativní*, 0 je vzhledem k této operaci neutrální prvek ($0 \oplus x = x$) a každý prvek je sám k sobě opačný ($x \oplus x = 0$). $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ je tedy *komutativní grupa*, kde platí tzv. *zákony o krácení*: $x \oplus y = x \oplus z \implies y = z$.

Poznámka (Algebraická)

Nim-součet je na množině nezáporných celých čísel *komutativní* a *asociativní*, 0 je vzhledem k této operaci neutrální prvek ($0 \oplus x = x$) a každý prvek je sám k sobě opačný ($x \oplus x = 0$). $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ je tedy *komutativní grupa*, kde platí tzv. *zákony o krácení*: $x \oplus y = x \oplus z \implies y = z$.

Věta (Bouton, 1902)

Stav (x, y, z) v Nimu je P-stavem právě tehdy, když platí

$$x \oplus y \oplus z = 0.$$

Poznámka (Algebraická)

Nim-součet je na množině nezáporných celých čísel *komutativní* a *asociativní*, 0 je vzhledem k této operaci neutrální prvek ($0 \oplus x = x$) a každý prvek je sám k sobě opačný ($x \oplus x = 0$). $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ je tedy *komutativní grupa*, kde platí tzv. *zákony o krácení*: $x \oplus y = x \oplus z \implies y = z$.

Věta (Bouton, 1902)

Stav (x, y, z) *v Nimu je P-stavem právě tehdy, když platí*

$$x \oplus y \oplus z = 0.$$

Příklad

Protože je $16 \oplus 27 \oplus 32 = (10000)_2 \oplus (11011)_2 \oplus (100000)_2 = (01011)_2 \oplus (100000)_2 = (101011)_2 = 43$,
je $(16, 27, 32)$ N-pozicí.

Jak najít vítězný tah?

To, že víme, že je nějaká pozice pro nás vítězná, je sice pěkné, my bychom ale chtěli vědět, jaký tah zahrát, abychom se této výhody nezbavili.

Jak najít vítězný tah?

To, že víme, že je nějaká pozice pro nás vítězná, je sice pěkné, my bychom ale chtěli vědět, jaký tah zahrát, abychom se této výhody nezbavili.
K tomu si stačí uvědomit, co vlastně Boutonova věta říká – P-stav je takový stav, že když zapíšeme počty kamenů binárně pod sebe, tak v každém sloupci bude sudý počet jedniček. Je poměrně snadno vidět, jak v takovém zápisu dospět z N-stavu do P-stavu:

$$\begin{array}{rcccccc}
16 = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
27 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
32 = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Jak najít vítězný tah?

To, že víme, že je nějaká pozice pro nás vítězná, je sice pěkné, my bychom ale chtěli vědět, jaký tah zahrát, abychom se této výhody nezbavili.
K tomu si stačí uvědomit, co vlastně Boutonova věta říká – P-stav je takový stav, že když zapíšeme počty kamenů binárně pod sebe, tak v každém sloupci bude sudý počet jedniček. Je poměrně snadno vidět, jak v takovém zápisu dospět z N-stavu do P-stavu:

$$
\begin{array}{rcccccc}
16 = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
27 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & \color{red}{0} & 0 & \color{red}{1} & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Jak najít vítězný tah?

To, že víme, že je nějaká pozice pro nás vítězná, je sice pěkné, my bychom ale chtěli vědět, jaký tah zahrát, abychom se této výhody nezbavili.
K tomu si stačí uvědomit, co vlastně Boutonova věta říká – P-stav je takový stav, že když zapíšeme počty kamenů binárně pod sebe, tak v každém sloupci bude sudý počet jedniček. Je poměrně snadno vidět, jak v takovém zápisu dospět z N-stavu do P-stavu:

$$
\begin{array}{rcccccc}
16 = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
27 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
11 = & \color{red}{0} & 0 & \color{red}{1} & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Protože odebíráním kamenů čísla zmenšujeme, je třeba uvážit nejlevější sloupec, kde je lichý počet jedniček a zmenšit některé z čísel, majících v tomto sloupci jedničku (v našem případě nemáme na výběr), a toto číslo zmenšit tak, aby počty jedniček ve všech sloupcích byly sudé – to je zřejmě vždy možné (za předpokladu, že je nim-součet nenulový).

Důkaz Boutonovy věty

Nim s jednou hromádkou je triviální,
se dvěma snadný (Tweedledum-Tweedledee),
se třemi už mnohem obtížnější.

Důkaz Boutonovy věty

Nim s jednou hromádkou je triviální,
se dvěma snadný (Tweedledum-Tweedledee),
se třemi už mnohem obtížnější.

Co když přidáme ještě další hromádky? Možná překvapivě je situace stejná jako v případě tří hromádek (a vlastně i v případě jedné a dvou hromádek) – daný stav je P-stavem, právě když je nim-součet počtu kamenů v jednotlivých hromádkách roven 0.

Důkaz tohoto tvrzení je poměrně snadný a vychází z rekurzívní definice P-stavů a N-stavů.

Důkaz obecné Boutonovy věty.

Krok 1 Všechny koncové stavy (z definice P-stavy) mají nim-součet roven 0 (vždyť máme jediný koncový stav $(0, 0, \dots, 0)$, který splňuje $0 \oplus \dots \oplus 0 = 0$).

Krok 2 Z každého stavu s nenulovým nim-součtem existuje tah do stavu s nulovým nim-součtem (viz předchozí příklad).

Krok 3 Každý tah ze stavu s nulovým nim-součtem vede do stavu s nenulovým nim-součtem: kdyby pro tah $(x, y, z, ...) \to (x', y, z)$, kde $x' < x$, platilo $x \oplus y \oplus z \oplus \dots = 0 = x' \oplus y \oplus z \oplus \cdots$, pak díky pravidlu o krácení dostáváme $x = x'$.

Proto je množina stavů s nulovým nim-součtem právě množinou P-stavů.

Důkaz tohoto tvrzení je poměrně snadný a vychází z rekurzívní definice P-stavů a N-stavů.

Důkaz obecné Boutonovy věty.

Krok 1 Všechny koncové stavy (z definice P-stavy) mají nim-součet roven 0 (vždyť máme jediný koncový stav $(0, 0, \dots, 0)$, který splňuje $0 \oplus \cdots \oplus 0 = 0$).

Krok 2 Z každého stavu s nenulovým nim-součtem existuje tah do stavu s nulovým nim-součtem (viz předchozí příklad).

Krok 3 Každý tah ze stavu s nulovým nim-součtem vede do stavu s nenulovým nim-součtem: kdyby pro tah $(x, y, z, \dots) \to (x', y, z)$, kde $x' < x$, platilo $x \oplus y \oplus z \oplus \cdots = 0 = x' \oplus y \oplus z \oplus \cdots$, pak díky pravidlu o krácení dostáváme $x = x'$.

Proto je množina stavů s nulovým nim-součtem právě množinou P-stavů. Zároveň je vidět, že počet vítězných tahů z N-stavu do některého P-stavu je přesně roven počtu jedniček v nejlevějším sloupci s lichým počtem jedniček (speciálně, počet vítězných tahů je vždy lichý!). □

Misère Nim

Pokud hrajeme *nuznou* hru, kdy hráč, který táhne naposled, prohrává, je situace často o dost obtížnější. [Wiki] přitom uvádí, že Nim se obvykle hraje právě ve své *misère* variantě.
Zkuste si rozmyslet, jaké jsou P-stavy a N-stavy v nuzné hře, kdy konečný stav je N-stavem a jak hrát v N-stavech, abyste si zaručili výhru.

Misère Nim

Pokud hrajeme *nuznou* hru, kdy hráč, který táhne naposled, prohrává, je situace často o dost obtížnější. [Wiki] přitom uvádí, že Nim se obvykle hraje právě ve své *misère* variantě.
Zkuste si rozmyslet, jaké jsou P-stavy a N-stavy v nuzné hře, kdy konečný stav je N-stavem a jak hrát v N-stavech, abyste si zaručili výhru.

