MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

# Bakalářská práce

Brno 2024 Šárka Divácká

MASARYKOVA
UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

# Zobrazení pro začátečníky

Bakalářská práce

**Šárka Divácká**

**Vedoucí práce: RNDr. Iva Dřímalová Ph. D.** **Brno 2024**

# Bibliografický záznam

| | |
|---|---|
| **Autor:** | Šárka Divácká<br>Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita<br>Ústav matematiky a statistiky |
| **Název práce:** | Zobrazení pro začátečníky |
| **Studijní program:** | Fyzika se zaměřením na vzdělávání |
| **Studijní obor:** | Fyzika se zaměřením na vzdělávání, Matematika se zaměřením na vzdělávání |
| **Vedoucí práce:** | RNDr. Iva Dřímalová Ph. D. |
| **Akademický rok:** | 2023/2024 |
| **Počet stran:** | xiii + 53 |
| **Klíčová slova:** | Množina; Zobrazení; Injektivní zobrazení; Surjektivní zobrazení; Bijektivní zobrazení; Inverzní zobrazení; Složené zobrazení |

# Bibliographic Entry

| | |
|---|---|
| **Author:** | Šárka Divácká<br>Faculty of Science, Masaryk University<br>Department of Mathematics and Statistics |
| **Title of Thesis:** | Map for beginners |
| **Degree Programme:** | Physics focused on teaching |
| **Field of Study:** | Physics focused on teaching, Mathematics focused on teaching |
| **Supervisor:** | RNDr. Iva Dřímalová Ph. D. |
| **Academic Year:** | 2023/2024 |
| **Number of Pages:** | xiii + 53 |
| **Keywords:** | Set; Map; Injective map; Surjective map; Bijective map; Inverse map; Composite map |

# Abstrakt

V této bakalářské práci se věnuji zobrazením na úrovni předmětu Základy matematiky, zvláště pak podrobnému řešení příkladů na toto téma obsažených ve sbírce určené k tomuto předmětu. Cílem této práce je sloužit jako podpůrný materiál pro studenty, aby lépe porozuměli tématu zobrazení a vyjasnili si potenciální nejasnosti. Kromě řešených příkladů ze sbírky práce obsahuje podrobný rozbor definic a vět z této kapitoly doplněný elementárními příklady a jejich detailním řešením. Důraz je kladen zvláště na oblasti, které studenti identifikovali jako problematické v dotazníku.

# Abstract

In this thesis I focus on maps at the level of the Fundamentals of Mathematics subject, especially on detailed solutions to exercises on this topic contained in a collection intended fot this subject. The aim of this work is to serve as a supportive material for students to better understand the topic of maps and clarify any potential uncertainties. In addition to solved exercises from the collection, the thesis includes a detailed analysis of definitions ans theorems from this chapter, supplemented with elementary examples and their detailed solutions. Emphasis is particularly placed on areas that students identified as problematic in the questionnaire.

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KOTLÁŘSKÁ 2, 611 37 BRNO
IČ: 00216224
DIČ: CZ00216224

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2023/2024

| | |
|---|---|
| **Ústav:** | Ústav matematiky a statistiky |
| **Studentka:** | Šárka Divácká |
| **Program:** | Fyzika se zaměřením na vzdělávání |
| **Specializace:** | Fyzika se zaměřením na vzdělávání<br>Matematika se zaměřením na vzdělávání |

Ředitel *ústavu* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

| | |
|---|---|
| **Název práce:** | Zobrazení pro začátečníky |
| **Název práce anglicky:** | Map for beginners |
| **Jazyk závěrečné práce:** | čeština |

**Oficiální zadání:**
Vypracujte podpůrný studijní materiál pro nastupující studenty učitelství pro střední školy na téma zobrazení. Vytvořte srozumitelný studijní text opatřený elementárními příklady. Vypracujte sbírku detailně řešených příkladů na téma zobrazení na úrovni kurzu Základy matematiky, který je vyučován v prvním semestru.

| | |
|---|---|
| **Vedoucí práce:** | RNDr. Iva Dřímalová, Ph.D. |
| **Datum zadání práce:** | 24. 5. 2023 |
| **V Brně dne:** | 28. 11. 2023 |

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Šárka Divácká, 18. 10. 2023
RNDr. Iva Dřímalová, Ph.D., 19. 10. 2023
RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 19. 10. 2023

# Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí mé bakalářské práce, RNDr. Ivě Dřímalové Ph.D., za její vynikající vedení, podporu a cenné rady během tvorby této práce. Její odborné znalosti a ochota naslouchat mi velmi pomohly dosáhnout určených cílů.

Děkuji také všem studentům, kteří se podíleli na mé práci vyplněním dotazníku. Vaše účast mi umožnila lépe porozumět potřebám a problémům studentů v oblasti zobrazení a lépe se zaměřit na problematické části tohoto tématu.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 3. května 2024 ...........................

Šárka Divácká

# Obsah

# Úvod

Tato bakalářská práce se zaměřuje na zobrazení probíraná v rámci předmětu Základy matematiky a nabízí podrobný pohled na jejich teoretické aspekty a praktické aplikace. Důvodem výběru tohoto tématu je snaha ulehčit studentům tohoto předmětu jejich nástup na vysokou školu, neboť je předmět Základy matematiky vyučován v prvním semestru a je tak prvním setkáním studentů s vysokoškolskou matematikou, která se od středoškolské na první pohled velmi liší.

V první části práce se věnuji dotazníkovému šetření, jehož cílem bylo zjistit potřeby a problémy studentů v oblasti zobrazení. Na základě získaných dat představuji své komentáře a postřehy. Druhá kapitola se zaměřuje na teoretický rozbor zobrazení, včetně definic a vět, doplněný elementárními příklady. Ve třetí kapitole se věnuji řešení příkladů ze sbírky určené k tomuto předmětu, kde ukazuji konkrétní aplikace teorie v praxi.

V této práci je použito stejné značení jako ve skriptech.

Tento text je upravenou verzí bakalářské práce – jsou zde opraveny chyby, které byly v původním textu.

# Kapitola 1

# Dotazníkové šetření

Cílem této práce je vytvořit materiál pro budoucí studenty předmětu Základy matematiky, který by jim pomohl k lepšímu porozumění kapitole o zobrazeních, a kde by si mohli zkontrolovat, popř. najít, řešení příkladů ze sbírky k tomuto předmětu. Než jsem začala práci psát, provedla jsem dotazníkové šetření a zeptala se touto formou současných studentů, co jim v této kapitole dělá problém a co by si přáli podrobně vysvětlit. Tento dotazník vyplnilo 28 studentů, kteří předmět Základy matematiky absolvovali v podzimním semestru 2023. Mimo to jsem se také (v roli pozorovatele) zúčastnila cvičení v předmětu Základy matematiky, na kterém se právě téma zobrazeních probíralo a měla jsem tak možnost vypozorovat, co dělá studentům problémy a co je naopak naprosto jasné. Dále jsem také tyto studenty toto téma doučovala. Při těchto dvou osobních setkáních přímo se studenty jsem si chtěla jednat ověřit, že to, co píší v dotazníku, je skutečně pravdivé a nepřibarvují si to, aby „vypadali chytřeji", pak také získat více informací o tom, co jim dělá problém a třeba je ani nenapadne uvést to v dotazníku, protože jsou zde výraznější problémy a třeba jim některé věci připadají jako nepodstatné drobnosti, ale ve skutečnosti jsou velmi důležité a v pochopení daného problému mohou velmi pomoct. Tato setkání splnila má očekávání. Studentům dělalo problém téměř přesně to, co jsem očekávala (pamatovala jsem si, že i já a mí spolužáci jsem s tím měli problémy), ale našly se i věci, které by mě samotnou nenapadlo v práci zmiňovat, ale z těchto setkání jsem vypozorovala, že je to potřeba.

Nejvíce studentů uvedlo, že jim dělá problém dokázat injektivitu a surjektivitu zobrazení a že se jim tyto dva typy hodně pletou nebo si rozdíl mezi nimi ani nedokáží představit. Jeden ze studentů napsal:

„Největší problém je pro mě injektivní a surjektivní zobrazení. Definice se hodně pletou, i důkazy jsou podobné. Důležité je si to umět představit."

