KVATERNIONY A GEOMETRIE V $\mathbb{R}^3$

1. Úvod

Představme si, že máme nějaký předmět uchycen ve všech směrech pružnými vlákny k nějaké pevné kostře, pro určitost "stěnám" místnosti kulového tvaru. Vezměme tento předmět a otočme ho okolo osy o 360 stupňů. Tímto všechna vlákna, na kterých je uchycen, dokonale zamotáme a neexistuje způsob, jakým by šly rozmotat, aniž bychom je rozstřihli nebo pohnuli předmětem. Aby to nebylo příliš jednoduché, otočme předmětem okolo stejné osy a ve stejném směru o dalších 360 stupňů. Překvapivě, teď už vlákna rozmotat lze.

Naším cílem bude tento poněkud hypotetický příklad popsat a vysvětlit geometricky. Základem nám k tomu budou kvaterniony a jejich automorfismy, které mají úzkou souvislost právě s geometrií tří-rozměrného prostoru. Prvně pro úplnost či možná spíše zajímavost uvádíme, jak je to s automorfismy klasických číselných těles.

2. Automorfismy těles

Věta 1. *Jediné zobrazení $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ splňující*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1$$

je identické zobrazení.

Důkaz. Začněme s podmínkou $f(1) = 1$. Pomocí sčítání dostaneme též

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = n$$

pro všechna kladná celá čísla. Potom také

$$f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0.$$

Konečně tedy $f(-n) = -f(n) = -n$ platí také pro záporná celá čísla. Nakonec

$$f(m) = f(n \cdot m/n) = f(n) \cdot f(m/n)$$

a po vydělení $f(m/n) = f(m)/f(n) = m/n$. $\square$

Poznámka. Podmínka $f(0) = 0$ je splněna automaticky z $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ po zkrácení. Podmínka $f(1) = 1$ až na jednu výjimku platí také vždy

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \quad \Rightarrow \quad 0 = f(1) \cdot (f(1) - 1).$$

Mohou nastat 2 případy. Buď $f(1) = 1$, nebo $f(1) = 0$, ale potom $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot f(x) = 0$ pro každé x.

Věta 2. *Jediné zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1$$

je identické zobrazení.

Důkaz. Viděli jsme, že $f(r) = r$ pro každé racionální číslo $r \in \mathbb{Q}$. Zřejmě $x > 0$, právě když existuje $z \in \mathbb{R}$ tak, že $x = z^2$. Potom ale

$$f(x) = f(z \cdot z) = f(z) \cdot f(z) > 0.$$

Následně, jsou-li $x > y$ libovolná, pak $x - y > 0$ a $f(x) - f(y) = f(x-y) > 0$ a f zachovává uspořádání. Předpokládejme konečně, že $f(x) \neq x$ pro nějaké reálné číslo x a pro určitost nechť $f(x) > x$. Potom mezi nimi existuje racionální číslo r. Pro něj máme $f(r) = r$ a proto $f(x) > f(r) = r > x$. To je spor s monotónností f. □

Pro komplexní čísla podobná věta neplatí. Jednak máme komplexní konjugaci, která podmínky zjevně splňuje a navíc ještě existují tzv. "exotické automorfismy" komplexních čísel. Jejich existence však závisí na axiomu výběru. Místo toho dokážeme slabší větu.

Věta 3. *Jediná dvě zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ splňující*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1$$

a navíc $f|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ jsou identické zobrazení a komplexní konjugace.

Důkaz. Rozeberme možnosti pro $f(i)$. Platí $-1 = f(-1) = f(i \cdot i) = f(i) \cdot f(i)$ a tedy $f(i)$ musí být některá z druhých odmocnin čísla -1. Pro $f(i) = i$ dostáváme $f(a+bi) = f(a) + f(b)f(i) = a + bi$ a analogicky pro $f(i) = -i$ získáme $f(a+bi) = a - bi$. □

3. Kvaterniony

Kvaterniony se vyrobí z reálných čísel podobným způsobem jako komplexní čísla, jenom komplexní jednotky jsou tři namísto jedné. Tyto značíme i, j, k a splňují následující vztahy:

$$\begin{array}{cccc} & i \cdot i = -1 & 1 \cdot i = i = i \cdot 1 & i \cdot j = k = -j \cdot i \\ 1 \cdot 1 = 1 & j \cdot j = -1 & 1 \cdot j = j = j \cdot 1 & j \cdot k = i = -k \cdot j \\ & k \cdot k = -1 & 1 \cdot k = k = k \cdot 1 & k \cdot i = j = -i \cdot k \end{array}$$