Hraje se stejně jako v případě normální hry, dokud je alespoň na dvou hromádkách více než jeden kámen. V situaci, kdy soupeřův tah přivede hru do stavu, kdy je právě na jedné hromádce více než jeden kámen, vezměte z této hromádky tolik kamenů, aby počet hromádek s právě jedním kamenem byl lichý.

Nimu podobné hry

Nimble

Hraje se na pásu čtverečků, očíslovaném 0,1,2,. . . . Na každém čtverečku mohou být položeny mince (žádná, jedna i více). Tah spočívá v přesunutí jedné mince na některý čvereček s nižším číslem (lze i pokud již na něm nějaké mince jsou). Koncový stav je ve chvíli, kdy jsou všechny mince na čtverečku s číslem 0, hráč, který táhl poslední, vyhrává.

Nimu podobné hry

Nimble

Hraje se na pásu čtverečků, očíslovaném 0,1,2,. . . . Na každém čtverečku mohou být položeny mince (žádná, jedna i více). Tah spočívá v přesunutí jedné mince na některý čvereček s nižším číslem (lze i pokud již na něm nějaké mince jsou). Koncový stav je ve chvíli, kdy jsou všechny mince na čtverečku s číslem 0, hráč, který táhl poslední, vyhrává.

Převracení želv (Turning turtles)

Mince jsou náhodně poskládány do řady, některé z nich vzhůru lícem, jiné rubem. Tak spočívá v otočení některé mince z líce na rub a volitelně v otočení jiné mince vlevo od první (z líce na rub nebo z rubu na líc). Vyhrává hráč, který na konci svého tahu dosáhne stavu, že jsou všechny mince otočeny rubem vzhůru. Hru si můžete zahrát na `http://www.chlond.demon.co.uk/Coins.html` (lokálně zde).

Nimu podobné hry

Nimble

Hraje se na pásu čtverečků, očíslovaném 0,1,2,. . . . Na každém čtverečku mohou být položeny mince (žádná, jedna i více). Tah spočívá v přesunutí jedné mince na některý čvereček s nižším číslem (lze i pokud již na něm nějaké mince jsou). Koncový stav je ve chvíli, kdy jsou všechny mince na čtverečku s číslem 0, hráč, který táhl poslední, vyhrává.

Převracení želv (Turning turtles)

Mince jsou náhodně poskládány do řady, některé z nich vzhůru lícem, jiné rubem. Tak spočívá v otočení některé mince z líce na rub a volitelně v otočení jiné mince vlevo od první (z líce na rub nebo z rubu na líc). Vyhrává hráč, který na konci svého tahu dosáhne stavu, že jsou všechny mince otočeny rubem vzhůru. Hru si můžete zahrát na `http://www.chlond.demon.co.uk/Coins.html` (lokálně zde).

Obě hry se snadno převedou na klasický Nim (promyslete!).

Mooreův Nim

Nim$_k$ se hraje stejně jako klasický Nim s tím rozdílem, že hráč ve svém tahu odebírá kameny z libovolných k hromádek (z každé hromádky může odebrat jiný počet kamenů, případně neodebrat žádný), přitom musí celkově odebrat alespoň jeden kámen. Je vidět, že Nim$_1$ je klasický Nim.

Nimu podobné hry

Mooreův Nim

Nim_k se hraje stejně jako klasický Nim s tím rozdílem, že hráč ve svém tahu odebírá kameny z libovolných k hromádek (z každé hromádky může odebrat jiný počet kamenů, případně neodebrat žádný), přitom musí celkově odebrat alespoň jeden kámen. Je vidět, že Nim_1 je klasický Nim.

Věta (Moore, 1910)

Stav $(x, y, z, \dots)$ je v Nim_k P-stav, právě když je počet jedniček na všech místech binárního zápisu čísel $x, y, z, \dots$ násobkem $k+1$ (tj. x, y, z zapíšeme binárně a sčítáme bez přenosu v v soustavě o základu $k+1$).

Nimu podobné hry

Mooreův Nim

Nim_k se hraje stejně jako klasický Nim s tím rozdílem, že hráč ve svém tahu odebírá kameny z libovolných k hromádek (z každé hromádky může odebrat jiný počet kamenů, případně neodebrat žádný), přitom musí celkově odebrat alespoň jeden kámen. Je vidět, že Nim_1 je klasický Nim.

Věta (Moore, 1910)

Stav $(x, y, z, \dots)$ je v Nim_k P-stav, právě když je počet jedniček na všech místech binárního zápisu čísel $x, y, z, \dots$ násobkem $k+1$ (tj. x, y, z zapíšeme binárně a sčítáme bez přenosu v v soustavě o základu $k+1$).

Příklad (Northcottova hra)

Hraje se na šachovnici s bílými a černými pěšci, kteří táhnou ve sloupcích vpřed *i vzad* (bez přeskakování). Kdo nemůže táhnout prohrává.[a]

[a] Všimněte si, že ze **nejde** o nestrannou hru!

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Už při předchozím uvažování o kombinatorických hrách bylo vidět, že prováděné myšlenky se dají docela dobře reprezentovat pomocí tzv. **orientovaných grafů**, kde jednotlivé stavy hry jsou reprezentovány vrcholy a tahy mezi těmito stavy tvoří (orientované) hrany.
Zkoumání her na orientovaných grafech nám umožní o jednotlivých stavech hry říci více než jen to, jestli jde o P-stav nebo N-stav.

Už při předchozím uvažování o kombinatorických hrách bylo vidět, že prováděné myšlenky se dají docela dobře reprezentovat pomocí tzv. **orientovaných grafů**, kde jednotlivé stavy hry jsou reprezentovány vrcholy a tahy mezi těmito stavy tvoří (orientované) hrany.
Zkoumání her na orientovaných grafech nám umožní o jednotlivých stavech hry říci více než jen to, jestli jde o P-stav nebo N-stav.

Definice

Orientovaný graf je dvojice $G = (V, F)$, kde V je neprázdná množina vrcholů (stavů) a F je zobrazení, které každému vrcholu $v \in V$ přiřadí podmnožinu $F(v) \subseteq V$. Pro dané v je $F(v)$ množinou následníků v, tj. vrcholů, do nichž se lze dostat jedním tahem z v. Je-li $F(v) = \emptyset$, nazývá se stav v koncový.

Už při předchozím uvažování o kombinatorických hrách bylo vidět, že prováděné myšlenky se dají docela dobře reprezentovat pomocí tzv. **orientovaných grafů**, kde jednotlivé stavy hry jsou reprezentovány vrcholy a tahy mezi těmito stavy tvoří (orientované) hrany.
Zkoumání her na orientovaných grafech nám umožní o jednotlivých stavech hry říci více než jen to, jestli jde o P-stav nebo N-stav.

Definice

Orientovaný graf je dvojice $G = (V, F)$, kde V je neprázdná množina vrcholů (stavů) a F je zobrazení, které každému vrcholu $v \in V$ přiřadí podmnožinu $F(v) \subseteq V$. Pro dané v je $F(v)$ množinou následníků v, tj. vrcholů, do nichž se lze dostat jedním tahem z v. Je-li $F(v) = \emptyset$, nazývá se stav v koncový.
Hra na grafu G má následující pravidla:

- 1. hráč začíná v předem určeném stavu v_0 a hráči se ve svých tazích střídají.
- Ve stavu v volí hráč, který je na tahu, další stav z množiny $F(v)$.
- Prohrává hráč, který je na tahu ve stavu v, kde $F(v) = \emptyset$.

Sprague-Grundyho funkce

Grafové hry mohou být zkoumány analogicky jako Nim prostřednictvím P- a N-stavů. Ukážeme si ale i jiný, obecnější postup pomocí tzv. Sprague-Grundyho funkce.

Sprague-Grundyho funkce

Grafové hry mohou být zkoumány analogicky jako Nim prostřednictvím P- a N-stavů. Ukážeme si ale i jiný, obecnější postup pomocí tzv. Sprague-Grundyho funkce.

