Patologické funkce

(Funkce názoru nepřístupné)

1 Funkce, jejíž graf hustě vyplní jednotkový čtverec

Každé číslo reálné $x \in [0,1)$ lze vyjádřit jako nekonečný desetinný zlomek,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \left(\frac{1}{10}\right)^i,$$

kde $\xi_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Stručně budeme říkat, že číslo $x \in [0,1)$ lze reprezentovat zápisem

$$x = 0{,}\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_n\ldots.$$

Toto vyjádření není jednoznačné. Např. $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}4999999\ldots$. Proto desetinné rozvoje, v nichž se od jistého místa počínaje vyskytují pouze devítky, nebudeme uvažovat.

Označme $m(x,n)$ počet nul mezi čísly $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ v desetinném rozvoji čísla x a položme

$$\omega(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(x,n)}{n}$$

pokud tato limita existuje. Např. pro $x = \frac{1}{99} = 0{,}010101010\ldots$ je

$$m(x,n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ sudé}, \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ liché}, \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2}}{n} = \frac{1}{2}, \qquad \text{tedy } \omega\Big(\frac{1}{99}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Vlastnosti funkce ω

1. Funkce ω je definována pro každé racionální číslo $r \in [0,1)$, tj. $[0,1) \cap \mathbb{Q} \subseteq \operatorname{Dom}\omega$. Poněvadž množina $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ je hustá v intervalu $[0,1]$, je definiční obor funkce ω také hustou množinou v tomto intervalu.

Důkaz: Racionální číslo r může být reprezentováno ve tvaru

$$r = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\overline{\beta_1\beta_2\ldots\beta_l},$$

kde $k,l \in \mathbb{N}_0$. Pro $n = k + s_n l + p_n$, $p_n, s_n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le p_n < l$ je

$$m(r,n) = m_1 + s_n m_2 + m_3,$$

kde m_1, resp. m_2, resp. m_3 je počet nul mezi čísly (číslicemi) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, resp. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$, resp. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_n}$. Pro $n \to \infty$ je $s_n \to \infty$, tedy

$$\omega(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(r,n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m_1 + s_n m_2 + m_3}{k + s_n l + p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{m_1}{s_n} + m_2 + \dfrac{m_3}{s_n}}{\dfrac{k}{s_n} + l + \dfrac{p_n}{s_n}} = \frac{m_2}{l}. \qquad \square$$

2. Definiční obor funkce ω je vlastní podmnožina intervalu $[0,1)$. Množina $[0,1) \setminus \operatorname{Dom}\omega$ je hustá v intervalu $[0,1)$.

Důkaz: Položme

$$\hat{x} = 0{,}100100110000111100000000111111111\ldots$$

(první dvě desetinné cifry jsou 1 a 0, pak se pravidelně střídá 2^i nul a 2^i jedniček, $i = 0,1,2,3,\ldots$) platí

$$m\left(\hat{x}, 2\cdot 2^k\right) = 2^k, \qquad m\left(\hat{x}, 3\cdot 2^k\right) = 2^{k+1},$$

pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. Je tedy

$$\frac{m\left(\hat{x}, 2 \cdot 2^k\right)}{2 \cdot 2^k} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{m\left(\hat{x}, 3 \cdot 2^k\right)}{3 \cdot 2^k} = \frac{2}{3},$$

což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m(\hat{x}, n)}{n}$ neexistuje.

Nechť $\varepsilon > 0$ a $x \in [0, 1)$ jsou libovolná čísla a x lze reprezentovat zápisem

$$x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots.$$

Položme

$$\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 1 - x\right\}.$$

Pak $0 < \varepsilon_1$, takže můžeme položit $l = [1 - \log_{10}\varepsilon_1]$; symbol $[\eta]$ označuje celou část čísla η. Platí

$$\frac{1}{10^l} < \varepsilon_1 \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme dále

$$x_0 = \frac{\left[10^l x\right]}{10^l} + \frac{\hat{x}}{10^l}.$$

Číslo x_0 lze reprezentovat zápisem

$$x_0 = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_l 1001001100001111000000000111111111\ldots.$$

Označme m_1 počet nul mezi číslicemi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$. Pak

$$m\left(x_0, l + 2 \cdot 2^k\right) = m_1 + 2^k, \qquad m\left(x_0, l + 3 \cdot 2^k\right) = m_1 + 2^{k+1},$$

pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. Je tedy

$$\frac{m\left(x_0, l + 2 \cdot 2^k\right)}{2 \cdot 2^k} = \frac{m_1}{l + 2 \cdot 2^k} + \frac{1}{2}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{m\left(x_0, l + 2 \cdot 2^k\right)}{2 \cdot 2^k} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{m\left(x_0, l + 3 \cdot 2^k\right)}{3 \cdot 2^k} = \frac{m_1}{l + 2 \cdot 2^k} + \frac{2}{3}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{m\left(x_0, l + 3 \cdot 2^k\right)}{3 \cdot 2^k} = \frac{2}{3},$$

což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m(x_0, n)}{n}$ neexistuje a tedy $x_0 \notin \operatorname{Dom}\omega$. Dále

$$|x - x_0| = \left| x - \frac{\left[10^l x\right]}{10^l} - \frac{\hat{x}}{10^l} \right| = \left| \frac{10^l x - \left[10^l x\right]}{10^l} - \frac{\hat{x}}{10^l} \right| < \frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^l} < 2\varepsilon_1 \le \varepsilon.$$

□

3. Funkce ω je ohraničená hodnotou 0 zdola a hodnotou 1 shora. Funkce ω nabývá své největší a nejmenší hodnoty.

Důkaz: Pro každé $x \in \operatorname{Dom}\omega$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $0 \le m(x, n) \le n$. Odtud plyne

$$0 \le \frac{m(x, n)}{n} \le 1$$

a první tvrzení plyne z věty o třech posloupnostech. Platnost druhého tvrzení vidíme například z toho, že

$$\omega(\tfrac{1}{2}) = \omega(0{,}5000000\ldots) = 1, \quad \omega(\tfrac{1}{9}) = \omega(0{,}1111111\ldots) = 0.$$