Kvaterniony zapisujeme ve tvaru $q = a + bi + cj + dk$ a předchozí tabulka nám říká, jak tato čísla mezi sebou násobit, sčítání je "po složkách". Kvaterniony značíme $\mathbb{H}$. Z této tabulky lze snadno vyčíst, že násobení kvaternionů je asociativní, nikoliv však komutativní. Tato tabulka je úplná. Když Hamilton kvaterniony objevil, vyryl tehdy (roku 1843) na Broom bridge v Dublinu pouze "generující" vztahy

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Důležitou pomůckou pro nás bude vyjádření normy kvaternionu pomocí násobení a konjugace. Pro komplexní čísla platí

$$|z|^2 = \overline{z} \cdot z.$$

Pro kvaterniony bychom rádi obdrželi podobný vztah. Položme

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk.$$

V následujícím bude výhodné kvaterniony zapisovat ve tvaru $q = a+v$, kde $v = bi+cj+dk$ chápeme jako vektor v $\mathbb{R}^3$. Potom $\overline{q} = a - v$ a tedy

$$\overline{q} \cdot q = (a-v)(a+v) = a^2 + \underbrace{av - va}_{0} - v \cdot v = a^2 + |v|^2 = |q|^2,$$

neboť pro ryze imaginární kvaternion platí $v^2 = -|v|^2$. Pro inverzi kvaternionu dostáváme

$$q^{-1} = \tfrac{1}{|q|^2} \cdot \overline{q}$$

a zejména všechny nenulové kvaterniony mají inverzi. Toto není věc, která by byla k vidění často. Ve skutečnosti platí, že na $\mathbb{R}^n$ existuje násobení (asociativní s jednotkou), pro které ke každému nenulovému číslu existuje inverze, pouze pro $n = 1, 2, 4$ a jedná se přitom právě o $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$. Tuto větu dokázal Frobenius. Bez asociativity již takových násobení existuje víc a navíc přibývá ještě dimenze 8, v níž existuje struktura oktonionů. V ostatních dimenzích žádná násobení s inverzí neexistují, což je dost těžký výsledek z topologie ("odnož" geometrie; pokud vím, žádný algebraický důkaz není znám).

Abychom byli schopni popsat automorfismy kvaternionů potřebujeme vztah mezi algebrou kvaternionů a geometrií v $\mathbb{R}^3$. Zabývejme se tedy součinem dvou ryze imaginárních kvaternionů (tedy vektorů v a w),

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (bi + cj + dk) \cdot (b'i + c'j + d'k) \\ &= -\underbrace{(bb' + cc' + dd')}_{\langle v,w \rangle} + \underbrace{(cd' - dc') \cdot i + (db' - bd') \cdot j + (bc' - cb') \cdot k}_{v \times w}. \end{aligned}$$

Označíme-li reálnou část $-\langle v, w\rangle$ a vektorovou část $v \times w$, můžeme vztah přepsat

$$v \cdot w = -\langle v, w\rangle + v \times w,$$

kde první, reálná, složka je mínus skalární součin vektorů v, w a druhá složka je jejich vektorový součin. Součin obecných kvaternionů je pak

$$q \cdot r = (a + v)(b + w) = (ab + \langle v, w\rangle) + (aw + bv + v \times w).$$

Aplikací na součin konjugovaných kvaternionů dostáváme

$$\overline{r} \cdot \overline{q} = (b - w)(a - v) = (ab + \langle -w, -v\rangle) + (-aw - bv + (-w) \times (-v)).$$

Přitom $\langle -w, -v\rangle = \langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle$ a $(-w) \times (-v) = w \times v = -(v \times w)$. Z těchto vztahů je zřejmé, že konjugování je tzv. antihomomorfismus, tj. platí pro něj $\overline{q \cdot r} = \overline{r} \cdot \overline{q}$ (pořadí činitelů je přehozené). Aplikací na součin dostáváme

$$|qr|^2 = \overline{qr} \cdot qr = \overline{r}\, \underbrace{\overline{q}q}_{|q|^2}\, r = |q|^2|r|^2.$$

Tento vztah bude důležitý později, konkrétně jeho důsledek, že totiž součin dvou kvaternionů velikosti 1 je opět kvaternion velikosti 1 a stejně pro inverze.