Definice (SG-funkce, SG-hodnota)

Sprague-Grundyho funkce grafu $G = (V, F)$ je funkce $g : V \to \mathbb{N}_0$ definovaná rekurzívně předpisem

$$g(v) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : n \neq g(u) \text{ pro všechna } u \in F(v)\}.$$

Alternativně, s využitím funkce mex (*minimal excludant*=nejmenší vyloučený; výsledkem je nejmenší nezáporné celé číslo neobsažené v argumentu funkce) můžeme úsporněji psát

$$g(v) = \mathrm{mex}\{g(u) : u \in F(v)\}.$$

Analýza her pomocí SG-funkce

Ukážeme, že P-stavy jsou právě stavy s SG-hodnotou 0.

Krok 1 Každý koncový stav má hodnotu SG-funkce rovnou 0.

Krok 2 Je-li $g(v) = 0$, pak pro každé $u \in F(v)$ platí $g(u) > 0$.

Krok 3 Je-li $g(v) > 0$, pak nutně existuje $u \in F(v)$, pro něž platí $g(u) = 0$.

Analýza her pomocí SG-funkce

Ukážeme, že P-stavy jsou právě stavy s SG-hodnotou 0.

- **Krok 1** Každý koncový stav má hodnotu SG-funkce rovnou 0.
- **Krok 2** Je-li $g(v) = 0$, pak pro každé $u \in F(v)$ platí $g(u) > 0$.
- **Krok 3** Je-li $g(v) > 0$, pak nutně existuje $u \in F(v)$, pro něž platí $g(u) = 0$.

Zdá se, že pojem SG-funkce je ekvivalentní analýze P- a N-stavů, ale brzy si ukážeme, že konkrétní hodnota SG-funkce je významnou přidanou informací.

Analýza her pomocí SG-funkce

Ukážeme, že P-stavy jsou právě stavy s SG-hodnotou 0.

Krok 1 Každý koncový stav má hodnotu SG-funkce rovnou 0.

Krok 2 Je-li $g(v) = 0$, pak pro každé $u \in F(v)$ platí $g(u) > 0$.

Krok 3 Je-li $g(v) > 0$, pak nutně existuje $u \in F(v)$, pro něž platí $g(u) = 0$.

Zdá se, že pojem SG-funkce je ekvivalentní analýze P- a N-stavů, ale brzy si ukážeme, že konkrétní hodnota SG-funkce je významnou přidanou informací.

Příklad

Určíme SG-hodnotu stavů v naší jednoduché odečítací hře (21 kamenů, odebíráme 1,2 nebo 3).

Analýza her pomocí SG-funkce

Ukážeme, že P-stavy jsou právě stavy s SG-hodnotou 0.

- **Krok 1** Každý koncový stav má hodnotu SG-funkce rovnou 0.
- **Krok 2** Je-li $g(v) = 0$, pak pro každé $u \in F(v)$ platí $g(u) > 0$.
- **Krok 3** Je-li $g(v) > 0$, pak nutně existuje $u \in F(v)$, pro něž platí $g(u) = 0$.

Zdá se, že pojem SG-funkce je ekvivalentní analýze P- a N-stavů, ale brzy si ukážeme, že konkrétní hodnota SG-funkce je významnou přidanou informací.

Příklad

Určíme SG-hodnotu stavů v naší jednoduché odečítací hře (21 kamenů, odebíráme 1,2 nebo 3).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Tj. $g(x) = x \mod 4$.

Další příklady her

Wythoffova hra

Hráči sedící na stejné straně šachovnice střídavě táhnou s dámou, táhnout mohou pouze ve sloupci dolů, v řadě doleva nebo diagonálně šikmo vlevo dolů. Hráč, který táhne poslední vyhrává. Hru si můžete zahrát na `http://www.chlond.demon.co.uk/Queen.html` (lokálně zde).

Další příklady her

Wythoffova hra

Hráči sedící na stejné straně šachovnice střídavě táhnou s dámou, táhnout mohou pouze ve sloupci dolů, v řadě doleva nebo diagonálně šikmo vlevo dolů. Hráč, který táhne poslední vyhrává. Hru si můžete zahrát na `http://www.chlond.demon.co.uk/Queen.html` (lokálně zde).

Dvourozměrný Nim

Hraje se na (konečné) čtvercové síti v prvním kvadrantu, kde je rozmístěn konečný počet kamenů (i více na jednom poli). Tah spočívá v přesunu jednoho kamene buď vlevo ve stejném řádku nebo na libovolné pole v některém nižším řádku.

Další příklady her

Wythoffova hra

Hráči sedící na stejné straně šachovnice střídavě táhnou s dámou, táhnout mohou pouze ve sloupci dolů, v řadě doleva nebo diagonálně šikmo vlevo dolů. Hráč, který táhne poslední vyhrává. Hru si můžete zahrát na `http://www.chlond.demon.co.uk/Queen.html` (lokálně zde).

Dvourozměrný Nim

Hraje se na (konečné) čtvercové síti v prvním kvadrantu, kde je rozmístěn konečný počet kamenů (i více na jednom poli). Tah spočívá v přesunu jednoho kamene buď vlevo ve stejném řádku nebo na libovolné pole v některém nižším řádku.

Zkuste si spočítat Sprague-Grundyho funkce pro tyto hry.

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Přirozeným způsobem, jak z kombinatorických her vytvářet hry složitější, je tzv. **(disjunktní) sčítání her**. Tah hráče v součtu daných her spočívá v tom, že zvolí jednu z daných her a v ní učiní svůj tah. Jako dobrá ilustrace tohoto pojmu poslouží klasický tříhromádkový Nim, který je součtem 3 (triviálních) jednohromádkových Nimů.

Přirozeným způsobem, jak z kombinatorických her vytvářet hry složitější, je tzv. **(disjunktní) sčítání her**. Tah hráče v součtu daných her spočívá v tom, že zvolí jednu z daných her a v ní učiní svůj tah. Jako dobrá ilustrace tohoto pojmu poslouží klasický tříhromádkový Nim, který je součtem 3 (triviálních) jednohromádkových Nimů.

Definice (Součet grafových her)

Mějme n grafů $G_1 = (V_1, F_1), \dots, G_n = (V_n, F_n)$. **Součtem** $G = G_1 + \cdots + G_n$ grafů $G_1, \dots, G_n$ nazveme graf $G = (V, F)$, kde $V = V_1 \times V_2 \times \cdots V_n$ je množina všech n-tic $(v_1, \dots, v_n)$, kde $v_i \in V_i$ a pro vrchol $v = (v_1, \dots, v_n)$ je množina následníků

$$
\begin{aligned}
F(v) = & F_1(v_1) \times \{v_2\} \times \cdots \times \{v_n\} \cup \\
& \cup \{v_1\} \times F_2(v_2) \times \cdots \times \{v_n\} \cup \\
& \dots \\
& \cup \{v_1\} \times \{v_2\} \times \cdots \times F_n(v_n)
\end{aligned}
$$

Následující věta je významným zobecněním Boutonovy věty – ukazuje, že SG-hodnotu stavu v součtu grafů dostaneme jako nim-součet SG-hodnot jednotlivých komponent.

Věta (Sprague, 1936; Grundy, 1939)

Mějme grafy $G_1, \dots, G_n$ s SG-funkcemi $g_1, \dots, g_n$. Pak graf $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ má Sprague-Grundyho funkci $g(v_1, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus \cdots \oplus g_n(v_n)$.

Následující věta je významným zobecněním Boutonovy věty – ukazuje, že SG-hodnotu stavu v součtu grafů dostaneme jako nim-součet SG-hodnot jednotlivých komponent.

Věta (Sprague, 1936; Grundy, 1939)

Mějme grafy $G_1, \dots, G_n$ s SG-funkcemi $g_1, \dots, g_n$. Pak graf $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ má Sprague-Grundyho funkci $g(v_1, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus \cdots \oplus g_n(v_n)$.