Pochopení těchto dvou pojmů je pro řešení příkladů této kapitoly velmi důležité. Studenti se jejich definice často naučí zpaměti, a protože jsou si velmi podobné, dost se jim pak pletou. Proto, jak píše tento student, je důležité si to umět představit, aby byl jasný rozdíl mezi těmito pojmy. V mé práci proto tyto pojmy velmi podrobně rozeberu, ukážu je na jednoduchých příkladech doplněných o názorné schémata. Důvod, proč se tomuto studentovi pletou jejich důkazy, je mi ovšem záhadou. Důkaz injektivity a surjektivity se z mého pohledu velmi liší. Jediná možnost, proč by se mohly plést je pouze to, že student pojmy špatně nebo ne úplně chápe, pletou se mu dohromady, a poté je pro něj dokazování opravdu nepochopitelné. K důkazům těchto vlastností se vyjádřila i spousta dalších studentů, z nichž jeden na otázku, co je pro něj v tomto tématu nejtěžší, uvedl:

„Důkazy, uvést příklad je jednoduché, dokázat, že o něm platí určité vlastnosti je podstatně náročnější.“

Tento student chtěl z největší pravděpodobností říct, že mu nedělá problém dokázat, že zobrazení injektivní, reps. surjektivní, není. V takovém případě totiž stačí uvést protipříklad, kde je porušena vlastnost těchto zobrazení a důkaz je hotov. Naopak mu ale dělá problém dokázat, že zobrazení injektivní, reps. surjektivní je. Stejný problém, jako má tento student, jsem pozorovala jak na cvičení, kterého jsem se zúčastnila, při doučování a i v dotazníku se objevoval často. Opět je zde problém hlavně v tom, že studenti nechápou pojmy injektivní a surjektivní zobrazení zcela správně a tedy nechápou ani to, proč se tyto věci dokazují tak, jak se dokazují. To nicméně vyjádřil další ze studentů v dotazníku, který by si v této práci rád přečetl právě to, proč se tyto vlastnosti zobrazení dokazují tak, jak se dokazují:

„Rozebrání toho, proč některé vlastnosti dokazujeme způsoby, jakými je dokazujeme. Například proč nám u surjektivity stačí najít jen jeden předpis, to mi intuitivně nedává smysl.“

Z důvody častých problémů studentů s pochopením důkazů se v této práci pokusím co nejnázorněji vysvětlit důkazy těchto vlastností. Proč se dokazují právě tak, jak se dokazují. Proč u důkazu surjektivity stačí najít ke každému obrazu jen jeden vzor a není třeba hledat všechny apod. Injektivní zobrazení většině studentů problém nedělá, u důkazů surjektivity má ovšem problém většina studentů. Tento můj postřeh vyjádřil výstižně další ze studentů:

„Vím, jak surjektivní zobrazení vypadá, ale na rozdíl od injektivního, které se dokáže s předpokladem $f(a) = f(b)$ a ukážeme, že $a = b$, tomu vůbec nerozumím.“

U důkazu injektivity určitého zobrazení podle mě není tolik problémů, protože existuje univerzální způsob, jak se to dělá (jak uvádí tento student). Pro důkaz surjektivity však nic takového není a studenti se nejprve musí v daném zobrazení $f\colon A \longrightarrow B$ dobře zorientovat a následně vytvořit předpis, který každému prvku množiny $B$ přiřadí nějaký prvek množiny $A$. A právě to dělá studentům problém, neví, jak si dané zobrazení schématicky nakreslit či jak si vytvořit představu o tom, jak nějaké zobrazení funguje. Proto se v této práci budu snažit klást velký důraz na názornost, zobrazení schématicky znázorňovat, zdůrazňovat, jak jsem přišla na to, že určitý předpis skutečně funguje, ale také, že řešení nemusí být jediné a student může najít jiné než já, ale rovněž správné.

Další často uváděný problém je, že student se domnívá, že rozumí teorii, ale nedokáže ji aplikovat na příklady:

„Z mého pohledu je nejobtížnější pochopit, jakým způsobem aplikovat teoretické znalosti na příkladech na cvičení. Často mám dojem, že i přes znalost pojmů netuším, jak s nimi v praxi nakládat.“

Další uvedl:

„Největší problém mi dělá převedení teoretických informací do příkladů. K čemu využiji nějaké věty v příkladech, jak přesně definice a věty použít?“

Tyto problémy jsem pozorovala také když jsem se byla na jedné z hodin, na které se téma zobrazení probíralo, podívat. Myslím si, že studenti se naučí definice a věty z přednášky nazpaměť, a to pro ně znamená, že jim rozumí. Ve skutečnosti se ale jen naučí nějakou „říkanku“ a při dotazu, zda to můžou vysvětlit vlastními slovy, si uvědomí, že vlastně vůbec neví, o čem ta „říkanka“ je. Abych studentům pomohla s porozuměním definicím a větám v této kapitole, budu, jak už jsem uvedla, jejich obsah v této práci podrobně rozebírat, ukazovat na schématech různých zobrazení a vytvářet k nim jednoduché příklady.

Studenti také uváděli, že nerozumí zadáním příkladů:

„Většinou ze zadaných příkladů nevím, co je po mně požadováno, jelikož zadání je napsané zbytečně složitě. Když pochopím zadání, tak většinou není tak složité vymyslet odpověď.“

S tím také souvisí vyjádření dalšího studenta, který na otázku, co je pro něj nejtěžší, odpověděl:

„Neschopnost správně interpretovat symboly v zadání.“

Kvůli těmto problémům studentů při řešení jednotlivých příkladů přeformuluji zadání do vlastních slov a vysvětlím symboly, které by mohly být nejasné. Zdání, že jsou příklady zadány složitě, je podle mě způsobeno hlavně tím, že si studenti ještě dostatečně neosvojili všechny pojmy či matematické značení. Příklady dle mého názoru nejdou zadat jednodušeji, maximálně je možné matematické symboly vyjádřit slovně. Studenti by však toto značení buď měli znát, nebo nové symboly lze najít ve skriptech příslušných předmětu Základy matematiky, tedy nevidím důvod zadávání příkladů bez matematických symbolů.

Celkově studenti uváděli, že by ocenili co nejvíce obrázků, jednoduché příklady na vysvětlení nových pojmů a přeformulování definic a vět vlastními slovy. Jeden student napsal:

„Největší problém u mě byl si představit, co různá zobrazení dělají a jak je poznat. Tato část mi přišla hodně abstraktní a musel jsem si to dost dlouho číst a snažit se vytvářet vlastní příklady různých zobrazení a to vždy nemuselo být správně a vedlo k nesprávné interpretaci zobrazení.“

Další studentka uvedla:

„Dělá mi největší problém si představit dané zobrazení tzn. vytvořit si schéma, abych se v tom lépe zorientovala.“

A další napsala:

„Potřebovala bych více triviálních a názorných příkladů pro lepší pochopení tématu i pojmů v něm obsažených.“

Všechny tyto body považuji i já za velmi užitečné a do této práce je zahrnu. U přeformulovávání definic a vět do vlastních slov je ovšem třeba dávat si velký pozor, aby tak zůstalo vše podstatné. Myslím si, že pro studenty na začátku studia na vysoké škole je často lepší naučit se definici či větu nazpaměť ve znění uvedeném ve skriptech, neboť při snaze říct to vlastními slovy často studentům vypadne nějaký předpoklad apod. a definice či věta není správná. Je ovšem třeba, aby student chápal, co daná definice či věta říká a uměl to použít. I proto si myslím, že je třeba tyto definice a věty podrobně rozebrat a ukázat jejich význam na jednoduchých příkladech.

Studenti samozřejmě zmiňovali i další věci, a to hlavně vysvětlení pojmu mohutnosti množin (ideálně na schématech pro názornost) a dále důkazy stejné a nestejné mohutnosti různých množin, které jim nejsou jasné. Dále by se rádi dočetli něco o nutné a dostatečné podmínce, které se sice v tomto tématu také používají, ale jejich vysvětlení je předmětem spíše dříve probíraných kapitol v předmětu Základy matematiky. Vysvětlení nutné a dostatečné podmínky ovšem není jediným tématem z jiné kapitoly, o kterém by se studenti rádi dočetli více. V dotazníku se objevovali věci z mnoha různých kapitol mimo zobrazení, a to hlavně k relacím, což přisuzuji tomu, že se studentům smíchalo všechno dohromady, neboť na kapitolu o zobrazeních navazuje právě kapitola o relacích. Na tyto věci již v této práci bohužel nezbude prostor, mohou však být motivací pro další podobné práce.