Skalární součin dvou vektorů $\langle v, w\rangle$ má následující geometrický význam. Počítejme velikost vektoru $v - w$,

$$\begin{aligned}|v-w|^2 &= (b-b')^2 + (c-c')^2 + (d-d')^2 \\ &= (b^2+c^2+d^2) + (b'^2+c'^2+d'^2) - 2(bb'+cc'+dd') \\ &= |v|^2 + |w|^2 - 2\langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Protože má trojúhelník s vrcholy 0, v, w strany délek $|v|$, $|w|$, $|v-w|$, dostáváme z kosinové věty vztah

$$\langle v, w\rangle = |v| \cdot |w| \cdot \cos\alpha,$$

kde α je úhel, který svírají vektory v a w. Zejména $\langle v, w\rangle = 0$, právě když $\alpha = \pi/2$, tj. $v \perp w$. Nechť $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení zachovávající vzdálenosti. Potom podle předchozího toto zobrazení musí zachovávat zároveň skalární součin.

Dále dáme geometrický význam vektorovému součinu. Počítejme

$$u \cdot v \cdot w = u \cdot (-\langle v, w\rangle + v \times w) = -\underbrace{\langle u, v \times w\rangle}_{[u,v,w]} + (u \times (v \times w) - \langle v, w\rangle \cdot u).$$

Dosazením $u = v$ dostáváme $-|v|^2 \cdot w$ na levé straně a zejména tedy $\langle v, v \times w\rangle = 0$. To znamená, že součin $v \times w$ je kolmý na v a podobně také na w. Z rozkladu $v \cdot w$ také plyne

$$|v|^2 \cdot |w|^2 = |v \cdot w|^2 = \langle v, w\rangle^2 + |v \times w|^2.$$

Jelikož $\langle v, w\rangle^2 = |v|^2 \cdot |w|^2 \cdot \cos^2\alpha$, obdržíme

$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin\alpha.$$

Těmito dvěma vztahy je vektorový součin určen téměr jednoznačně: vektory kolmé na v a w, mající předepsanou délku jsou právě dva. Již bez důkazu uveďme, že soustava v, w, $v \times w$ tvoří "kladně orientovaný systém vektorů" (nicméně případ i, j, $i \times j = k$ by mohl být docela dobrým důvodem tomu věřit). Lineární zobrazení, která zachovávají orientaci jsou právě ta s kladným determinantem. Dokázali jsme tedy, že lineární zobrazení, které zachovává vzdálenosti a má kladný determinant, zachovává zároveň vektorový součin.

Poznámka. Součin $[u, v, w] = \langle u, v \times w\rangle = \langle u \times v, w\rangle$ je tzv. orientovaný objem. Jeho absolutní hodnota je rovna objemu rovnoběžnostěnu zadaného vektory u, v, w a jeho znaménko je kladné, tvoří-li tyto vektory kladně orientovaný systém vektorů, a záporné v opačném případě.

Věta 4. *Zobrazení $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ splňující*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1$$

a navíc $f|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ jsou v bijekci s lineárními zobrazeními $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zachovávajícími vzdálenosti a majícími kladný determinant.

Důkaz. Zabývejme se čísly $q \in \mathbb{H}$ splňujícími $q^2 \in \mathbb{R}_-$. Pro ně nutně $q^2 = -|q|^2$ a tedy

$$q = -|q|^2 \cdot q^{-1} = -\bar{q}.$$

Taková q jsou tedy právě ryze imaginární kvaterniony. Protože f zachovává násobení a reálná čísla, musí zachovávat i podmnožinu ryze imaginárních kvaternionů a jejich skalární a vektorový součin. Proto toto zobrazení zachovává vzdálenosti a má kladný determinant. Naopak pro A s těmito vlastnostmi stačí položit $f(a+v) = a + Av$. $\square$

Ve skutečnosti lze všechny automorfismy kvaternionů popsat velmi konkrétně a za tímto popisem stojí jejich nekomutativnost. Nechť $q \in \mathbb{H}$ má velikost 1. Potom definujme zobrazení $\mathrm{int}_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ (vnitřní automorfismus příslušný prvku q) pomocí vztahu

$$\mathrm{int}_q(x) = qxq^{-1}.$$

Zřejmě toto zobrazení splňuje všechny vlastnosti z předchozí věty a jeho zúžení na ryze imaginární kvaterniony tedy musí zachovávat skalární součin; říkáme, že je ortogonální. Ukážeme, že tímto způsobem dostaneme každé takové zobrazení právě dvakrát. K tomu potřebujeme vědět, že každé takové zobrazení je rotace. Platí