Důkaz této věty je podobný důkazu Boutonovy věty (zkuste sami!).

Následující věta je významným zobecněním Boutonovy věty – ukazuje, že SG-hodnotu stavu v součtu grafů dostaneme jako nim-součet SG-hodnot jednotlivých komponent.

Věta (Sprague, 1936; Grundy, 1939)

Mějme grafy $G_1, \dots, G_n$ *s SG-funkcemi* $g_1, \dots, g_n$. *Pak graf* $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ *má Sprague-Grundyho funkci* $g(v_1, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus \cdots \oplus g_n(v_n)$.

Důkaz této věty je podobný důkazu Boutonovy věty (zkuste sami!).

Poznámka

Důležitým důsledkem této věty je skutečnost, že každá nestranná kombinatorická hra se jako sčítanec v součtu her chová stejně jako jako hra Nim s jednou hromádkou velikosti rovné SG-funkci této hry.

Jinými slovy: *každá nestranná hra je ekvivalentní Nimu.*

Příklad (Součet odečítacích her)

Označme $G(m)$ tzv. *odečítací hru* (zobecnění naší úvodní jednoduché hry, kdy lze z hromádky odebírat 1 až m kamenů).[a]

Snadno je vidět, že $G(m)$ má SG-funkci rovnou $g_m(v) = v \mod m+1$.

Uvažme hru $G = G(3) + G(5) + G(7)$ s počátečním stavem $(9, 10, 14)$.

Příklad (Součet odečítacích her)

Označme $G(m)$ tzv. *odečítací hru* (zobecnění naší úvodní jednoduché hry, kdy lze z hromádky odebírat 1 až m kamenů).[a]
Snadno je vidět, že $G(m)$ má SG-funkci rovnou $g_m(v) = v \mod m+1$.
Uvažme hru $G = G(3) + G(5) + G(7)$ s počátečním stavem $(9, 10, 14)$.

Snadno vypočteme SG-funkci
$g((9, 10, 14)) = g_3(9) \oplus g_5(10) \oplus g_7(14) = 1 \oplus 4 \oplus 6 = 3.$

Počáteční stav je tedy N-stavem.

[a] Obecně lze v odečítacích hrách odebírat počet kamenů, který je prvkem množiny S; zde $S = \{1, \ldots, m\}$.

Příklad (Součet odečítacích her – pokr.)

Podobně jako v Nimu určíme vítězné tahy podle nejlevějších jedniček v binárním zápisu, kterých je lichý počet:

$$
\begin{array}{rccc}
g_3(9) = 1 = & 0 & 0 & 1 \\
g_5(10) = 4 = & 1 & 0 & 0 \\
g_7(14) = 6 = & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Příklad (Součet odečítacích her – pokr.)

Podobně jako v Nimu určíme vítězné tahy podle nejlevějších jedniček v binárním zápisu, kterých je lichý počet:

$$\begin{array}{rccc} g_3(9) = 1 = & 0 & 0 & 1 \\ g_5(10) = 4 = & 1 & 0 & 0 \\ 5 = & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{1} \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Potřebnou hodnotu 5 dosáhneme odebráním jednoho kamene ze třetí hromádky, neboť pak $g_7(13) = 5$.

Příklad (Součet odečítacích her – pokr.)

Podobně jako v Nimu určíme vítězné tahy podle nejlevějších jedniček v binárním zápisu, kterých je lichý počet:

$$
\begin{array}{rccc}
g_3(9) = 1 = & 0 & 0 & 1 \\
g_5(10) = 4 = & 1 & 0 & 0 \\
5 = & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{1} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Potřebnou hodnotu 5 dosáhneme odebráním jednoho kamene ze třetí hromádky, neboť pak $g_7(13) = 5$.

Je zde ovšem oproti Nimu jeden významný rozdíl – tento optimální tah není jediný, protože SG-funkce nemusí být nutně monotónní (tj. se zmenšující hodnotou argumentu se nemusí nutně zmenšovat hodnota SG-funkce) a můžeme tak *generovat* jedničky i na vyšších místech.

Příklad (Součet odečítacích her – pokr.)

Podobně jako v Nimu určíme vítězné tahy podle nejlevějších jedniček v binárním zápisu, kterých je lichý počet:

$$\begin{array}{rrrr} g_3(9) = 1 = & 0 & 0 & 1 \\ g_5(10) = 4 = & 1 & 0 & 0 \\ 5 = & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{1} \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Potřebnou hodnotu 5 dosáhneme odebráním jednoho kamene ze třetí hromádky, neboť pak $g_7(13) = 5$.
Je zde ovšem oproti Nimu jeden významný rozdíl – tento optimální tah není jediný, protože SG-funkce nemusí být nutně monotónní (tj. se zmenšující hodnotou argumentu se nemusí nutně zmenšovat hodnota SG-funkce) a můžeme tak *generovat* jedničky i na vyšších místech.
Např. zde je dalším vítězným tahem odebrání 3 kamenů z první hromádky, neboť pak $g_3(6) = 2$ a $2 \oplus 4 \oplus 6 = 0$. Žádný tah v druhé hromádce ovšem již vítězný není.

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Laskerův Nim

Úprava Nimu na hru typu *Vezmi a rozděl* je dílem E. Laskera, šachového mistra světa v letech 1894–1921.

V této hře je možné zahrát některý z tahů:

- klasické odebrání libovolného počtu kamenů z některé hromádky,
- rozdělení hromádky s alespoň dvěma kameny na dvě neprázdné hromádky.

Laskerův Nim

Úprava Nimu na hru typu *Vezmi a rozděl* je dílem E. Laskera, šachového mistra světa v letech 1894–1921.

V této hře je možné zahrát některý z tahů:

- klasické odebrání libovolného počtu kamenů z některé hromádky,
- rozdělení hromádky s alespoň dvěma kameny na dvě neprázdné hromádky.

Poměrně snadno lze indukcí dokázat, že SG-funkce pro Laskerův Nim s jednou hromádkou má tvar
$g(4k+1) = 4k+1, g(4k+2) = 4k+2, g(4k+3) = 4k+4, g(4k+4) = 4k+3$ pro $k \geq 0$.

Laskerův Nim

Úprava Nimu na hru typu *Vezmi a rozděl* je dílem E. Laskera, šachového mistra světa v letech 1894–1921.

V této hře je možné zahrát některý z tahů:

- klasické odebrání libovolného počtu kamenů z některé hromádky,
- rozdělení hromádky s alespoň dvěma kameny na dvě neprázdné hromádky.

Poměrně snadno lze indukcí dokázat, že SG-funkce pro Laskerův Nim s jednou hromádkou má tvar

$g(4k+1) = 4k+1, g(4k+2) = 4k+2, g(4k+3) = 4k+4, g(4k+4) = 4k+3$ pro $k \geq 0$.

Příklad

Vyzkoušejte si Laskerův Nim s úvodním stavem $(2, 5, 7)$.

Kayles

Hra Kayles byla zmíněn H. E. Dudeneyem v *The Canterbury puzzles* (1958). Dva kuželkáři stojí před řadou 13 kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak kvalitní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Kayles

Hra Kayles byla zmíněn H. E. Dudeneyem v *The Canterbury puzzles* (1958). Dva kuželkáři stojí před řadou 13 kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak kvalitní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Tato hra se dá popsat pomocí odebírání kamenů následovně: tahem je odebrání jednoho nebo dvou kamenů z jedné hromádky, kterou je poté možno rozdělit na dvě neprázdné hromádky.

Hru si můžete zahrát na
`http://www.chlond.demon.co.uk/Kayles.html` (lokálně zde).

Kayles

Hra Kayles byla zmíněn H. E. Dudeneyem v *The Canterbury puzzles* (1958). Dva kuželkáři stojí před řadou 13 kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak kvalitní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.
Tato hra se dá popsat pomocí odebírání kamenů následovně: tahem je odebrání jednoho nebo dvou kamenů z jedné hromádky, kterou je poté možno rozdělit na dvě neprázdné hromádky.
Hru si můžete zahrát na
`http://www.chlond.demon.co.uk/Kayles.html` (lokálně zde).