□

4. Funkce ω nabývá všech hodnot z intervalu $[0, 1]$.

Důkaz: Buď $y \in (0,1)$ libovolné číslo. Pak existuje posloupnost racionálních čísel $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = y$. Nechť čísla

$$\begin{array}{lllll} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \\ \vdots & & & & \end{array}$$

jsou z množiny $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ a jsou taková, že ve skupině čísel $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kk}$ je právě $[kq_k]$ nul. Položme

$$x = 0{,}a_{11}a_{21}a_{22}a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{k1}a_{k2}\dots a_{kk}\dots .$$

Každá cifra desetinného rozvoje čísla x se nachází v jednoznačně určené skupině číslic označujících čísla $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kk}$. Nechť tedy číslice na n-té pozici desetinného rozvoje čísla x je v k-té skupině. Pak platí

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) < n \le 1 + 2 + \cdots k,$$

$$[q_1] + [2q_2] + \cdots + [(k-1)q_{k-1}] \le m(x,n) \le [q_1] + [2q_2] + \cdots + [kq_k]$$

a tedy

$$\frac{[q_1] + [2q_2] + \cdots + [(k-1)q_{k-1}]}{1 + 2 + \cdots k} \le \frac{m(x,n)}{n} < \frac{[q_1] + [2q_2] + \cdots + [kq_k]}{1 + 2 + \cdots + (k-1)}$$

Označme nyní $d_k = (k+1)q_{k+1} - [(k+1)q_{k+1}]$. Pak $0 \le d_k < 1$ a podle Stolzovy věty platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[q_1] + [2q_2] + \cdots + [kq_k]}{1 + 2 + \cdots + (k-1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{[(k+1)q_{k+1}]}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)q_{k+1} + d_k}{k} = \lim_{k\to\infty} q_{k+1} = y.$$

Analogicky ukážeme, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[q_1] + [2q_2] + \cdots + [(k-1)q_{k-1}]}{1 + 2 + \cdots k} = y.$$

Z věty o třech posloupnostech nyní plyne, že

$$\omega(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(x,n)}{n} = y.$$

$\square$

5. Ke každému $x_0 \in [0,1)$, každému $y_0 \in [0,1]$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\tilde{x} \in \operatorname{Dom}\omega$ takové, že $\omega(\tilde{x}) = y_0$ a $|x_0 - \tilde{x}| < \varepsilon$. To znamená, že množina $\{(x,y) \in [0,1) \times [0,1] : x \in \operatorname{Dom}\omega, y = \omega(x)\}$ je hustá v množině $[0,1] \times [0,1]$.

Důkaz: Podle předchozího tvrzení existuje číslo $\hat{x} \in \operatorname{Dom}\omega$ takové, že $\omega(\hat{x}) = y_0$. Nechť čísla x_0 a $\hat{x}$ mají reprezentace

$$\hat{x} = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots \qquad x_0 = 0{,}\beta_1\beta_2\beta_3\dots .$$

Položme $k = [1 - \log_{10}\varepsilon]$. Pak $\dfrac{1}{10^k} < \varepsilon$. Položme nyní

$$\tilde{x} = 0{,}\beta_1\beta_2\beta_3\dots\beta_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots\alpha_n\dots .$$

Pak je

$$|x_0 - \tilde{x}| = 0{,}00\dots0\gamma_{k+1}\gamma_{k+2}\dots\gamma_n\dots < \frac{1}{10^k} < \varepsilon$$

a dále

$$-k \le m(\tilde{x},n) - m(\hat{x},n) \le k.$$

Odtud plyne
$$\frac{m(\hat{x},n)-k}{n} \le \frac{m(\tilde{x},n)}{n} \le \frac{m(\hat{x},n)+k}{n}$$
pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Z věty o třech posloupnostech nyní plyne
$$\omega(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(\tilde{x},n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m(\hat{x},n)}{n} = \omega(\hat{x}) = y_0.$$
□

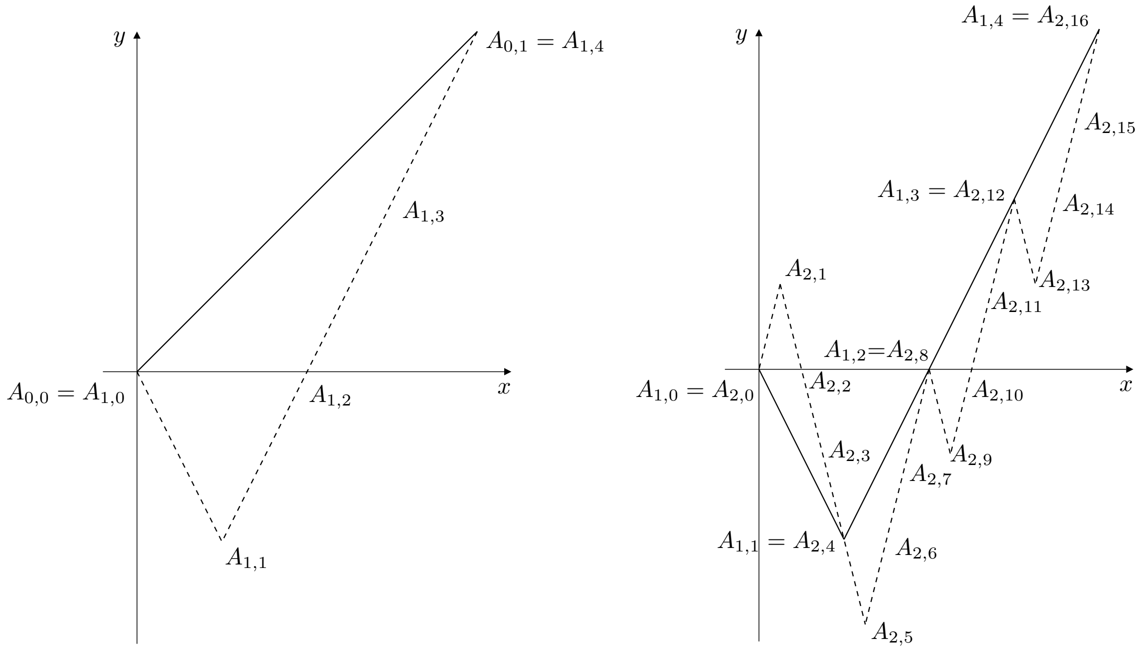
6. Funkce ω je nespojitá v každém bodě $x \in \operatorname{Dom}\omega$.
Důkaz: Buď $x_1 \in \operatorname{Dom}\omega$ libovolný. Položme
$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \omega(x_1) = 0, \\ \frac{1}{2}\omega(x_1), & \omega(x_1) \neq 0, \end{cases} \qquad \varepsilon = |y - \omega(x_1)|\,.$$
Pak $\varepsilon > 0$. Buď $\delta > 0$ libovolné. Podle předchozího tvrzení existuje $x_2 \in \operatorname{Dom}\omega$ takové, že $|x_2 - x_1| < \delta$ a $\omega(x_2) = y$. Pak $|\omega(x_2) - \omega(x_1)| = |y - \omega(x_1)| = \varepsilon$, což znamená, že funkce ω není spojitá v bodě x_1. □