$$q = \cos t + v \cdot \sin t,$$

kde $t \in [0, \pi]$ a v je jednotkový vektor v $\mathbb{R}^3$. Pišme $q = e^{tv}$ pro jednoduchost (navíc má tento vztah opravdový smysl). Potom platí

$$\mathrm{int}_q(v) = e^{tv} v e^{-tv} = v,$$

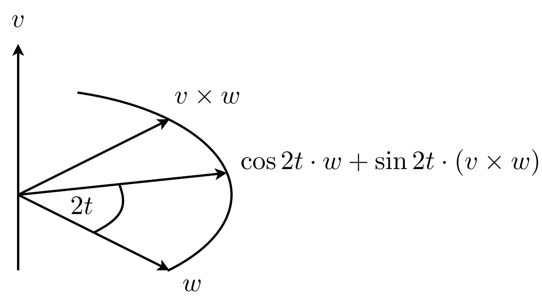
protože v a e^{tv} spolu komutují (konkrétně v komutuje jak s 1, tak samo se sebou). Tedy v bude osou rotace int_q. Nechť naopak $w \perp v$. Potom

$$we^{-tv} = w(\cos t - v \sin t) = w \cos t - (w \times v) \sin t = w \cos t + (v \times w) \sin t = e^{vt} w$$

a celkově

$$\mathrm{int}_q(v) = e^{2tv} w = (\cos 2t + v \cdot \sin 2t) w = \cos 2t \cdot w + \sin 2t \cdot (v \times w).$$

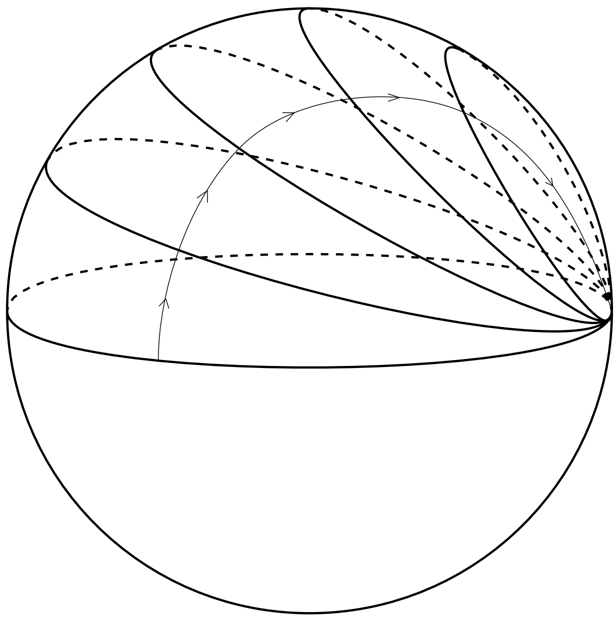
Podle následujícího obrázku by mělo být zřejmé, že se jedná o rotaci okolo osy zadané vektorem v o úhel $2t$ v kladném směru. Téže rotace lze docílit pomocí osy $-v$ a úhlu $-2t$, čemuž odpovídá kvaternion $e^{(\pi - t)(-v)} = -e^{tv}$. Ve výsledku jsme tedy zjistili, že každá rotace je zadána právě dvěma kvaterniony $\pm q$. Proto zobrazení $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$, které posílá jednotkový kvaternion q na příslušnou rotaci int_q je surjektivní a vzor každé rotace sestává právě ze dvou prvků.



Snadno se ověří, že se ve skutečnosti jedná o homomorfismus grup, kde S^3 má kvaternionové násobení a na SO(3) máme skládání zobrazení. Tento homomorfismus je tedy surjektivní a jeho jádro je $\{\pm 1\}$. Geometricky to znamená, že při opsání půlkružnice na S^3 od 1 k -1, např. procházením $e^{t\pi v}$ pro $t \in [0,1]$, dostáváme "křivku rotací" prostoru začínající v identitě a končící opět v identitě. Protože však koncový bod není zadán 1, ale -1, je celý prostor "zamotán".

Vraťme se nyní k situaci z úvodu, ve kterém jsme uvažovali předmět uchycený ve všech směrech pružnými vlákny ke stěnám místnosti kulového tvaru. Předmět jsme otočili o 720 stupňů okolo nějaké osy a tvrdili jsme, že lze vlákna rozmotat bez jejich přestřižení či pohnutí předmětem.