Najděme SG-funkci pro hru Kayles, kde úvodní stav je hromádka s n kameny. Jediný koncový stav je prázdná hromádka, tedy $g(0) = 0$. Snadno $g(1) = 1$ a $g(2) = 2$. Z hromádky se třemi kameny můžeme odebrat buď 1 nebo 2 kameny (SG:1,2) nebo odebrat jeden kámen a rozdělit na dvě hromádky (SG:0).

Kayles – řešení

Tímto postupem dopočítáme tabulku (x je číslo řádku, y sloupce)

$g(12x+y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	**0**	1	2	**3**	1	4	**3**	2	1	**4**	2	**6**
1	4	1	2	**7**	1	4	**3**	2	1	**4**	**6**	7
2	4	1	2	8	**5**	4	7	2	1	8	**6**	7
3	4	1	2	**3**	1	4	7	2	1	8	2	7
4	4	1	2	8	1	4	7	2	1	**4**	2	7
5	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	**6**	7
6	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Kayles – řešení

Tímto postupem dopočítáme tabulku (x je číslo řádku, y sloupce)

$g(12x+y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	**0**	1	2	**3**	1	4	**3**	2	1	**4**	2	**6**
1	4	1	2	**7**	1	4	**3**	2	1	**4**	**6**	7
2	4	1	2	8	**5**	4	7	2	1	8	**6**	7
3	4	1	2	**3**	1	4	7	2	1	8	2	7
4	4	1	2	8	1	4	7	2	1	**4**	2	7
5	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	**6**	7
6	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Od hodnoty $n = 72$ je dále funkce g periodická s periodou 12, tučně jsou vyznačeny výjimky oproti hodnotám v posledním řádku.

Kayles – řešení

Tímto postupem dopočítáme tabulku (x je číslo řádku, y sloupce)

$g(12x+y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	**0**	1	2	**3**	1	4	**3**	2	1	**4**	2	**6**
1	4	1	2	**7**	1	4	**3**	2	1	**4**	**6**	7
2	4	1	2	8	**5**	4	7	2	1	8	**6**	7
3	4	1	2	**3**	1	4	7	2	1	8	2	7
4	4	1	2	8	1	4	7	2	1	**4**	2	7
5	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	**6**	7
6	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Od hodnoty $n = 72$ je dále funkce g periodická s periodou 12, tučně jsou vyznačeny výjimky oproti hodnotám v posledním řádku.

Příklad

Vyřešte úvodní Dudeneyovu úlohu s dvěma hromádkami $(1, 11)$.

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Hry s otáčením mincí zobecňují dříve uvedenou hru *Otáčení želv*.
V řadě je konečně mnoho mincí otočených vzhůru lícovou či rubovou stranou. Tah spočívá v otočení mincí z nějaké sady podle pravidel konkrétní hry. **Vždy však musí být nejpravější otáčená mince otočena z lícové na rubovou stranu** (podmínka konečnosti hry). To, které mince jsou otáčeny, smí záviset pouze na pozici nejpravější otáčené mince, nikoli již na jiných pozicích, předchozích tazích apod.

Hry s otáčením mincí zobecňují dříve uvedenou hru *Otáčení želv*. V řadě je konečně mnoho mincí otočených vzhůru lícovou či rubovou stranou. Tah spočívá v otočení mincí z nějaké sady podle pravidel konkrétní hry. **Vždy však musí být nejpravější otáčená mince otočena z lícové na rubovou stranu** (podmínka konečnosti hry). To, které mince jsou otáčeny, smí záviset pouze na pozici nejpravější otáčené mince, nikoli již na jiných pozicích, předchozích tazích apod.
Pro všechny takovéto hry platí zřejmě obdobný rozklad jako pro *Otáčení želv* – stav s k líci na pozicích $v_1, \dots, v_k$ je součtem k her, kde v každé hře (číslo i) je právě jeden líc a to na pozici v_i.

Hry s otáčením mincí zobecňují dříve uvedenou hru *Otáčení želv*.
V řadě je konečně mnoho mincí otočených vzhůru lícovou či rubovou stranou. Tah spočívá v otočení mincí z nějaké sady podle pravidel konkrétní hry. **Vždy však musí být nejpravější otáčená mince otočena z lícové na rubovou stranu** (podmínka konečnosti hry). To, které mince jsou otáčeny, smí záviset pouze na pozici nejpravější otáčené mince, nikoli již na jiných pozicích, předchozích tazích apod.
Pro všechny takovéto hry platí zřejmě obdobný rozklad jako pro *Otáčení želv* – stav s k líci na pozicích $v_1, \dots, v_k$ je součtem k her, kde v každé hře (číslo i) je právě jeden líc a to na pozici v_i.
Např. hra `RLRRLRL` je součtem her `RL`, `RRRRL` a `RRRRRRL`, proto pro určení SG-hodnoty obecné hry stačí určit SG-hodnoty her s právě jedním lícem.

Reprezentace her pomocí otáčení mincí

Podobně jako lze hry reprezentovat pomocí Nimu, lze často hry reprezentovat i pomocí otáčení mincí.

Reprezentace her pomocí otáčení mincí

Podobně jako lze hry reprezentovat pomocí Nimu, lze často hry reprezentovat i pomocí otáčení mincí.
U některých her je výhodnější reprezentace pomocí Nimu, u jiných je tomu naopak.

Příklad (Jednoduchá úvodní odečítací hra)

Mějme odečítací hru s $S = \{1, 2, 3\}$. Hru reprezentujeme pomocí n mincí očíslovaných od 1 do n, v každém tahu musí být otočena mince na pozici x z lícové na rubovou stranu a dále otočena mince na pozici $x - 1, x - 2$ nebo $x - 3$ (pokud $x > 3$).
Zřejmě má líc na pozici 1 SG-hodnotu 1, na pozici 2 hodnotu 2, atd. Řada mincí s několika hlavami pak odpovídá několika hromádkám kamenů.

Reprezentace her pomocí otáčení mincí

Podobně jako lze hry reprezentovat pomocí Nimu, lze často hry reprezentovat i pomocí otáčení mincí.
U některých her je výhodnější reprezentace pomocí Nimu, u jiných je tomu naopak.

Příklad (Jednoduchá úvodní odečítací hra)

Mějme odečítací hru s $S = \{1, 2, 3\}$. Hru reprezentujeme pomocí n mincí očíslovaných od 1 do n, v každém tahu musí být otočena mince na pozici x z lícové na rubovou stranu a dále otočena mince na pozici $x-1, x-2$ nebo $x-3$ (pokud $x > 3$).
Zřejmě má líc na pozici 1 SG-hodnotu 1, na pozici 2 hodnotu 2, atd. Řada mincí s několika hlavami pak odpovídá několika hromádkám kamenů.

Příklad (Dvojčata)

Dvojčata je velmi podobná hra převracení želv, kdy musíme otočit právě dvě mince (s obvyklou konvencí). Zde je vhodné číslovat pozice mincí od 0 – dostáváme tak $g(x) = x$ (tedy Twins jsou opět totéž, co Nim).

Příklad (Falešné želvy)

Tato hra má prostřednictvím mincí přirozenější reprezantaci než jako hra s hromádkami kamenů. Je podobná hře *Převracení želv*, máme ale povoleno otočit 1, 2 nebo 3 mince (jako obvykle s nejpravější ve směru líc $\rightarrow$ rub).

Příklad (Falešné želvy)

Tato hra má prostřednictvím mincí přirozenější reprezantaci než jako hra s hromádkami kamenů. Je podobná hře *Převracení želv*, máme ale povoleno otočit 1, 2 nebo 3 mince (jako obvykle s nejpravější ve směru líc $\to$ rub).