# Kapitola 2

# Teorie

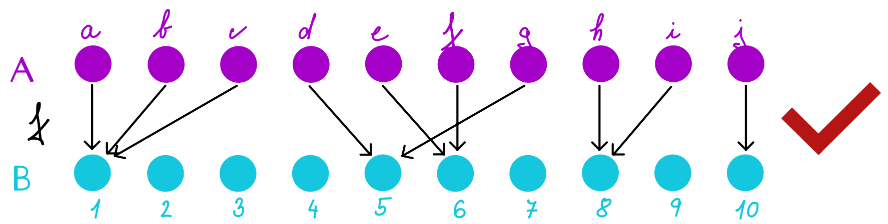
V této kapitole podrobně rozeberu definice a věty z kapitoly Zobrazení. Jejich obsah a použití ilustruji na jednoduchých příkladech, které pro lepší představu doplním o obrázky.

**Definice 1.**
Nechť $A$, $B$ jsou libovolné množiny. Předpis $f$, který každému prvku množiny $A$ přiřazuje právě jeden prvek množiny $B$, se nazývá zobrazení množiny $A$ do množiny $B$. Píšeme pak $f : A \longrightarrow B$.

Co je to zobrazení, lze ukázat na jednoduchém příkladu. Pro množiny

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}; B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

je dán předpis $f$ pomocí šipek v následujícím schématu:




Aby to bylo zobrazení musí podle definice být každému prvku množiny $A$ přiřazen právě jeden prvek množiny $B$. V řeči šipek ve schématu to znamená, že od každého prvku množiny $A$ musí vést právě jedna šipka, což je zde splněno.

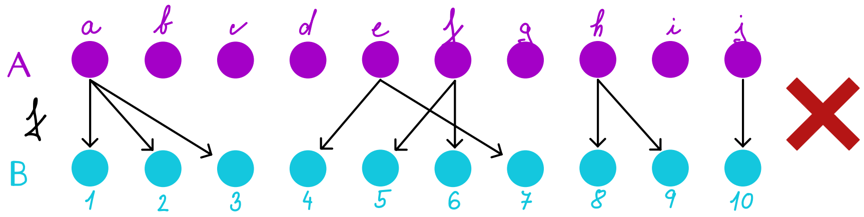
V definici zobrazení není řečeno nic o tom, kolik prvků se má zobrazit na každý prvek množiny $B$, tedy zde žádná taková podmínka není. V řeči šipek to znamená, že ke každému prvku množiny $B$ může vést libovolné množství šipek. Proto je v pořádku, že jsou zde prvky množiny $B$, na které se nezobrazil žádný prvek z množiny $A$ (např. 2), dále prvek v $B$, na který se zobrazil právě jeden prvek z $A$ (prvek 10) a také prvky v $B$, na které se zobrazilo více prvků z $A$ (např. 1).

Předpis zadaný tímto schématem je tedy zobrazení. Zobrazení nemuselo být zadáno schématem, ale předpisem, který by pro tento případ vypadal následovně:

$$f(a) = f(b) = f(c) = 1; f(d) = f(g) = 5; f(e) = f(f) = 6; f(h) = f(i) = 8; f(j) = 10$$

Prvky množiny $A$ se nazývají vzory a jim příslušné prvky množiny $B$ se nazývají obrazy. Např. prvku $j \in A$ je tímto zobrazením přiřazen prvkem $10 \in B$, tedy $j$ je vzorem prvku 10 a prvek 10 je obrazem prvku $j$. Množina $A$ se nazývá definiční obor a množina $B$ se nazývá obor hodnot.

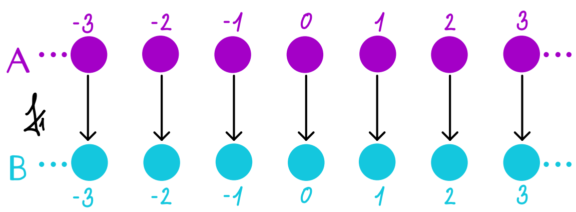
Co naopak zobrazení není, se ukáže opět na konkrétním příkladu. Pro stejné množiny $A$ a $B$ bude tentokrát dán předpis $f$ pomocí schématu takto:



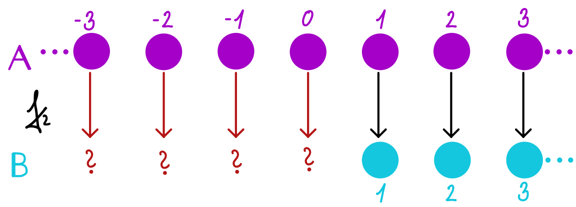

Toto zobrazení není, protože prvku $a$ jsou přiřazeny tři prvky $1,2,3$, prvku $b$ není přiřazen žádný prvek apod. Je zde tedy problém v tom, že každý prvek z $A$ nemá právě jeden obraz v množině $B$.

Při důkazu toho, jestli nějaký předpis je či není zobrazení, se využívá skutečnosti, že každý prvek z množiny $A$ musí mít právě jeden obraz v množině $B$ (od každého vzoru musí vést právě jedna šipka). Stačí tedy dokázat, že každému prvku množiny $A$ je přiřazen právě jeden prvek množiny $B$. Pokud existuje nějaký prvek množiny $A$, kterému je přiřazeno více či žádný prvek množiny $B$, tak se o zobrazení nejedná. Jako důkaz této skutečnosti stačí uvést příklad takového prvku množiny $A$.

Mějme $A = B = \mathbb{Z}$ a předpis $f_1 : A \longrightarrow B$, kde $f_1(x) = x$. Graficky je $f_1$ na obrázku níže. Tento předpis je skutečně zobrazením, neboť se každý prvek množiny $A$ zobrazí právě na jeden prvek množiny $B$ a to konkrétně sám na sebe.

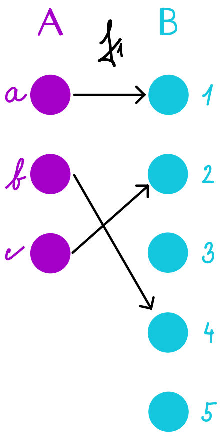



Nyní mějme $A = \mathbb{Z}$ a $B = \mathbb{N}$ a předpis $f_2 : A \longrightarrow B$ stejný jako v předchozím případě, tedy $f_2(x) = x$. Graficky je $f_2$ na obrázku níže. Tento předpis zobrazení nezadává, protože všechny prvek množiny $A$, které jsou menší nebo rovny 0 zde nemají žádný obraz v množině $B$. Obecně by pro důkaz toho, že nějaký předpis neurčuje zobrazení stačilo uvedení jednoho prvku, který nesplňuje definici zobrazení, tedy v tomto případě například prvku $0 \in A$, který nemá žádný obraz v množině $B$. Není třeba hledat všechny prvky, které nesplňují definici.




**Definice 2.**
Zobrazení $f : A \longrightarrow B$ se nazývá

- injektivní zobrazení, jestliže každý prvek z množiny $B$ má při zobrazení $f$ nejvýše jeden vzor.




Injektivní zobrazení je například zobrazení $f_1$ definované schématem vlevo. V injektivním zobrazení se na každý prvek množiny $B$ zobrazí maximálně jeden prvek množiny $A$ (v $f_1$ se na prvky $1,2,4$ zobrazí právě jeden prvek a na prvky $3,5$ se nezobrazí žádný). Řečeno pomocí šipek ve schématu: ke každému prvku množiny $B$ vede maximálně jedna šipka (k prvkům $1,2,4$ vede právě jedna šipka, k prvkům $3,5$ nevede žádná šipka). Řečeno jinak:

**každé dva různé prvky množiny $A$ se zobrazí na dva různé prvky množiny $B$**

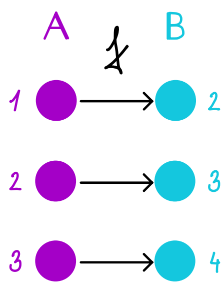
(pro dvojici $a,b$ je $f(a) = 1$ a $f(b) = 4$, tedy $f(a) \neq f(b)$, pro dvojici $b,c$ je $f(b) = 4$ a $f(c) = 2$, tedy $f(b) \neq f(c)$ a pro dvojici $a,c$ je $f(a) = 1$ a $f(c) = 2$, tedy $f(a) \neq f(c)$).