2 Bolzanova funkce

1. Položme
$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{k}{4^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{0,1,2,\ldots,4^n\} \right\}.$$
Množina $\mathcal{M}$ je hustá v $[0,1]$.
Důkaz: Buď $x \in [0,1]$ libovolný bod a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$ libovolné číslo. Položme
$$n = [1 - \log_4 \varepsilon]\,, \quad k = [4^n x]\,.$$
Pak $n \ge -\log_4 \varepsilon$ a $4^n x - 1 < k \le 4^n x$, neboli
$$\frac{1}{4^n} \le \varepsilon, \qquad 0 \le x - \frac{k}{4^n} < \frac{1}{4^n},$$
což znamená, že
$$\left| x - \frac{k}{4^n} \right| < \frac{1}{4^n} \le \varepsilon.$$
Bod $\dfrac{k}{4^n} \in \mathcal{M}$ tedy leží v ε-okolí bodu x. □.

2. Definujme „Bolzanovu operaci“ $\mathcal{B}$, která uspořádané dvojici bodů z roviny $\mathbb{R}^2$ přiřadí pětici bodů v rovině. Tato operace (zobrazení) je dána předpisem
$$\mathcal{B}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \\ = \left((x_1,y_1), \left(x_1 + \frac{1}{4}\xi, y_1 - \frac{1}{2}\eta\right), \left(x_1 + \frac{1}{2}\xi, y_1\right), \left(x_1 + \frac{3}{4}\xi, y_1 + \frac{1}{2}\eta\right), (x_2,y_2)\right),$$
kde jsme označili $\xi = x_2 - x_1$, $\eta = y_2 - y_1$.

3. Položme
$$A_{0,0} = (0,0), \quad A_{0,1} = (1,1),$$
$$(A_{1,0}, A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{1,4}) = \mathcal{B}(A_{0,0}, A_{0,1}),$$
$$(A_{n,4l}, A_{n,4l+1}, A_{n,4l+2}, A_{n,4l+3}, A_{n,4l+4}) = \mathcal{B}(A_{n-1,l}, A_{n-1,l+1}), \quad l = 0,1,\ldots,4^{n-1}-1,$$



Obrázek 1: Ke konstrukci Bolzanovy funkce

viz obrázek 1. První souřadnice bodu $A_{n,k}$ je zřejmě $\dfrac{k}{4^n}$. Popsanou konstrukcí je tedy definováno zobrazení $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, které číslu $\dfrac{k}{4^n} \in \mathcal{M}$ přiřadí druhou souřadnici bodu $A_{n,k}$, tj.

$$\left(\frac{k}{4^n}, \varphi\left(\frac{k}{4^n}\right)\right) = A_{n,k}.$$

4. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $k \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 4^{n-1}\right\}$ platí

$$\left|\varphi\left(\frac{k}{4^n}\right) - \varphi\left(\frac{k+1}{4^n}\right)\right| = \frac{1}{2^n}.$$

Důkaz: Indukcí. Pro $n = 1$ je

$$\left|\varphi\left(\frac{k}{4}\right) - \varphi\left(\frac{k+1}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\varphi(0) - \varphi(1)\right| = \frac{1}{2}.$$

Indukční krok:

$$\left|\varphi\left(\frac{k}{4^{n+1}}\right) - \varphi\left(\frac{k+1}{4^{n+1}}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\varphi\left(\frac{\left[\frac{k}{4}\right]}{4^n}\right) - \varphi\left(\frac{\left[\frac{k}{4}\right]+1}{4^n}\right)\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$\square$

5. Jsou-li $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ takové, že $\dfrac{k}{4^n} \le x_1 < x_2 \le \dfrac{k+1}{4^n}$ pak $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Důkaz:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le \left|\varphi\left(\frac{k}{4^n}\right) - \varphi\left(\frac{k+1}{4^n}\right)\right| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) =$$

$$= 2\left|\varphi\left(\frac{k}{4^n}\right) - \varphi\left(\frac{k+1}{4^n}\right)\right| = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}. \quad \square$$

6. Je-li $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnost čísel z množiny $\mathcal{M}$, pak existuje $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi(x_m)$.

Důkaz: Nechť $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a položme $n = [2 - \log_2 \varepsilon]$, $k = [4^n x]$. Pak $n > 1 - \log_2 \varepsilon$ a $4^n x - 1 < k \le 4^n x$, tj.

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \quad \text{a} \quad \frac{k}{4^n} \le x < \frac{k+1}{4^n}.$$

Poněvadž $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$, k číslu

$$\delta = \frac{1}{2} \min\left\{x - \frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n} - x\right\} > 0$$

existuje přirozené číslo m_0 takové, že pro každé $m \ge m_0$ je $|x_m - x| < \delta$.