V tomto případě se ukazuje jako výhodnější pro výpočet SG-funkce číslovat pozice mincí od 0 místo od 1. Obvyklým způsobem vypočteme

pozice x :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$:	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19	21

Jestli jde funkci $g(x)$ popsat jiným obvyklým způsobem, je asi obtížné na první pohled odhalit (kromě toho, že $g(x)$ je vždy rovno buď $2x$ nebo $2x + 1$).

Příklad (Falešné želvy)

Tato hra má prostřednictvím mincí přirozenější reprezantaci než jako hra s hromádkami kamenů. Je podobná hře *Převracení želv*, máme ale povoleno otočit 1, 2 nebo 3 mince (jako obvykle s nejpravější ve směru líc $\to$ rub).

V tomto případě se ukazuje jako výhodnější pro výpočet SG-funkce číslovat pozice mincí od 0 místo od 1. Obvyklým způsobem vypočteme

pozice x :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$:	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19	21

Jestli jde funkci $g(x)$ popsat jiným obvyklým způsobem, je asi obtížné na první pohled odhalit (kromě toho, že $g(x)$ je vždy rovno buď $2x$ nebo $2x + 1$).

Odpověď (opět) závisí na binárním zápisu čísel – číslo nazveme *odious* (hnusné), pokud je počet 1 v jeho binárním zápisu lichý, je-li počet jedniček sudý nazveme ho *evil* (odporné).

Lze poměrně snadno (indukcí) dokázat, že $g(x) = 2x + 1$, pokud je $2x$ *evil*, a rovno $2x$, pokud je *odious*. Jinými slovy, posloupnost $g(x)$ je tvořena právě všemi *odious* čísly.
Samotný důkaz je založen na faktu, že

$$\begin{aligned} \mathit{evil} \oplus \mathit{evil} = \mathit{odious} \oplus \mathit{odious} = \mathit{evil} \\ \mathit{odious} \oplus \mathit{evil} = \mathit{evil} \oplus \mathit{odious} = \mathit{odious}. \end{aligned}$$

Lze poměrně snadno (indukcí) dokázat, že $g(x) = 2x + 1$, pokud je $2x$ *evil*, a rovno $2x$, pokud je *odious*. Jinými slovy, posloupnost $g(x)$ je tvořena právě všemi *odious* čísly.
Samotný důkaz je založen na faktu, že

$$\begin{aligned} \textit{evil} \oplus \textit{evil} = \textit{odious} \oplus \textit{odious} = \textit{evil} \\ \textit{odious} \oplus \textit{evil} = \textit{evil} \oplus \textit{odious} = \textit{odious}. \end{aligned}$$

Pokud máme nyní líce na pozicích $x_1, \ldots, x_n$, pak, jde-li o P-pozici, (tj. $g(x_1) \oplus \cdots \oplus g(x_n)$), pak nutně n musí být sudé, a navíc $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$ (neboť $g(x) = 2x$ s *občasným* přidáním 1).

P-pozice ve *Falešných želvách* jsou právě P-pozice v Nimu, které mají sudý počet hromádek.

Pravítko

Tato hra má velmi jednoduchou reprezentaci pomocí otáčení mincí. Tah spočívá v tom, že libovolný počet sousedících mincí může být otočen. Pokud číslujeme pozice od 1, splňuje SG-funkce vztah

$$g(n) = \operatorname{mex}\{0, g(n-1), g(n-1) \oplus g(n-2), \dots, g(n-1) \oplus \cdots \oplus g(1)\}.$$

Pravítko

Tato hra má velmi jednoduchou reprezentaci pomocí otáčení mincí. Tah spočívá v tom, že libovolný počet sousedících mincí může být otočen. Pokud číslujeme pozice od 1, splňuje SG-funkce vztah

$$g(n) = \text{mex}\{0, g(n-1), g(n-1) \oplus g(n-2), \dots, g(n-1) \oplus \cdots \oplus g(1)\}.$$

Z tohoto vztahu lze snadno odvodit hodnoty SG-funkce:

pozice x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(x)$:	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2

tj. $g(x)$ je nejvyšší mocnina 2 dělící n.

Název hry vychází z délky značek na pravítku.

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Otáčení rohů

Zobecníme nyní otáčení mincí přidáním dalšího rozměru. Souřadnice mincí budeme číslovat od 0 a znázorňovat ve 4. kvadrantu. Podmínku, že nejpravější mince musí být otočena z líce na rub nahradíme toutéž podmínkou pro minci nejvíce na *jihovýchod* – označíme-li její souřadnice (x, y) pak každá otáčená mince musí být v obdélníku
$\{(a, b) : 0 \leq a \leq x; 0 \leq b \leq y\}$

Otáčení rohů

Tah v této hře spočívá v otočení čtyř **různých** mincí v rohu nějakého pravoúhelníku.
Rekurentní vztah pro SG-funkci se učí snadno:

$$g(x, y) = \text{mex}\{g(x, b) \oplus g(a, y) \oplus g(a, b) : 0 \leq a < x; 0 \leq b < y\},$$

s počátečními podmínkami $g(x, 0) = g(0, y) = 0$ pro všechna x, y. Zřejmě rovněž $g(x, 1) = g(1, x) = 1$ (další reprezentace klasického jednohromádkového Nimu).

Následující tabulka udává hodnoty SG-funkce pro hru *Otáčení rohů* vypočtené pomocí uvedeného rekurzivního vztahu:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7
3	0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9
4	0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5
5	0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11
6	0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2
7	0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12
8	0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10
9	0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4
10	0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13
11	0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3
12	0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15
13	0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1
14	0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8
15	0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6

Jako ilustraci spočítejme $g(4,4)$ prostřednictvím rekurentního vzorce – z této pozice je 16 možných tahů (10 až na symetrii), po výpočtu jejích SG-hodnot dostaneme $g(4,4) = \text{mex}\{0,4,8,12,1,14,11,3,5,2\} = 6$.

Jako ilustraci spočítejme $g(4,4)$ prostřednictvím rekurentního vzorce – z této pozice je 16 možných tahů (10 až na symetrii), po výpočtu jejích SG-hodnot dostaneme $g(4,4) = \text{mex}\{0,4,8,12,1,14,11,3,5,2\} = 6$. Stav

R	R	R	R	R
R	R	R	L	R
R	R	R	R	R
R	R	L	R	R
R	R	R	R	L

má SG-hodnotu $3 \oplus 1 \oplus 6 = 4$ a je tedy N-stavem. Vítězný tah musí ze 6 udělat 2 – jedinou možností je otočit mince na pozicích $(3,3), (3,4), (4,3)$ a $(4,4)$.

Nim-součin

Čísla v tabulce SG-funkce u hry *Otáčení rohů* vypadala dosti náhodně, ale ve skutečnosti lze pomocí nich velmi vhodně definovat tzv. **Nim-součin** s velmi pěknými vlastnostmi. Nadále budeme pro hodnotu $g(x, y)$ používat označení $x \otimes y$.

Nim-součin

Čísla v tabulce SG-funkce u hry *Otáčení rohů* vypadala dosti náhodně, ale ve skutečnosti lze pomocí nich velmi vhodně definovat tzv. **Nim-součin** s velmi pěknými vlastnostmi. Nadále budeme pro hodnotu $g(x, y)$ používat označení $x \otimes y$.

Ihned je vidět, že $0 \otimes x = 0$ a $x \otimes 0 = 0$ a dále, že $1 \otimes x = x$ a $x \otimes 1 = x$ (tedy 0 a 1 se chovají obdobně jako u běžného násobení). Zřejmě je rovněž operace $\otimes$ komutativní (tj. $x \otimes y = y \times x$).

Nim-součin

Čísla v tabulce SG-funkce u hry *Otáčení rohů* vypadala dosti náhodně, ale ve skutečnosti lze pomocí nich velmi vhodně definovat tzv. **Nim-součin** s velmi pěknými vlastnostmi. Nadále budeme pro hodnotu $g(x, y)$ používat označení $x \otimes y$.