Při důkazu injektivity určitého zobrazení se využívá právě toho, že se každé dva různé prvky množiny $A$ zobrazí na dva různé prvky množiny $B$. Injektivita zobrazení se dokáže tak, že se pro prvky $x,y \in A$ předpokládá, že se rovnají jejich obrazy $f(x) = f(y)$ a dokáže se, že v tom případě se $x = y$.
Ukázka na příkladu: Mějme zobrazení $f : A \longrightarrow B$, kde $A = \{1,2,3\}$ a $B = \{2,3,4\}$, dané předpisem $f(x) = x+1$ (schéma tohoto zobrazení je vpravo). Pro toto zobrazení se tedy předpokládá

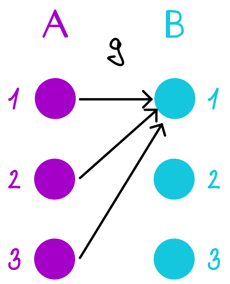
$$\forall x,y \in A : f(x) = f(y)$$

a z toho je ukáže

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x+1 = y+1 \Rightarrow x = y. \quad \forall x,y \in A$$




Toto zobrazení tedy je injektivní, protože rovnají-li se obrazy dvou vzorů, pak se rovnají i tyto vzory, tedy každý obraz má nejvýše jeden vzor.



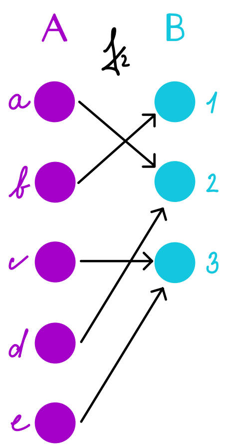

Při důkazu toho, že zobrazení injektivní není, je třeba pouze najít protipříklad. Tedy najít dva prvky $x, y \in A$, které mají stejný obraz, tedy $f(x) = f(y)$, ale $x \neq y$.
Ukázka na příkladu: Mějme zobrazení $g : A \longrightarrow B$, kde $A = \{1,2,3\}$ a $B = \{1,2,3\}$, dané předpisem $g(x) = 1$ (schéma tohoto zobrazení je vlevo).
Toto zobrazení injektivní není, protože například

$$g(1) = g(2), \text{ale} 1 \neq 2.$$

Toto není jediný možný protipříklad. Lze uvést také dvojici $g(1) = g(3)$,ale $1 \neq 3$ nebo $g(2) = g(3)$ , ale $2 \neq 3$.

**Definice 3.**
Zobrazení $f : A \longrightarrow B$ se nazývá

- surjektivní zobrazení, jestliže každý prvek z množiny $B$ má při zobrazení $f$ alespoň jeden vzor.




Surjektivní zobrazení je například zobrazení $f_2$ definované schématem vlevo. V tomto zobrazení se na každý prvek množiny $B$ zobrazí alespoň jeden prvek množiny $A$ (na prvek 1 se zobrazí jeden prvek a na prvky $2,3$ se zobrazí dva prvky). Řečeno pomocí šipek ve schématu: ke každému prvku množiny $B$ vede alespoň jedna šipka (k prvku 1 vede jedna šipka, k prvkům 2 a 3 vedou dvě šipky). Řečeno jinak:

**ke každému prvku množiny $B$ lze najít jeho vzor v množině $A$**

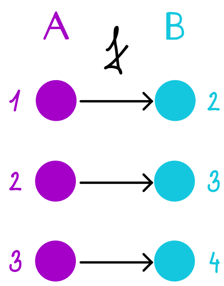
(vzorem prvku 1 je prvek $b$, vzorem 2 je $a$ a $d$, vzorem 3 je $c$ a $e$).

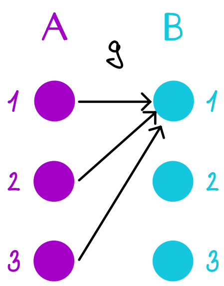
Toho, že má v surjektivním zobrazení každý prvek množiny $B$ vzor, se využívá při důkazu, a to tak, že se hledá pravidlo, dle kterého lze najít vzor pro každý prvek množiny $B$ (pro každý prvek množiny $B$ stačí nalézt jeden vzor, není třeba hledat všechny). Pokud se jedná o zobrazení mezi množinami, které mají málo prvků, stačí nalézt ke každému obrazu vzor a není třeba hledat předpis. U množin obsahujících velké množství prvků, resp. nekonečně mnoho prvků, je tento postup příliš zdlouhavý a neefektivní, resp. nemožný, a je třeba hledat předpis.

Ukázka na příkladu: Pro stejné zobrazení $f$ jako výše (schéma vpravo) se dokáže surjektivita tak, že se pouhým vyjádření $x$ z původního předpisu zobrazení $f$ najde předpis, dle kterého lze najít každému prvku množiny $B$ vzor. Pro všechna $x$ platí, že

$$f(x) = x + 1 \Rightarrow x = f(x) - 1.$$

Jelikož se zde jedná o dvě množiny, které mají pouze tři prvky, stačilo by najít ke každému prvku z $B$ vzor i bez předpisu ($f(x) = 2 \Rightarrow x = 1$, $f(x) = 3 \Rightarrow x = 2$, $f(x) = 4 \Rightarrow x = 3$).
Toto zobrazení je tedy surjektivní.

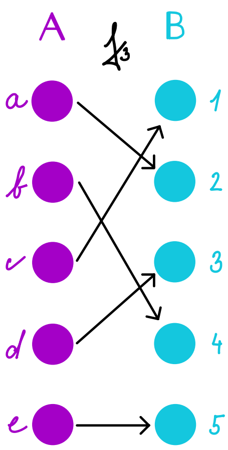



Při důkazu, že zobrazení surjektivní není, stačí opět pouze uvést protipříklad, tedy najít prvek množiny $B$, který nemá žádný vzor.
Ukázka na příkladu: Pro stejné zobrazení $g$ jako výše (schéma vlevo) jde vidět, že surjektivní není, protože například prvek $2 \in B$ nemá žádný vzor. Toto není jediný možný protipříklad, lze uvést také prvek $3 \in B$, který také nemá vzor.

**Definice 4.**
Zobrazení $f : A \longrightarrow B$ se nazývá

- bijektivní zobrazení, jestli každý prvek z množiny $B$ má při zobrazení $f$ právě jeden vzor.

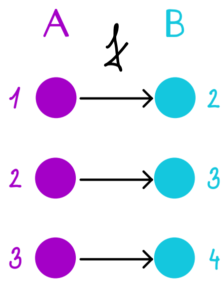


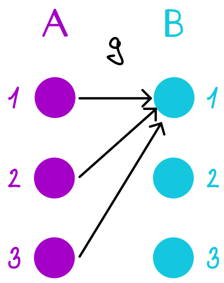

Bijektivní zobrazení je například zobrazení $f_3$ definované schématem vlevo. V tomto zobrazení se na každý prvek množiny $B$ zobrazí právě jeden prvek z množiny $A$ (prvek $1 \in B$ má vzor $c \in A$, prvek $2 \in B$ má vzor $a \in A$, atd. - každý prvek množiny $B$ má právě jeden vzor). V řeči šipek je bijektivní zobrazení takové, kde ke každému prvku množiny $B$ vede právě jedna šipka (při pohledu na schéma vlevo je vidět, že skutečně ke každému prvku množiny $B$ vede právě jedna šipka). Toto zobrazení

**je injektivní a surjektivní zároveň.**

(V injektivním zobrazení mají každé dva různé prvky množiny $A$ různé obrazy a v surjektivním má každý prvek množiny $B$ alespoň jeden vzor, což dohromady dává, že každý prvek množiny $B$ má právě jeden vzor. V řeči šipek je injektivní zobrazení takové, kde ke každému prvku množiny $B$ vede nejvýše jedna šipka, surjektivní takové, kde je každému prvku množiny $B$ vede alespoň jedna šipka, tedy pokud platí obě tyto vlastnosti vede ke každému prvku množiny $B$ právě jedna šipka a zobrazení je bijektivní.)