Buďte nyní $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ libovolná čísla taková, že $m_1 \ge m_0$, $m_2 \ge m_0$. Pak

$$|x_{m_1} - x_{m_2}| = |x_{m_1} - x + x - x_{m_2}| \le |x_{m_1} + x| + |x - x_{m_2}| < 2\delta,$$

což znamená, že x_{m_1}, x_{m_2} leží v intervalu $\left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right]$. Podle tvrzení 5. je

$$|\varphi\left(x_{m_1}\right) - \varphi(x_{m_2})| \le \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{\varphi(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská a podle Cauchyova-Bolzanova kriteria je konvergentní. □

7. Jsou-li $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ a $\{\tilde{x}_m\}_{m=1}^{\infty}$ posloupnosti čísel z množiny $\mathcal{M}$ takové, že

$$\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} \tilde{x}_m = x,$$

pak také $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi(x_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \varphi(\tilde{x}_m)$.

Důkaz: Položme

$$\xi_m = \begin{cases} x_{\frac{m+1}{2}}, & m \text{ je liché}, \\ \tilde{x}_{\frac{m}{2}}, & m \text{ je sudé}. \end{cases}$$

Pak $\lim\limits_{m\to\infty} \xi_m = x$ a podle tvrzení 6. existuje $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi(\xi_m) = y$. Obě posloupnosti $\{\varphi(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ a $\{\varphi(\tilde{x}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ jsou vybrané z posloupnosti $\{\varphi(\xi_m)\}_{m=1}^{\infty}$, což znamená, že

$$\lim_{m\to\infty} \varphi(x_m) = y = \lim_{m\to\infty} \varphi(\tilde{x}_m).$$

□

8. Funkce B definovaná předpisem

$$B(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \mathcal{M}, \\ \lim\limits_{m\to\infty} \varphi(x_m), & x \notin \mathcal{M},\ x = \lim\limits_{m\to\infty} x_m,\ x_m \in \mathcal{M} \end{cases}$$

se nazývá *Bolzanova funkce.*

Tvrzení 6. a 7. ukazují, že definice je korektní. Podle tvrzení 1 je definiční obor Bolzanovy funkce $\operatorname{Dom} B = [0, 1]$.

9. Jsou-li $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 4^n - 1\}$, $x \in [0, 1]$ takové, že $\dfrac{k}{4^n} \le x \le \dfrac{k+1}{4^n}$, pak

$$\left|B(x) - B\left(\frac{k}{4^n}\right)\right| \le \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{a} \quad \left|B(x) - B\left(\frac{k+1}{4^n}\right)\right| \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Důkaz: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost čísel z množiny $\mathcal{M}$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$. Je-li $x = \dfrac{k}{4^n}$, je první nerovnost splněna triviálně. Je-li $\dfrac{k}{4^n} < x$, pak k číslu $x - \dfrac{k}{4^n} > 0$ existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m \geq m_1$ je

$$\frac{k}{4^n} < x_m \leq x \leq \frac{k+1}{4^n}.$$

Podle definice Bolzanovy funkce B existuje $m_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m \geq m_2$ je splněna nerovnost $|B(x) - \varphi(x_m)| < \varepsilon$. S přihlédnutím k tvrzení 5. vidíme, že pro každé $m \geq \max\{m_1, m_2\}$ platí

$$\left|B(x) - B\left(\frac{k}{4^n}\right)\right| = \left|B(x) - \varphi(x_m) + \varphi(x_m) - B\left(\frac{k}{4^n}\right)\right| \leq$$
$$\leq |B(x) - \varphi(x_m)| + \left|\varphi(x_m) - B\left(\frac{k}{4^n}\right)\right| < \varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Poněvadž $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je první nerovnost dokázána.

Druhou nerovnost dokážeme analogicky. □

10. Bolzanova funkce B je stejnoměrně spojitá na intervalu $[0,1]$.

Důkaz: Buď $x_0 \in [0,1]$ libovolný bod a $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$. Dále buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo a položme $n = [2 + \log_2 3 - \log_2 \varepsilon]$, $k = [4^n x_0]$. Pak

$$\frac{3}{2^{n-1}} < \varepsilon \quad \text{a} \quad \frac{k}{4^n} \leq x_0 < \frac{k+1}{4^n}.$$

Poněvadž $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$, existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq m_0$ platí

$$\frac{k}{4^n} \leq x_m \leq \frac{k+1}{4^n}.$$

Nyní podle tvrzení 9. a 5. dostaneme

$$|B(x_m) - B(x_0)| = \left|B(x_m) - B\left(\frac{k}{4^n}\right) + B\left(\frac{k}{4^n}\right) - B\left(\frac{k+1}{4^n}\right) + B\left(\frac{k+1}{4^n}\right) - B(x_0)\right| \leq$$
$$\leq \left|B(x_m) - B\left(\frac{k}{4^n}\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{k}{4^n}\right) - \varphi\left(\frac{k+1}{4^n}\right)\right| + \left|B\left(\frac{k+1}{4^n}\right) - B(x_0)\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{m\to\infty} B(x_m) = B(x_0)$ a poněvadž $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ byla libovolná posloupnost a vlastností $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$, je funkce B spojitá v bodě x_0.

Poněvadž bod $x_0 \in [0,1]$ byl libovolný, je funkce B spojitá na celém kompaktním intervalu $[0,1]$. Z Heineovy-Cantorovy věty nyní plyne, že Bolzanova funkce B je stejnoměrně spojitá na intervalu $[0,1]$. □

11. Bolzanova funkce B nemá vlastní derivaci v žádném bodě $x \in \mathcal{M}$.

Důkaz: Buď $x_0 = \dfrac{k_0}{4^n} \in \mathcal{M}$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ položme $h_m = -\dfrac{1}{4^{m+n}}$. Pak $\lim\limits_{m\to\infty} h_m = 0$ a vzhledem k tvrzení 4. dostaneme

$$\left|\frac{B(x_0 + h_m) - B(x_0)}{h_m}\right| = \frac{\left|B\left(\dfrac{k_0}{4^n} - \dfrac{1}{4^{m+n}}\right) - B\left(\dfrac{k_0}{4^n}\right)\right|}{\dfrac{1}{4^{m+n}}} =$$
$$= 4^{m+n}\left|B\left(\frac{4^m k_0 - 1}{4^{m+n}}\right) - B\left(\frac{4^m k_0}{4^{m+n}}\right)\right| = \frac{4^{m+n}}{2^{m+n}} = 2^{m+n}.$$

Odtud plyne, že nemůže existovat konečná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{B(x_0+h)-B(x_0)}{h}.$$

$\square$

3 Weierstraßova funkce

Nechť $a \in (0,1)$ je nějaké číslo a $b \in \mathbb{N}$ je takové liché přirozené číslo, že $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ položíme

$$w_k(x) = a^k \cos\left(b^k \pi x\right).$$

Funkce w_k je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ a je na celém svém definičním oboru spojitá.