Ihned je vidět, že $0 \otimes x = 0$ a $x \otimes 0 = 0$ a dále, že $1 \otimes x = x$ a $x \otimes 1 = x$ (tedy 0 a 1 se chovají obdobně jako u běžného násobení). Zřejmě je rovněž operace $\otimes$ komutativní (tj. $x \otimes y = y \times x$).

Méně zřejmá je již asociativita Nim-součinu

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z).$$

Nim-součin

Čísla v tabulce SG-funkce u hry *Otáčení rohů* vypadala dosti náhodně, ale ve skutečnosti lze pomocí nich velmi vhodně definovat tzv. **Nim-součin** s velmi pěknými vlastnostmi. Nadále budeme pro hodnotu $g(x, y)$ používat označení $x \otimes y$.
Ihned je vidět, že $0 \otimes x = 0$ a $x \otimes 0 = 0$ a dále, že $1 \otimes x = x$ a $x \otimes 1 = x$ (tedy 0 a 1 se chovají obdobně jako u běžného násobení). Zřejmě je rovněž operace $\otimes$ komutativní (tj. $x \otimes y = y \times x$).
Méně zřejmá je již asociativita Nim-součinu

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z).$$

Platí ale rovněž i distributivita Nim-součinu vzhledem k Nim-součtu:

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).$$

Neméně významným faktem je, že každé nenulové číslo má Nim-inverzi (tj. pro každé nenulové x existuje x' tak, že $x \otimes x' = 1$). Označíme-li jako $\oslash$ nim-dělení, můžeme např. psát $1 \oslash 2 = 3$ nebo $6 \oslash 5 = 9$.

Poznámka (Algebraická)

Množina nezáporných celých čísel $\mathbb{N}_0$ spolu s operacemi Nim-součtu a Nim-součinu tvoří tzv. těleso (obdoba $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ s klasickými operacemi $+, \cdot$, přitom ale $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ těleso netvoří).

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob definice Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým.

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob definice Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým. Ten vychází z následujících pravidel (pojmem Fermatova mocnina označujeme číslo 2^{2^n} pro $n \geq 1$):

1. Nim-součin Fermatovy mocniny s libovolným menším číslem je roven jejich běžnému součinu

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob definice Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým. Ten vychází z následujících pravidel (pojmem Fermatova mocnina označujeme číslo 2^{2^n} pro $n \geq 1$):

1. Nim-součin Fermatovy mocniny s libovolným menším číslem je roven jejich běžnému součinu
2. Nim-součin Fermatovy mocniny se sebou samotnou je roven běžnému součinu Fermatovy mocniny a $3/2$.

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob definice Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým. Ten vychází z následujících pravidel (pojmem Fermatova mocnina označujeme číslo 2^{2^n} pro $n \geq 1$):

1. Nim-součin Fermatovy mocniny s libovolným menším číslem je roven jejich běžnému součinu
2. Nim-součin Fermatovy mocniny se sebou samotnou je roven běžnému součinu Fermatovy mocniny a $3/2$.

Výpočet Nim-součinu

Podobně jako v některých předchozích případech se ukazuje, že rekurentní způsob definice Nim-součinu dvou čísel lze nahradit výpočtem přímým. Ten vychází z následujících pravidel (pojmem Fermatova mocnina označujeme číslo 2^{2^n} pro $n \geq 1$):

1. Nim-součin Fermatovy mocniny s libovolným menším číslem je roven jejich běžnému součinu
2. Nim-součin Fermatovy mocniny se sebou samotnou je roven běžnému součinu Fermatovy mocniny a 3/2.

$$\begin{aligned} 24 \otimes 17 &= (16 \oplus 8) \otimes (16 \oplus 1) = (16 \otimes 16) \oplus (16 \otimes 1) \oplus (8 \otimes 16) \oplus (8 \otimes 1) = \\ &= 24 \oplus 16 \oplus 126 \oplus 8 = 128 \end{aligned}$$

V případě výpočtu $8 \otimes 8$ neumíme napsat 8 jako Nim-součet dvou jednodušších čísel, pomůžeme si proto zápisem $8 = 2 \otimes 4$.

$$\begin{aligned} 8 \otimes 8 &= (2 \otimes 4) \otimes (2 \otimes 4) = (2 \otimes 2 \otimes 4 \otimes 4) = 3 \otimes 6 = (2 \oplus 1) \otimes (4 \oplus 2) = \\ &= (2 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 2) = 8 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 2 = 13. \end{aligned}$$

Tartanové hry

Hra *Otáčení rohů* je příkladem her, jejichž řešení je možné určit pomocí Nim-součinu.

Definice

Jsou-li G a H hry s obracením mincí, pak *tartanová hra* $G \times H$ je dvourozměrná hra s obracením mincí, v níž jsou povolené tahy právě uspořádané dvojice povolených tahů z G a H.

Tak dostáváme *Otáčení rohů* jako součin *Dvojčata*$\times$ *Dvojčata*.

Tartanové hry

Hra *Otáčení rohů* je příkladem her, jejichž řešení je možné určit pomocí Nim-součinu.

Definice

Jsou-li G a H hry s obracením mincí, pak *tartanová hra* $G \times H$ je dvourozměrná hra s obracením mincí, v níž jsou povolené tahy právě uspořádané dvojice povolených tahů z G a H.

Tak dostáváme *Otáčení rohů* jako součin *Dvojčata*$\times$ *Dvojčata*.
Pro analýzu tartanových her je důležitá následující věta.

Věta

Má-li hra G_1 SG-funkci g_1 a hra G_2 SG-funkci g_2, pak má tartanová hra $G_1 \times G_2$ SG-funkci $g_1 \otimes g_2$, tj.

$$g(x, y) = g_1(x) \otimes g_2(y).$$

Koberec (otáčení bloku)

Hra *Koberec*, kdy je přípustným tahem otočení všech mincí v nějakém obdélníku (s obvyklou jihovýchodní konvencí), je vlastně součinem *Pravítko*×*Pravítko*, odkud taky plyne výpočet SG-funkce.
Tabulka SG-funkce je tak dána hodnotami SG-funkce *Pravítka* a Nim-součinem jejich hodnot:

1	1	2	1	4	1	2	1	8
1	1	2	1	4	1	2	1	8
2	2	3	2	8	2	3	2	12
1	1	2	1	4	1	2	1	8
4	4	8	4	6	4	8	4	11
1	1	2	1	4	1	2	1	8
2	2	3	2	8	2	3	2	12
1	1	2	1	4	1	2	1	8
8	8	12	8	11	8	12	8	13

Příklad

Podívejme se na starou známou pozici

R	R	R	R	R
R	R	R	L	R
R	R	R	R	R
R	R	L	R	R
R	R	R	R	L

jako na pozici ve hře *Koberec*.

Příklad

Podívejme se na starou známou pozici

$$\begin{array}{ccccc} R & R & R & R & R \\ R & R & R & L & R \\ R & R & R & R & R \\ R & R & L & R & R \\ R & R & R & R & L \end{array}$$

jako na pozici ve hře *Koberec*.

Podle předchozího spočítáme její SG-hodnotu $8 \oplus 4 \oplus 1 = 13$. Vítězný tah (otočení obdélníku $(1,1) - (2,4)$) změní hodnotu 8 na 5 a tedy celkový součet na 0.

Plán přednášky

1. Hry na odebírání kamenů
2. Nim
3. Hry na grafech
4. Součty her
5. Další hry řešitelné pomocí SG-funkce
   - Hry Take-and-Break
   - Otáčení mincí
   - Dvourozměrné otáčení mincí a nim-součin
6. Obecné kombinatorické hry

Kombinatorické hry

Jde o hry 2 hráčů, kde nyní povolíme, aby každý z nich měl jinou množinu možných tahů, hráče budeme označovat jako **L**eft a **R**ight.