Představme si naši situaci tak, že celý prostor mezi zdmi a předmětem rozdělíme na "slupky" a ta na povrchu (odpovídající zdem místnosti) není otočena vůbec s tím, že jak se blížíme k našemu tělesu, tak jsou jednotlivé slupky otočeny okolo téže osy o stále narůstající úhel jdoucí od 0 k 720 stupňům. Tento "časový" vývoj si představme jako dráhu na S^3 začínající v 1, jdoucí skrz -1 zpět k 1. Tato cesta má "spojitou deformaci" ke konstantní cestě, která zůstává celou dobu v 1, která v naší představě odpovídá nezamotané situaci. Tuto deformaci si lze představit jednoduše na S^2 (viz obrázek dole) a myslím, že lze snadno uvěřit, že stejně to bude fungovat i na S^3.



Poznámka. Po vyjmutí jižního pólu lze zbytek sféry "narovnat" na rovinu, kde se deformace představí jednoduše. Kdyby byla naše cesta tvořena gumičkou, tak se v rovině sama stáhne do bodu, ve kterém ji držíme. Narovnání lze provést pomocí "stereografické projekce". Stačí ke sféře přiložit rovinu tak, aby se jí dotýkala na severním pólu. Budeme-li pak z jižního pólu vysílat paprsky směrem nahoru, protnou jak rovinu, tak sféru (s vyjmutým jižním pólem) v jediném bodě. Tento popis určuje bijekci mezi body roviny a sféry (s vyjmutým jedním bodem). Výhodou tohoto popisu je, že jej lze převést formálně dost jednoduše na případ stereografické projekce S^3 s jedním bodem vyjmutým na $\mathbb{R}^3$. Dostaneme tak opět kružnici v $\mathbb{R}^3$ a tu můžeme opět jednoduše "stáhnout do bodu".

4. Vektorová pole na sférách

Uvažujme jednotkovou sféru $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ (o poloměru 1 se středem v počátku) skládajíci se z vektorů $x = (x_1, \dots, x_n)$ s vlastností

$$1 = |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Vektorové pole na S^{n-1} je spojité zobrazení

$$\xi : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

splňující $\xi(x) \perp x$ pro každé $x \in S^{n-1}$. Přitom si můžeme představovat vektor $\xi(x)$ posunutý do bodu x a kolmost potom znamená, že je tento vektor tečný k S^{n-1} (také bychom mohli přesněji říct, že se jedná o *tečné* vektorové pole). Na S^1 definujme vektorové pole pomocí komplexního násobení,

$$\xi(z) = iz$$

(jde o otočení vektoru z o úhel $\pi/2$). Toto pole je všude nenulové. Analogicky pro $n = 2k$ můžeme ztotožnit $\mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$ a jeho prvky zapisovat jako k-tice komplexních čísel. Definujme

$$\xi(z_1, \dots, z_k) = (iz_1, \dots, iz_k).$$

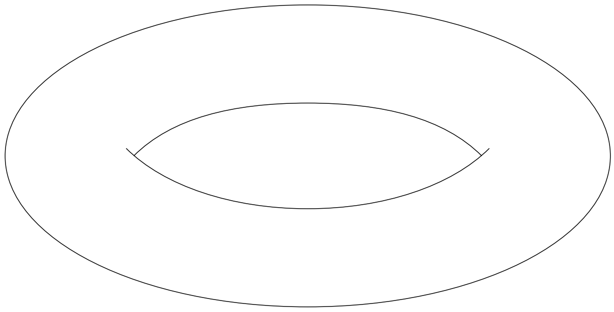
Opět se jedná o vektorové pole, které je všude nenulové. V kontrastu s tím je každé vektorové pole na sféře sudé dimenze v nějakém bodě nulové. Znamená to například, že na Zemi v každém okamžiku existuje místo, na kterém nefouká vítr. Také se tato situace pospisuje poučkou "nelze učesati ježka".

Pokusme se však o sestrojení vektorového pole s co nejméně nulovými body. Nejjednodušší způsob je si představit roztočený glóbus a v každém bodě vzít jeho rychlost, případně vítr, který v tom bodě rotací vzniká. Nulovými body tohoto vektorového pole budou právě severní a jižní pól. Dokonce platí, že každé vektorové pole na S^2 má alespoň dva nulové body, přičemž se tedy může stát, že nějaký nulový bod je "vícenásobný" a pak může být ve skutečnosti jediný. Námi vytvořené vektorové pole má oba nulové body jednoduché a je to tedy to nejméně nulové vektorové pole, které lze sestrojit. Další takové vznikne ortogonální projekcí vektoru $(0, 0, -1)$ (směr gravitace – na glóbu, nikoliv na Zemi) do každého tečného prostoru. Tato projekce bude opět nulová právě pro severní a jižní pól.