Bijektivita se dokazuje tak, že se pro dané zobrazení dokáže injektivita i surjektivita.
Tedy například zobrazení $f$ (schéma vpravo), pro které bylo výše dokázáno, že je injektivní i surjektivní, je bijektivní.



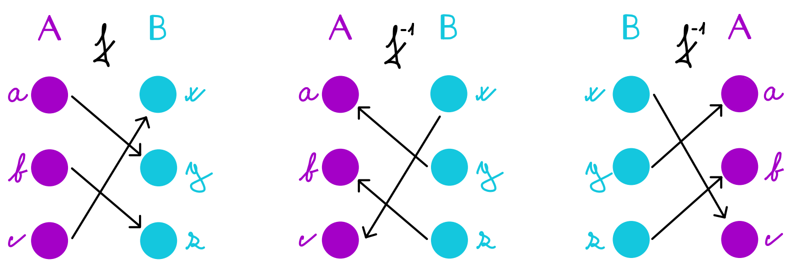

Pro důkaz toho, že zobrazení bijektivní není, se ukáže, že není injektivní nebo surjektivní (stačí najít jeden protipříklad).
Tedy například zobrazení $g$ (schéma vlevo), pro které bylo výše dokázáno, že není injektivní ani surjektivní platí, že není ani bijektivní. Nebylo by ani v případě, že by jednu tuto vlastnost splňovalo a druhou ne (bylo injektivní, ale nebylo surjektivní nebo nebylo injektivní, ale bylo surjektivní).

**Definice 5.**
Nechť $f : A \longrightarrow B$ je bijektivní zobrazení. Definujeme zobrazení $f^{-1} : B \longrightarrow A$ takto : pro každé $y \in B$ položíme

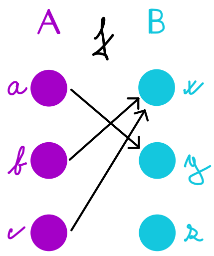
$$f^{-1}(y) = a,$$

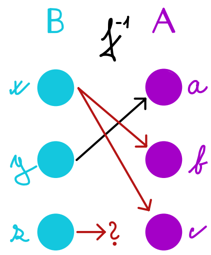
kde $a$ je ten prvek z množiny $A$, který je vzorem prvku $y$ při původním zobrazení $f$. Zobrazení $f^{-1}$ se potom nazývá inverzní zobrazení k zobrazení $f$.

Inverzní zobrazení tedy vznikne tak, že se z množiny obrazů stane množina vzorů a z množiny vzorů množina obrazů a toto zobrazení k sobě přiřadí stejné prvky jako v původním zobrazení. Vysvětleno na schématu - stačí otočit šipky naopak nebo prohodit množinu obrazů a vzorů a spojit šipkou ty prvky, které byly spojeny v původním zobrazení (o obou případech vyjde to stejné inverzní zobrazení).




Je zřejmé, proč musí být zobrazení bijektivní – kdyby nebylo, nějaký prvek množina $B$ by mohl být v původním zobrazení přiřazen více či žádnému prvku množiny $A$ a po provedení inverze by tak bylo tomuto prvku množiny $B$ přiřazeno více či žádný prvek množiny $A$, a tedy by se již nejednalo o zobrazení.






Inverzní zobrazení se v praxi jednoduše hledá tak, že se v jeho původním předpisu zamění obraz a vzor a vzor se následně vyjádří. Například pro zobrazení $f : A \longrightarrow B$, kde $A = \{1,2,3\}$ a $B = \{2,3,4\}$, dané předpisem $f(x) = x+1$ se zamění $f(x)$ a $x$ a následně se $f(x)$ vyjádří (místo $f(x)$ se po záměně píše $f^{-1}(x)$). Pro každé $x \in A$:

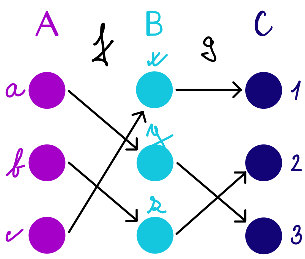
$$f(x) = x+1 \Rightarrow x = f^{-1}(x)+1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x-1.$$

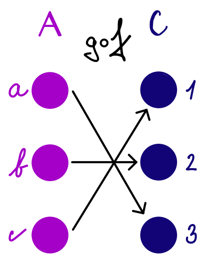
**Definice 6.**
Nechť $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ jsou zobrazení. Potom zobrazení $(g \circ f) : A \longrightarrow C$ definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{pro každé } x \in A$$

se nazývá složené zobrazení (ze zobrazení $f$ a $g$ v tomto pořadí).

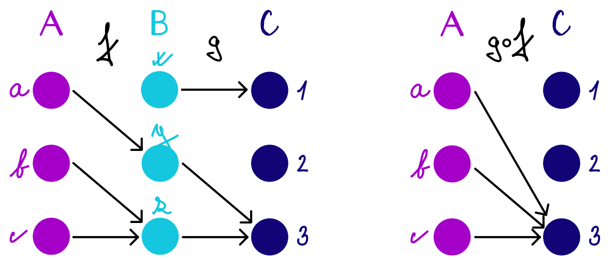
Složené zobrazení $g \circ f$ ($g$ po $f$ - tedy intuitivně: zobrazení $g$ následuje po zobrazení $f$) vznikne tak, že se původní vzory nejprve zobrazí podle zobrazení $f$ a poté se vzniklé obrazy zobrazí zobrazením $g$. V řeči šipek ve schématu - po šipkách lze dojít od jednotlivých vzorů v množině $A$ k obrazům v množině $C$, a tak vznikne toto složené zobrazení.






Prvek $a \in A$ se nejprve zobrazí na $y \in B$ a ten se poté zobrazí na $3 \in C$, tedy ve výsledném složeném zobrazení $g \circ f$ se $a \in A$ zobrazí na prvek $3 \in C$. Stejně tak lze dojít od prvku $b \in A$, přes $z \in B$ k prvku $2 \in C$, tedy se prvek $b \in A$ ve složeném zobrazení zobrazí na prvek $2 \in C$. Nakonec prvek $c \in A$ ve přes prvek $x \in B$ zobrazí v tomto složeném zobrazení na prvek $1 \in C$.

V definici není nikde uvedeno, že by zobrazení $f$ a $g$ musely být bijektivní. To proto, že nemusí - skládat lze libovolná zobrazení.




Zde se prvek $a \in A$ nejprve zobrazí zobrazením $f$ na prvek $y \in B$, a poté zobrazením $g$ na prvek $3 \in C$. Prvek $b \in A$ se přes prvek $z \in B$ zobrazí na $3 \in C$ a prvek $c \in A$ přes prvek $z \in C$ také na $3 \in C$. V tomto případě se tedy složeným zobrazením $g \circ f$ zobrazí všechny prvky množiny $A$ na prvek $3 \in C$.

Příklad skládání zobrazení: mějme množiny $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ a $C = \{3,5,7\}$, zobrazení $f : A \longrightarrow B$ dané předpisem $f(x) = x+1$ a zobrazení $g : B \longrightarrow C$ dané předpisem $g(x) = 2x-1$. Nejprve složené zobrazení $g \circ f$ ($g$ po $f$) - nejprve se provede zobrazení $f$ a poté $g$, tedy vlastně do předpisu zobrazení $g$ se za $x$ dosadí obrazy, které vyjdou ze zobrazení $f$, tedy výraz $x+1$:

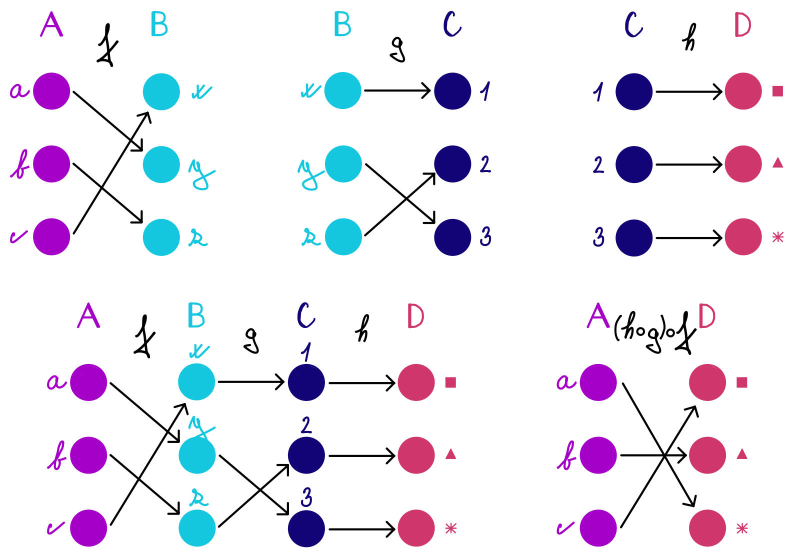
$$(g \circ f)(x) = 2 \cdot (x+1) - 1 = 2x+1.$$

Pozor – tyto zobrazení nelze složit naopak, tedy vytvořit složené zobrazení $f \circ g$ ($f$ po $g$ – nejprve $g$, poté $f$), protože zobrazení $g$ je zobrazení z množiny $B$ do množiny $C$ a zobrazení $f$ z množiny $A$ do množiny $B$, tedy množina do které zobrazuji při zobrazení $g$ není totožná s množinou ze které zobrazuji při zobrazení $f$ – $C \neq A$.