Weierstraßova funkce W je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos\left(b^k \pi x\right).$$

Tvrzení 1: Weierstraßova funkce W je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $|w_k(x)| = \left|a^k \cos\left(b^k \pi x\right)\right| \le a^k$. Poněvadž $0 < a < 1$, geometrická řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k$ konverguje, takže podle Weierstraßova kriteria řada funkcí $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k(x)$ konverguje absolutně a stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Poněvadž každý člen této řady je funkce spojitá, je i její součet spojitou funkcí. $\square$

Tvrzení 2: Weierstraßova funkce W nemá (vlastní) derivaci v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} W(x+h) - W(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos\left(b^k\pi(x+h)\right) - \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos\left(b^k \pi x\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left[\cos\left(b^k\pi(x+h)\right) - \cos\left(b^k\pi x\right)\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left[\cos\left(b^k\pi(x+h)\right) - \cos\left(b^k\pi x\right)\right] + \sum_{k=n}^{\infty} a^k \left[\cos\left(b^k\pi(x+h)\right) - \cos\left(b^k\pi x\right)\right]. \end{aligned}$$

Při označení

$$A(x,h,n) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left[\cos\left(b^k\pi(x+h)\right) - \cos\left(b^k\pi x\right)\right],$$

$$B(x,h,n) = \sum_{k=n}^{\infty} a^k \left[\cos\left(b^k\pi(x+h)\right) - \cos\left(b^k\pi x\right)\right],$$

dostaneme

$$\frac{W(x+h)-W(x)}{h} = \frac{1}{h}\big(A(x,h,n) - B(x,h,n)\big) \ge \left|\left|\frac{B(x,h,n)}{h}\right| - \left|\frac{A(x,h,n)}{h}\right|\right|. \tag{1}$$

Dále platí

$$\left|\cos\left(b^k\pi(x+h)\right) - \cos\left(b^k\pi x\right)\right| = \left|-2\sin\frac{b^k\pi(2x+h)}{2}\sin\frac{b^k\pi h}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{b^k\pi h}{2}\right|.$$

Z toho, že $|\sin\alpha| \le |\alpha|$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, a z předpokladu $ab-1>0$ plyne

$$|A(x,h,n)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^k \left[\cos\left(b^k\pi(x+h)\right) - \cos\left(b^k\pi x\right)\right]\right| \le 2\sum_{k=0}^{n-1} a^k \left|\sin\frac{b^k\pi h}{2}\right| \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k \pi|h| = \pi|h|\frac{(ab)^n-1}{ab-1} \le \pi|h|\frac{(ab)^n}{ab-1}.$$

Nyní položíme $\varepsilon = 1 - \frac{3}{2}\dfrac{\pi}{ab-1}$ a dostaneme

$$\left|\frac{A(x,h,n)}{h}\right| \le \frac{2}{3}a^n b^n(1-\varepsilon). \tag{2}$$

Buďte dále $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, $\xi_n \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ taková čísla, že $b^n x = \alpha_n + \xi_n$; $|\xi_n|$ vyjadřuje vzdálenost čísla $b^n x$ od nejbližšího celého čísla α_n a $\operatorname{sgn}\xi_n = \operatorname{sgn}(b^n x - \alpha_n)$. Tedy

$$x = \frac{\alpha_n + \xi_n}{b^n}.$$

Položme

$$h_n = \frac{1-\xi_n}{b^n}.$$

Pak je $h_n \ne 0$ a poněvadž $b>1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Dále

$$|B(x,h_n,n)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a^k \left[\cos\left(b^k\pi(x+h_n)\right) - \cos\left(b^k\pi x\right)\right]\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=n}^{\infty} a^k \left[\cos\left(b^k\pi\left(\frac{\alpha_n+\xi_n}{b^n} + \frac{1-\xi_n}{b^n}\right)\right) - \cos\left(b^{k-n}\pi(\alpha_n+\xi_n)\right)\right]\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=n}^{\infty} a^k \left[\cos\left(b^{k-n}\pi(\alpha_n+1)\right) - \cos\left(b^{k-n}\pi(\alpha_n+\xi_n)\right)\right]\right|.$$

Pro $k \ge n$ je

$$\cos\left(b^{k-n}\pi(\alpha_n+1)\right) = \cos\left(b^{k-n}\pi\alpha_n\right)\cos\left(b^{k-n}\pi\right) - \sin\left(b^{k-n}\pi\alpha_n\right)\sin\left(b^{k-n}\pi\right) = 1,$$

$$\cos\left(b^{k-n}\pi(\alpha_n+\xi_n)\right) = \cos\left(b^{k-n}\pi\alpha_n\right)\cos\left(b^{k-n}\pi\xi_n\right) - \sin\left(b^{k-n}\pi\alpha_n\right)\sin\left(b^{k-n}\pi\xi_n\right) =$$
$$= -\cos\left(b^{k-n}\pi\xi_n\right),$$

neboť b je celé liché číslo. Tedy

$$|B(x,h_n,n)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a^k \left(1+\cos(b^{k-n}\pi\xi_n)\right)\right|.$$