Poznámka. Jak se pozná, že je nulový bod jednoduchý? Podívejme se na jeho okolí pod lupou, tak, že toto okolí vypadá jako kus roviny a vektory vypadají, jako by v této rovině ležely. Uvažme okolo nulového bodu malou kružnici a vektory v těchto bodech nám opíšou malou smyčku v $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. Násobnost daného nulového bodu je pak rovna číslu, kolikrát tato smyčka oběhne počátek v $\mathbb{R}^2$. Tak například v okolí severního pólu si můžeme lokálně naše vektorové pole představovat jako $z \mapsto iz$ (kde severní pól odpovídá $0 \in \mathbb{C}$) a na kružnici okolo počátku se vektory z našeho vektorového pole seřadí do té samé kružnice, jen pootočené o 90 stupňů. Oběhne tedy počátek právě jednou.

Násobnost 2 umíme vyrobit lokálně pomocí vektorového pole na $\mathbb{C}$ zadaného $z \mapsto iz^2$. Toto vektorové pole lze pak pomocí stereografické projekce přenést na sféru (uvažujme, že je definované pouze na kruhu, který odpovídá při stereografické projekci severní hemisféře) a rozšířit do ostatních bodů (tedy na jižní hemisféru) již nenulovým vektorovým polem. Toto je naprosto triviální při uvážení stereografické projekce z protilehlého bodu sféry. Při této projekci má naše pole tvar $z \mapsto i$ a to lze rozšířit konstantním (a zejména nenulovým) polem se stejným předpisem.

Tento počet nulových bodů je roven tzv. Eulerově charakteristice, která se dá spočítat z libovolné triangulace sféry jako $v - e + f$, počet vrcholů mínus počet hran plus počet stěn. Snadno se můžete přesvědčit pro libovolný mnohostěn, že toto číslo je opravdu 2. Plochou, pro níž je toto číslo 0, je torus. Na něm si snadno všude nenulové vektorové pole představíme (například podobnou rotací jakou jsme uvážili s glóbem).



Na S^3 pomocí kvaternionického násobení umíme dokonce ještě víc. Definujme 3 vektorová pole

$$\rho(q) = qi, \qquad \sigma(q) = qj, \qquad \tau(q) = qk.$$

Kolmost $q \perp \rho(q)$ ověříme snadno: $\langle q, \rho(q)\rangle + q \times qi = q \cdot qi = -i$, reálná část je tedy nulová. Navíc zřejmě v každém bodě jsou $\rho(q)$, $\sigma(q)$, $\tau(q)$ nejen nenulové, ale dokonce lineárně nezávislé,

$$0 = b\rho(q) + c\sigma(q) + d\tau(q) = q(bi + cj + dk)$$

znamená, po vynásobení q^{-1} zleva, že $b = c = d = 0$. Protože má v každém bodě q tečný prostor ke sféře dimenzi 3 (skládá se ze všech vektorů kolmých na q, je tedy zadán jednou lineární rovnicí $\langle q, -\rangle = 0$), tvoří $\rho(q)$, $\sigma(q)$, $\tau(q)$ bázi tohoto tečného prostoru. Vektorové pole je pak zadáno spojitými funkcemi koeficientů,

$$\xi(q) = b(q)\rho(q) + c(q)\sigma(q) + d(q)\tau(q).$$

Při této identifikaci je zadání vektorového pole na S^3 ekvivalentní zadání spojitého zobrazení $S^3 \to \mathbb{R}^3$. Říkáme, že je "tečný bandl" sféry S^3 triviální. Viděli jsme, že toto nastává pro $n = 1, 3$. Pomocí oktonionů lze ještě dokázat triviálnost pro S^7. Slavná věta (Kervaire a Milnor) říká, že toto jsou jediné možnosti. Prvním krokem bylo ukázat, že n musí být nutně tvaru $2^k - 1$. Důkaz, že $k \leq 3$ je ale mnohonásobně složitější. Podobné výsledky se "záhadně" v topologii vyskytují i v jiných kontextech. Na závěr ještě poznamenejme, že souvislost s násobeními na $\mathbb{R}^n$ také není vůbec náhodná.