Definice

1. Nechť L a R jsou množiny her. Pak uspořádaná dvojice $G = (L, R)$ je hra.
2. (Descending Game Condition) Neexistuje nekonečná posloupnost her $G^i = (L^i, R^i)$ s $G^{i+1} \in L^i \cup R^i$.

Jde o hry 2 hráčů, kde nyní povolíme, aby každý z nich měl jinou množinu možných tahů, hráče budeme označovat jako **L**eft a **R**ight.

Definice

1. Nechť L a R jsou množiny her. Pak uspořádaná dvojice $G = (L, R)$ je hra.
2. (Descending Game Condition) Neexistuje nekonečná posloupnost her $G^i = (L^i, R^i)$ s $G^{i+1} \in L^i \cup R^i$.

Definice

- Prvky L, R hry $G = (L, R)$ se nazývají levé, resp. pravé možnosti hry G.
- Pozicemi hry G je G a libovolná pozice některé možnosti hry G.

Příklad

- Hra **nula**: $0 = (\{\}, \{\}) = \{|\}$.
- $1 = (\{0\}, \{\}) = \{0|\}$.
- $-1 = (\{\}, \{0\}) = \{|0\}$.
- $* = (\{0\}, \{0\}) = \{0|0\}$.
- $\frac{1}{2} = \{0|1\}$.

Příklad

- Hra **nula**: $0 = (\{\}, \{\}) = \{|\}$.
- $1 = (\{0\}, \{\}) = \{0|\}$.
- $-1 = (\{\}, \{0\}) = \{|0\}$.
- $* = (\{0\}, \{0\}) = \{0|0\}$.
- $\frac{1}{2} = \{0|1\}$.

Věta (Conway induction)

Nechť P je vlastnost (predikát) některých her, splňující podmínku: „mají-li všechny levé i pravé možnosti hry G vlastnost P, má tuto vlastnost i hra G“
Pak každá hra má vlastnost P.

Příklad

- Hra **nula**: $0 = (\{\}, \{\}) = \{|\}$.
- $1 = (\{0\}, \{\}) = \{0|\}$.
- $-1 = (\{\}, \{0\}) = \{|0\}$.
- $* = (\{0\}, \{0\}) = \{0|0\}$.
- $\frac{1}{2} = \{0|1\}$.

Věta (Conway induction)

Nechť P je vlastnost (predikát) některých her, splňující podmínku: „mají-li všechny levé i pravé možnosti hry G vlastnost P, má tuto vlastnost i hra G“
Pak každá hra má vlastnost P.

Důsledek

Conwayova indukce implikuje Descending Game Condition.

Vítězství ve hře

Každá hra bude patřit do jedné z následujících tříd:

1. L vítězí bez ohledu na to, kdo začíná. ($G > 0$)
2. R vítězí bez ohledu na to, kdo začíná. ($G < 0$)
3. První hráč vítězí. ($G \| 0$)
4. Druhý hráč vítězí. ($G = 0$)

Vítězství ve hře

Každá hra bude patřit do jedné z následujících tříd:

1. L vítězí bez ohledu na to, kdo začíná. ($G > 0$)
2. R vítězí bez ohledu na to, kdo začíná. ($G < 0$)
3. První hráč vítězí. ($G \| 0$)
4. Druhý hráč vítězí. ($G = 0$)

Definice (Uspořádání her)

- $G \geq 0$ pokud neexistuje pravá možnost $G^R \leq 0$.
- $G \leq 0$ pokud neexistuje levá možnost $G^L \geq 0$.

Vítězství ve hře

Každá hra bude patřit do jedné z následujících tříd:

1. L vítězí bez ohledu na to, kdo začíná. ($G > 0$)
2. R vítězí bez ohledu na to, kdo začíná. ($G < 0$)
3. První hráč vítězí. ($G \| 0$)
4. Druhý hráč vítězí. ($G = 0$)

Definice (Uspořádání her)

- $G \geq 0$ pokud neexistuje pravá možnost $G^R \leq 0$.
- $G \leq 0$ pokud neexistuje levá možnost $G^L \geq 0$.
- $G = 0$, pokud $G \geq 0$ a $G \leq 0$
- analogicky $G > 0, G < 0$
- $G \| 0$, pokud neplatí $G \geq 0$ ani $G \leq 0$.

Sčítání her

Definice

Nechť $G = \{G^L, \dots | G^R, \dots\}, H = \{H^L, \dots | H^R, \dots\}$ jsou hry. Definujeme

1. $G + H = \{G^L + H, G + H^L, \dots | G^R + H, G + H^R, \dots\}$,
2. $-G = \{-G^R, \dots | -G^L, \dots\}$,
3. $G - H = G + (-H)$.

Sčítání her

Definice

Nechť $G = \{G^L, \dots | G^R, \dots\}, H = \{H^L, \dots | H^R, \dots\}$ jsou hry. Definujeme

1. $G + H = \{G^L + H, G + H^L, \dots | G^R + H, G + H^R, \dots\}$,
2. $-G = \{-G^R, \dots | - G^L, \dots\}$,
3. $G - H = G + (-H)$.

Příklad

- 1+(-1)=0,
- *+*=0

Sčítání her

Definice

Nechť $G = \{G^L, \dots | G^R, \dots\}, H = \{H^L, \dots | H^R, \dots\}$ jsou hry. Definujeme

1. $G + H = \{G^L + H, G + H^L, \dots | G^R + H, G + H^R, \dots\}$,
2. $-G = \{-G^R, \dots | -G^L, \dots\}$,
3. $G - H = G + (-H)$.

Příklad

- 1+(-1)=0,
- *+*=0

Věta

Sčítání her je asociativní a komutativní, hra 0 je neutrálním prvkem. Relace uspořádání her ($G \geq H \iff G - H \geq 0$) je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Sčítání her respektuje uspořádání. Třídy ekvivalence her (podle relace rovnosti her) tvoří abelovskou grupu.

Hry jako Čísla

Definice

Hru G nazveme Číslem, jsou-li G^L i G^R Čísly a platí-li $G^L < G^R$.

Hry jako Čísla

Definice

Hru G nazveme Číslem, jsou-li G^L i G^R Čísly a platí-li $G^L < G^R$.

Poznámka

- Čísla tvoří abelovskou podgrupu Her.
- Čísla jsou úplně uspořádána relací $<$.
- Krátká (tj. konečná) Čísla jsou izomorfní okruhu $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Ordinální a reálná Čísla

Definice

1. Číslo nazveme Ordinálním Číslem, pokud nemá nemá žádné pravé možnosti a všechny levé možnosti jsou Ordinálními čísly.
2. Číslo nazveme infinitezimální, pokud $-2^{-n} < G < 2^{-n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
3. Číslo nazveme silně infinitezimální, pokud $-z < G < z$ pro každé kladné z.
4. Číslo G nazveme *all small*, pokud každá pozice G, která má levé možnosti, má i pravé možnosti a naopak.

Příklad

$0, *, \uparrow = \{0|*\}, \downarrow = \{*|0\}$ jsou *all small* Čísla.

Použitá literatura

WW Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy: **Winning Ways for Your Mathematical Plays**, Academic Press,1982.

GT Thomas S. Ferguson: **Game Theory**, Impartial Combinatorial Games (UCLA lecture), `http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf`

Wiki **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, `www.wikipedia.org`.

App Martin J. Chlond, Online Java Games, `http://www.chlond.demon.co.uk/`

GaNu Dierk Schleicher, Michael Stoll: An Introduction to Conway's Games and Numbers, arXiv:math/0410026v2.

Použitá literatura

WW Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy: **Winning Ways for Your Mathematical Plays**, Academic Press,1982.

GT Thomas S. Ferguson: **Game Theory**, Impartial Combinatorial Games (UCLA lecture), `http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf`

Wiki **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, `www.wikipedia.org`.

App Martin J. Chlond, Online Java Games, `http://www.chlond.demon.co.uk/`

GaNu Dierk Schleicher, Michael Stoll: An Introduction to Conway's Games and Numbers, arXiv:math/0410026v2.