Poněvadž $\cos\alpha \ge -1$ pro jakékoliv $\alpha \in \mathbb{R}$, má poslední řada pouze nezáporné členy. Poněvadž $-\frac{1}{2} \le \xi_n < \frac{1}{2}$, je $-\frac{1}{2}\pi \le \pi\xi_n < \frac{1}{2}\pi$ a tedy $\cos(\pi\xi_n) \ge 0$. Odtud plyne, že platí

$$|B(x,h_n,n)| = \sum_{k=n}^{\infty} a^k \left(1+\cos(b^{k-n}\pi\xi_n)\right) = a^n\left(1+\cos(\pi\xi_n)\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a^k \left(1+\cos(b^{k-n}\pi\xi_n)\right) \ge a^n,$$

neboli

$$\left|\frac{B(x,h_n,n)}{h_n}\right| \ge \frac{a^n b^n}{1-\xi_n}.$$

Z toho, že $\xi_n \geq -\frac{1}{2}$, plyne

$$\frac{1}{1-\xi_n} \geq \frac{2}{3},$$

takže

$$\left|\frac{B(x, h_n, n)}{h_n}\right| \geq \frac{2}{3} a^n b^n. \tag{3}$$

Z nerovností (1), (2) a (3) dostaneme

$$\left|\frac{W(x+h_n) - W(x)}{h_n}\right| \geq \left|\frac{2}{3} a^n b^n - \frac{2}{3} a^n b^n (1-\varepsilon)\right| = \frac{2}{3} a^n b^n \varepsilon,$$

z čehož plyne

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{W(x+h_n) - W(x)}{h_n}\right| = \infty$$

a tedy podle Heineovy podmínky nemůže existovat derivace funkce W v bodě x. $\square$

4 Van der Waerdenova funkce

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujme funkci *vzdálenost od nejbližšího celého čísla,* kterou označíme $\langle x \rangle$, předpisem

$$\langle x \rangle = \min\{x - [x], [x+1] - x\} = \frac{\arccos\big(\cos(2\pi x)\big)}{2\pi}.$$

Tato funkce je zřejmě periodická s periodou 1, sudá, ohraničená ($0 \leq \langle x \rangle \leq \frac{1}{2}$) a spojitá. Na každém z intervalů $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ je lineární, přičemž je rostoucí na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$ a klesající na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$, $\langle 0 \rangle = 0$, $\langle \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2}$; viz obrázek 2. Pro $x \in [0, 1)$ tedy je

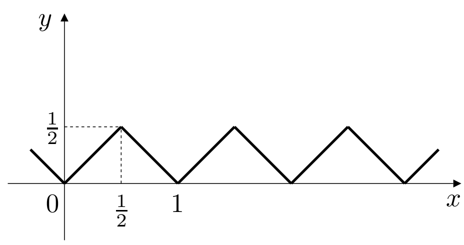
$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ a každé $x \in \mathbb{R}$ položme

$$v_k(x) = \frac{\langle 4^k x \rangle}{4^k}.$$

Každá z funkcí v_k je periodická s periodou 4^{-k}, sudá, ohraničená ($0 \leq v_k(x) \leq \frac{1}{2} 4^{-k}$) a spojitá, neboť je složením spojitých funkcí. Na intervalu $[0, \frac{1}{2} 4^{-k}]$ je lineární rostoucí, na intervalu $[\frac{1}{2} 4^{-k}, 4^{-k}]$ je lineární klesající, $v_k(0) = 0$, $v_k(\frac{1}{2} 4^{-k}) = \frac{1}{2} 4^{-k}$. Pro $x \in [0, 1)$ tedy můžeme psát

$$v_k(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} 4^{-k}, \\ 4^{-k} - x, & \frac{1}{2} 4^{-k} \leq x < 4^{-k}. \end{cases}$$



Obrázek 2: Funkce $\langle x \rangle$ „vzdálenost od nejbližšího celého čísla“.

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ s nezápornými členy majorizována konvergentní geometrickou řadou $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k$. To podle Weierstraßova kriteria pro stejnoměrnou konvergenci řad znamená, že řada funkcí $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ konverguje absolutně a stejnoměrně na celé množině $\mathbb{R}$.

Van der Waerdenova funkce V je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definována předpisem

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x).$$

Van der Waerdenova funkce jakožto stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá.

Tvrzení: Van der Waerdenova funkce nemá derivaci v žádném $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Buď $x \in \mathbb{R}$ libovolné číslo. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ položme $s_n = [2 \cdot 4^n x]$. Pak

$$x \in \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}\right).$$

Dále položíme

$$h_n = \frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{2s_n + 1}{4^{n+1}} - x\right)}{4^{n+1}}.$$

Pak platí

$$x + h_n \in \left(\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}\right), \qquad \lim_{n \to \infty} h_n = 0.$$

• Je-li $k > n$ pak $|h_n| = 4^{-(n+1)}$ je 4^{k-n-1} násobkem periody funkce v_k. To znamená, že funkce v_k splňuje rovnost $v_k(x + h_n) - v_k(x) = 0$.

• Je-li $k \leq n$, je $v_k(x + h_n) - v_k(x) = 4^{-(n+1)}(-1)^{s_n} = |h_n|(-1)^{s_n}$.

Odtud plyne

$$\frac{V(x + h_n) - V(x)}{h_n} = \frac{1}{h_n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x + h_n) - \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)\right) = \frac{1}{h_n}\sum_{k=0}^{\infty}\big(v_k(x + h_n) - v_k(x)\big) =$$

$$= \frac{1}{h_n}\sum_{k=0}^{n} |h_n|(-1)^{s_n} = (-1)^{s_n}(n + 1)\operatorname{sgn} h_n,$$

což podle Heineovy podmínky znamená, že nemůže existovat konečná limita

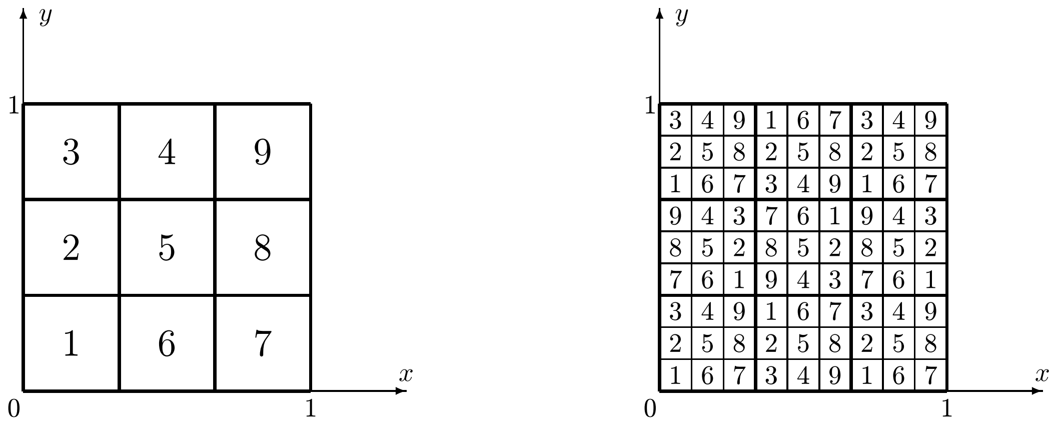
$$\lim_{h \to 0} \frac{V(x + h) - V(x)}{h}.$$