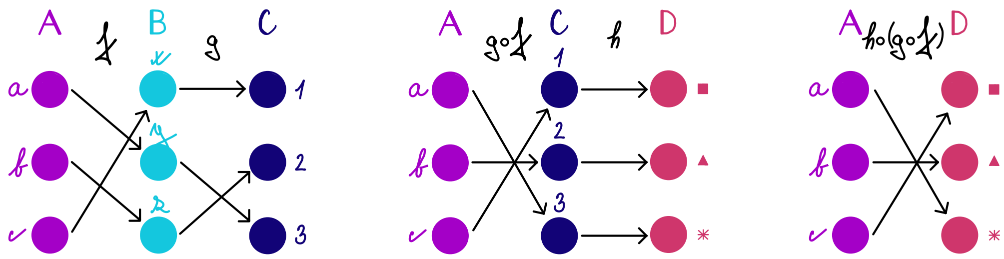
**Věta 1.**
Nechť $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ jsou zobrazení. Pak platí:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Tato věta hovoří o tom, že nezáleží na uzávorkování. Tuto skutečnost lze ilustrovat následujícím schématem.

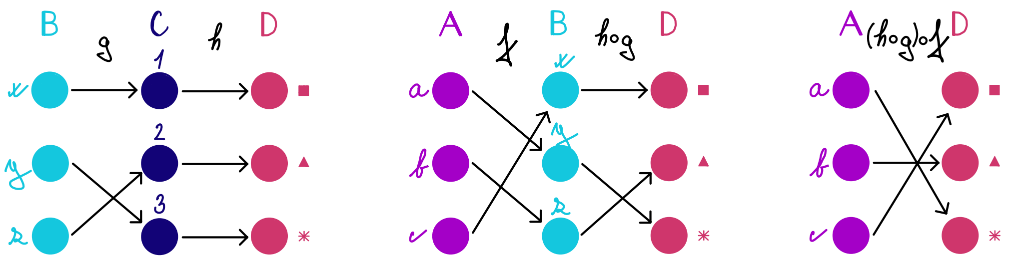



Jsou zde tři zobrazení $f,g,h$, ze kterých vznikne složené zobrazení $h \circ g \circ f$. Tyto zobrazení samozřejmě lze složit najednou, nicméně to často může být velmi složité. Proto je lepší nejprve složit dvě z těchto zobrazení a následně se vzniklým zobrazením složit třetí zobrazení. Tato věta říká, že nezáleží na tom, jestli se nejprve provede složení zobrazení $g \circ f$ a poté se toto složené zobrazení složí se zobrazím $h$ jako $h \circ (g \circ f)$, nebo se nejprve složí zobrazení $h \circ g$ a poté se s ním složí zobrazení $f$ jako $(h \circ g) \circ f$. Následující obrázky ilustrují tuto skutečnost.




Při první možnosti se tedy nejprve provede složení zobrazení $g$ a $f$ a poté se složené zobrazení $g \circ f$ složí se zobrazením $h$. Tedy například prvek $a \in y$ se nejprve zobrazením $f$ zobrazí na prvek $y \in B$ a ten se zobrazí zobrazení $g$ na prvek $3 \in C$. Ve složeném zobrazení $g \circ f$ se tak prvek $a \in A$ zobrazí na prvek $3 \in C$. Dále se složí zobrazení $g \circ f$ se zobrazením $h$ ($h$ po $g \circ f$). Ve zobrazení $h$ se prvek $3 \in C$ zobrazí na prvek $* \in D$. V tomto složeném zobrazení se tedy prvek $a \in A$ zobrazí přes prvek $3 \in C$ na prvek $* \in D$. Ve složeném zobrazení $h \circ (g \circ f)$ se tak prvek $a \in A$ zobrazí právě na prvek $* \in D$. Stejným způsobem lze dojít k výsledným obrazům zbývajících prvků množiny $A$.

Podle věty 1 ovšem vznikne stejné složené zobrazení i v případě, že se nejprve provede složení zobrazení $h \circ g$ a toto zobrazení se následně složí se zobrazení $f$ jako $(h \circ g) \circ f$.




I v tomto případě lze postupným skládáním dojít k obrazům všech prvků množiny $A$. Při pohledu na výsledná složená zobrazení $h \circ (g \circ f)$ a $(h \circ g) \circ f$ je vidět, že jsou tato složená zobrazení skutečně totožná.

Pokud se tedy skládá více zobrazení, nezáleží na uzávorkování, tedy na tom, které složení se provede první. Neznamená to ovšem, že lze prohazovat pořadí jednotlivých zobrazení. Již v rozboru definice 4 je vidět, že se obecně $g \circ f \neq f \circ g$, a tedy pořadí zobrazení prohazovat nelze.

**Věta 2.**
Nechť $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ jsou zobrazení. Pak platí:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $f, g$ jsou injektivní zobrazení | $\Rightarrow$ | $g \circ f$ je injektivní zobrazení |
| 2. | $f, g$ jsou subjektivní zobrazení | $\Rightarrow$ | $g \circ f$ je surjektivní zobrazení |
| 3. | $g \circ f$ je injektivní zobrazení | $\Rightarrow$ | $f$ je injektivní zobrazení |
| 4. | $g \circ f$ je surjektivní zobrazení | $\Rightarrow$ | $g$ je surjektivní zobrazení. |

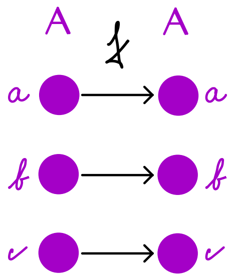
Tato věta udává dvě nutné a dvě dostatečné podmínky. (Mějme platnou implikaci $A \Rightarrow B$, pak je $A$ dostatečnou podmínkou pro $B$ a $B$ nutnou podmínkou pro $A$.) První dvě implikace uvádí dostatečné podmínky (pokud jsou zobrazení $f, g$ injektivní, pak bude injektivní i zobrazení $g \circ f$, podobně pro surjektivitu) a druhé dvě nutné (pokud je zobrazení $g \circ f$ injektivní, pak nutně musí být zobrazení $f$ injektivní, podobně pro surjektivitu).

Tato věta se může hodit pro zjednodušení některých příkladů, například pro důkaz injektivity či surjektivnity nějakého zobrazení apod.

**Věta 3.**
Nechť $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ jsou zobrazení. Pak platí:

$$g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B \quad \Leftrightarrow \quad f, g \text{ jsou bijektivní} \wedge g = f^{-1}$$

Zde je vhodné nejprve uvést, co je to $id_A$, resp. $id_B$. Jedná se o identická zobrazení, tedy taková zobrazení $A \longrightarrow A$, resp. $B \longrightarrow B$, kde se každý množiny $A$, resp. množiny $B$, zobrazí sám na sebe. Příkladem identického zobrazení je zobrazení $f : A \longrightarrow A$, kde $A = \{a, b, c\}$, vpravo. Každý prvek se zde skutečně zobrazí sám na sebe: $f(a) = a$, $f(b) = b$, $f(c) = c$.



Tato věta obsahuje ekvivalenci, která může být opět užitečná při řešení nějakých úloh. Pokud je známo, že $g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B$, pak tato věta říká, že zobrazení $f, g$ jsou bijektivní a zároveň $g = f^{-1}$. Pokud je naopak známo, že $f, g$ jsou bijektivní $\wedge$ $g = f^{-1}$, pak z této věty $g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B$.