□

5 Peanovy funkce a Peanova křivka

Jednotkový čtverec $K_0 = [0, 1] \times [0, 1]$, který nazveme čtvercem nultého řádu, rozdělíme na devět shodných čtverců, které nazveme prvního řádu. Čtverce prvního řádu označíme symboly $K_{1,1}, K_{1,2,}, K_{1,3}, K_{1,4}, K_{1,5}, K_{1,6}, K_{1,7}, K_{1,8}, K_{1,9}$ tak, aby čtverce $K_{1,i}$ a $K_{1,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$ měly společnou stranu; viz obrázek 3 vlevo.

Každý čtverec $K_{1,k}$ prvního řádu rozdělíme na devět čtverců druhého řádu, které označíme symboly $K_{2,k,1}, K_{2,k,2}, K_{2,k,3}, K_{2,k,4}, K_{2,k,5}, K_{2,k,6}, K_{2,k,7}, K_{2,k,8}, K_{2,k,9}$ tak, aby čtverce $K_{2,k,i}$ a $K_{2,k,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$ a čtverce $K_{2,k,9}$ a $K_{2,k+1,1}$, $k = 1, 2, \ldots, 8$ měly společnou stranu; viz obrázek 3 vpravo.



Obrázek 3: Čtverce prvního řádu (vlevo) a druhého řádu (vpravo).

Každý čtverec druhého řádu rozdělíme na devět shodných čtverců třetího řádu a označíme je podle analogického pravidla. Stejným způsobem postupujeme dále. Po n krocích dojdeme ke čtvercům n-tého řádu $K_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}$. Strana čtverce n-tého řádu má délku $(\frac{1}{3})^n$.

Je-li $(x,y) \in K_0$, pak ke každému $n \in \mathbb{N}$ existují čtverce K_{1,k_1}, K_{2,k_1,k_2}, K_{3,k_1,k_2,k_3}, $\dots$, $K_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}$ takové, že

$$(x,y) \in K_{l,k_1,k_2,\dots,k_l}, \quad K_{l,k_1,k_2,\dots,k_l} \subseteq K_{l-1,k_1,k_2,\dots,k_{l-1}}, \quad l = 1,2,\dots,n.$$

To znamená, že ke každému bodu $(x,y) \in K_0$ existuje posloupnost $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ taková, že pro libovolné $i = 1,2,3,\dots$ je $k_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí předchozí relace. Poznamenejme, že tato posloupnost nemusí být určena jednoznačně. Například bodu $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ odpovídají posloupnosti $\{4,9,9,9,\dots\}$, $\{5,1,1,1,\dots\}$, $\{8,9,9,9,\dots\}$ a $\{9,1,1,1,\dots\}$.

Označme symbolem $\mathcal{P}$ množinu všech posloupností $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ takových, že $k_i \in \{1,2,\dots,9\}$ pro každé $i = 1,2,3,\dots$.

Buď $\{k_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{P}$ libovolná posloupnost. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je čtverec n-tého řádu $K_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}$ kompaktní množinou a jeho průměr je

$$d\left(K_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3^n}.$$

Pro uvažované čtverce tedy platí relace

$$K_{n,k_1,k_2,\dots,k_n} \subseteq K_{n+1,k_1,k_2,\dots,k_n,k_{n+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty} d\left(K_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}\right) = 0.$$

To znamená, že k posloupnosti $\{k_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{P}$ existuje jediný bod

$$(x,y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}.$$

Přitom $(x,y) \in K_0$. Máme tedy definováno zobrazení $F_1 : \mathcal{P} \to K_0$.

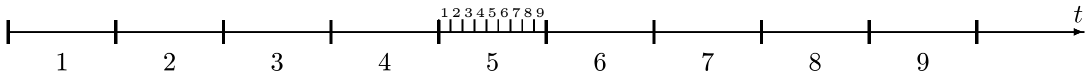
Jednotkový interval $I_0 = [0,1)$ rozdělíme na devět stejně dlouhých intervalů

$$I_{1,1} = [0, \tfrac{1}{9}),\ I_{1,2} = [\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}),\ I_{1,3} = [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}),\ I_{1,4} = [\tfrac{3}{9}, \tfrac{4}{9}),\ I_{1,5} = [\tfrac{4}{9}, \tfrac{5}{9}),$$
$$I_{1,6} = [\tfrac{5}{9}, \tfrac{6}{9}),\ I_{1,7} = [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}),\ I_{1,8} = [\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}),\ I_{1,9} = [\tfrac{8}{9}, 1),$$

které nazveme intervaly prvního řádu. Každý z intervalů $I_{1,k}$ rozdělíme na devět stejně dlouhých intervalů

$$I_{2,k_i} = \left[\frac{k-1}{9} + \frac{i-1}{9^2}, \frac{k-1}{9} + \frac{i}{9^2}\right), \quad i = 1,2,\dots,9,$$

které nazveme intervaly druhého řádu.