# Kapitola 3

# Příklady

V této kapitole vyřeším všechny příklady z cvičebnice k předmětu Základy matematiky na téma Zobrazení (číslování je stejné, jako v učebním textu). V řešení se zaměřím na všechny možné problémy, které by mohly při řešení nastat. Svůj postup vysvětlím a pro větší názornost přidám také obrázky.

**[1.5.B1].** Rozhodněte, zda zadaný předpis $f$ určuje zobrazení množiny $A$ do množiny $B$, je-li:

a) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}, \qquad f(x) = |x| \qquad \text{pro } \forall x \in \mathbb{Z},$

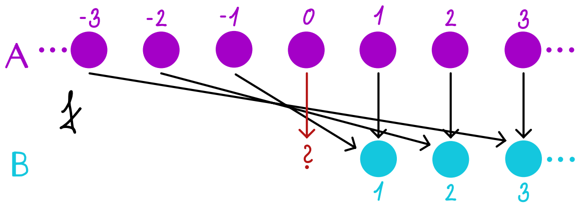
b) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}, \qquad f(x) = \frac{2x^2-3}{3x^2-2} \qquad \text{pro } \forall x \in \mathbb{Z},$

c) $$A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 2 \mid x \\ -1 & \text{pro } 3 \mid x \\ 0 & \text{pro } 2 \nmid x \wedge 3 \nmid x \end{cases} .$$

*Řešení.* Aby zadaný předpis určoval zobrazení, musí mít každý prvek z množiny $A$ (vzor) právě jeden obraz v množině $B$. V tomto příkladu tedy vždy stačí zkontrolovat, zda tomu tak opravdu je, či nikoli.

a) Toto zobrazení zobrazuje celá čísla na jejich absolutní hodnotu. Nabízí se tedy rozdělit si toto zobrazení na tři případy:

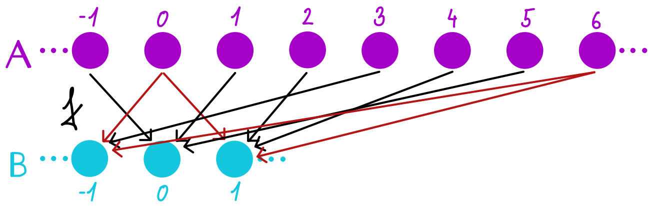
   - *Kladná čísla:* Celá kladná čísla se zobrazí sami na sebe, tedy opět na celá kladná čísla, která do množiny přirozených čísel patří, a tak zde problém nenastane neboť se každé kladné číslo jednoznačně zobrazí samo na sebe (např. $1 \longrightarrow 1$, $2 \longrightarrow 2$).
   - *Záporná čísla:* Celá záporná čísla se zobrazí na svá opačná čísla, tedy na celá čísla kladná, která do množiny přirozených čísel opět patří, a proto ani zde problém nenastane, protože se každé záporné číslo jednoznačně zobrazí na číslo k němu opačné (např. $-1 \longrightarrow 1$, $-2 \longrightarrow 2$).
   - *Nula:* Absolutní hodnota z nuly je nula, která ovšem do množiny přirozených čísel nepatří. Nulu tedy nelze zobrazit pomocí tohoto zobrazení do množiny přirozených čísel ($0 \longrightarrow 0 \notin \mathbb{N}$).




Zadaný předpis tedy **neurčuje** zobrazení.

b) Toto zobrazení zobrazuje celá čísla na racionální čísla (např. $-2 \longrightarrow \frac{1}{2}$, $-1 \longrightarrow -1$, $0 \longrightarrow \frac{3}{2}$, $1 \longrightarrow -1$, $2 \longrightarrow \frac{1}{2}$). V čitateli i ve jmenovateli vždy dostanu celé číslo, tedy výsledkem bude vždy racionální číslo. Jediné, co zbývá ověřit je, zda nemůže někdy vyjít ve jmenovateli nula, neboť v tom případě by toto zobrazení nemělo pro daný vzor obraz. Nicméně, aby ve jmenovateli vyšla nula, musel by být vzor $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, ale $\sqrt{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{Z}$, tedy tento případ v tomto zobrazení nenastane.
Tento předpis **určuje** zobrazení.

c) Toto zobrazení zobrazuje čísla dělitelná dvěma na 1, čísla dělitelná třemi na $-1$ a čísla, která nejsou dělitelná dvěma ani třemi na 0. Aby byly splněny podmínky zobrazení, musí být možné pro všechna celá čísla určit, do které skupiny patří, a to jednoznačně (o každém čísle lze rozhodnout, zda je dělitelné dvěma, třemi nebo ani dvěma, ani třemi: každé číslo může patřit pouze do jedné z těchto skupin). Je zřejmé, že toto nelze říci, protože například číslo 6 nebo číslo 12 je dělitelná jak dvěma, tak třemi a tedy nelze jednoznačně určit kam se zobrazí.




Tento předpis tak **neurčuje** zobrazení.

**[1.5.B2].** Nakreslete všechna zobrazení $A \longrightarrow B$ a uveďte, která z nich jsou injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní. Přitom

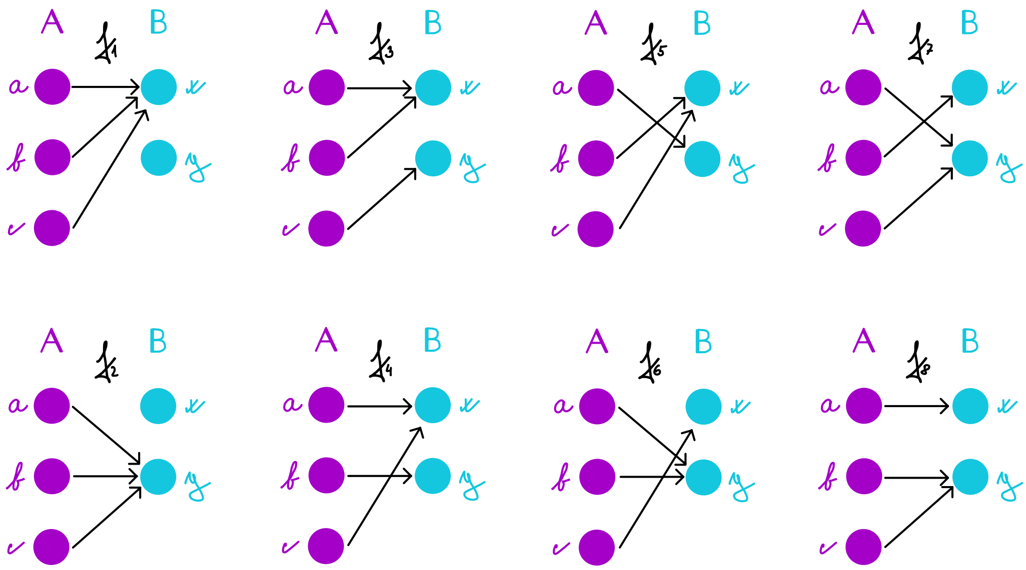
a) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{x,y\}$,

b) $A = \{a,b\}$, $B = \{x,y,z\}$.

*Řešení.* Počet zobrazení $A \longrightarrow B$ je roven $|B|^{|A|}$, protože se každý prvek množiny $A$ musí zobrazit na nějaký (právě jeden) prvek z množiny $B$ a tedy pro každý takový prvek existuje tolik možností zobrazení, kolik má množina $B$ prvků (více rozebráno v příkladu [1.5.B4]). Aby bylo zobrazení injektivní, musí mít množina $A$ méně nebo stejně prvků, jako množina $B$, jinak nelze zobrazit každé dva různé prvky množiny $A$ na dva různé prvky množiny $B$. Aby bylo zobrazení surjektivní, musí mít množina $A$ stejně nebo více prvků než množina

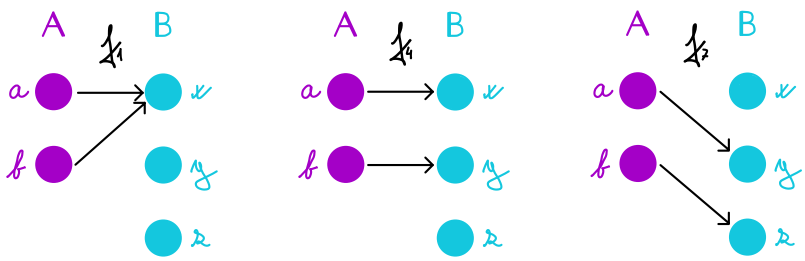
$B$, protože jinak by nemohly mít všechny prvky množiny $B$ alespoň jeden vzor v množině $A$. Bijektivní zobrazení je takové, které je i injektivní i surjektivní, tedy bijektivní zobrazení lze nalézt pouze mezi množinami, které mají stejný počet prvků.