Každý interval druhého řádu rozdělíme na devět stejně dlouhých intervalů třetího řádu, které označíme analogickým způsobem. Tak pokračujeme dále až po n krocích dojdeme k intervalům n-tého řádu $I_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}$. Délka intervalu n-tého řádu je $\left(\frac{1}{9}\right)^n$. Intervaly n-tého řádu jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení tvoří interval I_0, proto ke každému $n \in \mathbb{N}$ a každému $t \in I_0$ existuje právě jeden interval n-tého řádu $I_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}$ takový, že $t \in I_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}$. Odtud dále plyne, že ke každému $t \in I_0$ existuje právě jedna posloupnost $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ taková, že

$$t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}.$$

Tímto způsobem máme definováno zobrazení $F_2 : I_0 \to \mathcal{P}$.

Naopak, podle principu vložených intervalů ke každé posloupnosti $\{k_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{P}$ různé od posloupnosti $\{9, 9, 9, 9, \dots\}$ existuje jediný bod t takový, že

$$t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{I}_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}.$$

Poznamenejme, že dvěma různým posloupnostem může příslušet tentýž bod. Například posloupnostem $\{5, 3, 1, 1, 1, \dots\}$ a $\{5, 2, 9, 9, 9, \dots\}$ přísluší bod $\frac{13}{27}$.

Definujme nyní zobrazení $\Phi : I_0 \to K_0$ jako složení zkonstruovaných zobrazení F_1 a F_2, $\Phi = F_1 \circ F_2$. Jedná se o zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}^2$. Můžeme ho tedy zapsat jako dvojici reálných funkcí jedné reálné proměnné,

$$\Phi(t) = \big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$

Tvrzení 1: Obě funkce φ, ψ jsou spojité na intervalu I_0.

Důkaz: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $n = [1 + \log_3 2 - \log_3 \varepsilon]$, $\delta = (\frac{1}{9})^n$. Pak je $2(\frac{1}{3})^n < \varepsilon$. Buďte $t_1, t_2 \in I_0$ libovolné body takové, že $|t_1 - t_2| < \delta = (\frac{1}{9})^n$. Tyto body leží buď ve stejném intervalu n-tého řádu nebo ve dvou sousedních intervalech n-tého řádu. To znamená, že také jejich obrazy $\Phi(t_1)$ a $\Phi(t_2)$ leží buď v jednom nebo ve dvou sousedních čtvercích n-tého řádu. To dále znamená, že

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \frac{2}{3^n} < \varepsilon, \quad |\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq \frac{2}{3^n} < \varepsilon.$$

$\square$

Podle Heineovy-Cantorovy věty lze tedy funkce φ, ψ spojitě prodloužit na interval $[0, 1]$.

Nechť $t_n = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{9})^n$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $t_n \in I_{n,9,9,9,\dots,9}$. To znamená, že $\Phi(t_n) \in K_{n,9,9,9,\dots,9}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Čtverec $K_{n,9,9,9,\dots,9}$ leží v pravém horním rohu základního čtverce K_0. Definujeme-li tedy $\varphi(1) = 1$, $\psi(1) = 1$, budou funkce φ, ψ spojité na intervalu I.

Funkce φ, ψ definované na intervalu $[0, 1]$ popsaným způsobem, se nazývají *Peanovy funkce.* Spojitá křivka zapsaná parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in [0, 1]$$

se nazývá *Peanova křivka.*

Tvrzení 2: Buďte φ, ψ Peanovy funkce. Zobrazení $\Phi = (\varphi, \psi) : [0, 1] \to K_0$ je bijekce.

Důkaz: Nechť $(x_0, y_0) = (1, 1) \in K_0$. Pak $(x_0, y_0) = \Phi(1)$.

Buď $(x_0, y_0) \in K_0$ libovolný bod takový, že $(x_0, y_0) \neq (1, 1)$. K tomuto bodu existuje alespoň jedna posloupnost $\{k_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{P}$ taková, že

$$(x_0, y_0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{n,k_1,k_2,\dots,k_n}.$$

K posloupnosti $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ existuje jediný bod $t_0 \in I_0$ takový, že

$$t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{n,k_1,k_2,\dots,k_n},$$

což znamená, že $\Phi(t_0) = (x_0, y_0)$.

Celkem jsme ukázali, že zobrazení Φ je surjekce.

Buďte $t_1, t_2 \in [0, 1]$ takové body, že $t_1 \neq t_2$. Položme $n = [\log_9 |t_1 - t_2| + 1]$. Pak je

$$|t_1 - t_2| > (\tfrac{1}{9})^n,$$

takže body t_1, t_2 leží v různých intervalech n-tého řádu. To znamená, že body $\Phi(t_1)$, $\Phi(t_2)$ leží v různých čtvercích n-tého řádu. Odtud plyne $\Phi(t_1) \neq \Phi(t_2)$. Zobrazení Φ je tedy prosté. □

Podle tohoto tvrzení Peanova křivka prochází právě jednou každým bodem jednotkového čtverce K_0.

Tvrzení 3: Peanovy funkce φ, ψ nemají vlastní derivaci v žádném bodě svého definičního oboru $[0, 1]$.

Důkaz: Buď $t_0 \in I_0$ libovolný bod. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $h_n \in \mathbb{R}$ takové číslo, že

$$|h_n| \leq \frac{2}{9^n}, \qquad t_0 + h_n \in I_0, \qquad |\varphi(t_0 + h_n) - \varphi(t_0)| \geq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Toto číslo lze sestrojit například takto: Ve čtverci n-tého řádu, který sousedí se čtvercem n-tého řádu obsahujícím bod $\big(\varphi(t_0), \psi(t_0)\big)$ najdeme bod (x_n, y_n), pro nějž platí $|x - \varphi(t_0)| \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n$. Potom najdeme $t_n = \Phi^{-1}(x_n, y_n)$ a položíme $h_n = t_n - t$.

Nyní platí

$$\left|\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h_n}\right| = \frac{|\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)|}{|h_n|} \geq \frac{1}{2 \cdot 3^n} \frac{9^n}{2} = \frac{1}{4} 3^n$$

a tedy podle Heineovy podmínky nemůže existovat konečná $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h}$.

Pro druhou Peanovu funkci ψ je důkaz stejný. □

Použitý zdroj

Дринфельд, Г. И. *Дополнения к общему курсу математического анализа.* Харьков: Издателство Харковского ордена трыдового красного знамени государственного университета имени А. М. Горького, 1958.