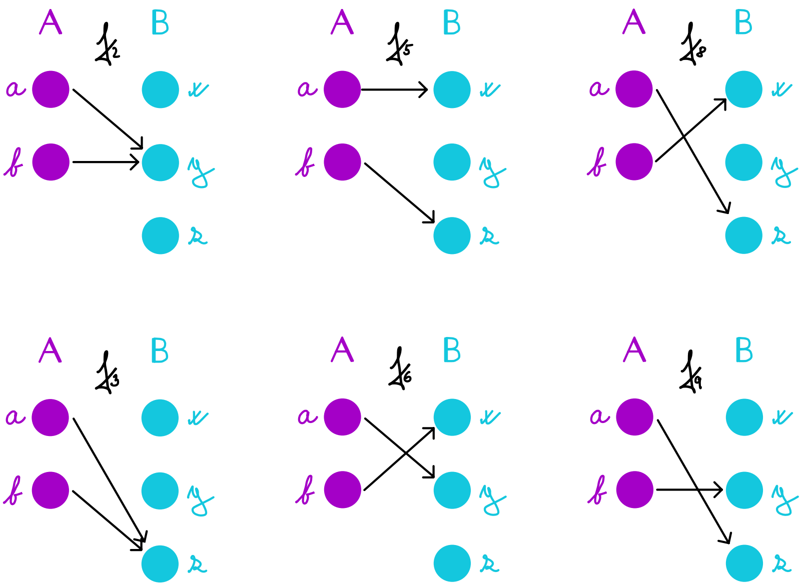
a) Množina $A$ má tři prvky a množina $B$ dva prvky, tedy mezi nimi lze najít $2^3 = 8$ zobrazení. Protože $|A| > |B|$, nebude ani jedno z těchto zobrazení injektivní, tedy ani bijektivní. Surjektivních zobrazení je 6: $f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$.




Zobrazení samozřejmě lze zadat i jinak než pomocí schématu, a to výpisem obrazů jednotlivých vzorů. Například pro $f_1$ by to bylo $f_1(a) = x, f_1(b) = x, f_1(c) = x$ nebo zkráceně $f_1(a) = f_1(b) = f_1(c) = x$ (pro ostatní zobrazení zkuste napsat tento zápis sami).
Aby se nějaké zobrazení nezapomnělo, je dobré na začátku spočítat, kolik jich je třeba najít (v tomto případě bylo vypočteno, že je jich $2^3 = 8$). Dále pak najít nějaký systém v kreslení - zde se například nejprve zobrazují všechny prvky množiny $A$ na jeden prvek množiny $B$, poté se vytvoří všechny možné dvojice prvků z $A$, které se zobrazí na tentýž prvek množiny $B$ a zbývající prvek množiny $A$ se poté zobrazí na jiný prvek množiny $B$ než zmiňovaná dvojice. Jiná možnost zde není.

b) Množina $A$ má dva prvky a množina $B$ má tři prvky, tedy mezi nimi existuje $3^2 = 9$ zobrazení. Protože $|A| < |B|$, nebude ani jedno z těchto zobrazení surjektivní, tedy ani bijektivní. Injektivních zobrazení bude 6: $f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9$.





Zde je opět možné zadat jednotlivá zobrazení pomocí výpisu, který říká, kam se zobrazí jednotlivé prvky množiny $A$.
Při kreslení těchto zobrazení jsem zde opět začala tak, že jsem oba prvky množiny $A$ zobrazila na stejný prvek množiny $B$. Poté jsem našla všechny možné kombinace, kdy se prvky množiny $A$ zobrazí na dva různé prvky množiny $B$.
Zobrazení lze také zapsat jako uspořádané dvojice v pořadí $(vzor, obraz)$. Tedy například zobrazení $f_1$ by bylo $(a,x),(b,x)$ (pro ostatní zobrazení zkuste sami). Toto se může hodit při studiu relací.

**[1.5.B3].** Zadejte (výčtem prvků) množinu $A^B$ a množinu $B^A$, je-li:

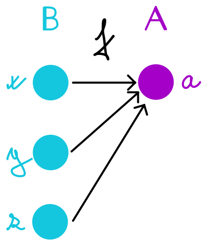
a) $A = \{a\}$, $B = \{x,y,z\}$,

b) $A = B = \{x,y\}$.

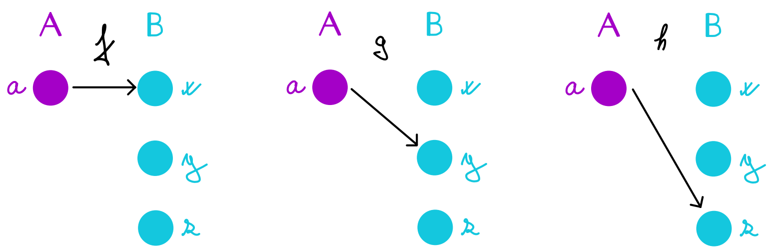
*Řešení.* Množina $A^B$ označuje množinu všech zobrazení $B \longrightarrow A$, podobně množina $B^A$ je množina všech zobrazení $A \longrightarrow B$. Počet prvků těchto množin lze určit jako počet možných zobrazení $A \longrightarrow B$, který je roven $|B|^{|A|}$, resp. $B \longrightarrow A$ je roven $|A|^{|B|}$.

a) Množina $A$ má jeden prvek a množina $B$ má tři prvky, tedy:

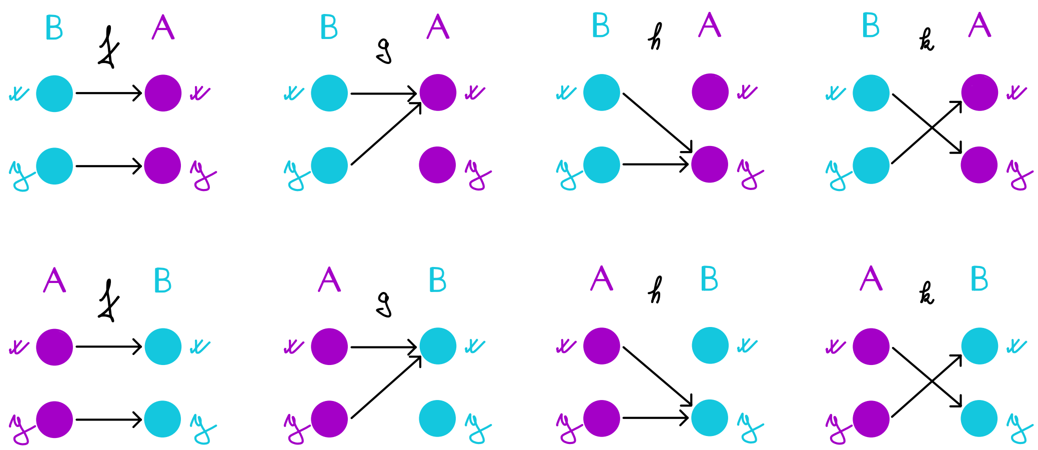
- Množina $A^B$ bude mít $1^3 = 1$ prvek, a to zobrazení $f$, které zobrazí všechny prvky množiny $B$ ($B = \{x,y,z\}$) na jediný prvek množiny $A$ ($A = \{a\}$): $A^B = \{f\}; f(x) = f(y) = f(z) = a$.



- Množina $B^A$ bude mít $3^1 = 3$ prvky, a to zobrazení $f, g, h$. Jediný prvek množiny $A$ se zobrazí vždy na jeden z prvků množiny $B$: $B^A = \{f, g, h\}; f(a) = x, g(a) = y, h(a) = z$.




b) Množiny $A$ i $B$ mají dva (stejné) prvky. Tedy množina $A^B$ a množina $B^A$ budou mít obě $2^2 = 4$ prvky: $B^A = A^B = \{f, g, h, k\}; f(x) = x, f(y) = y$ ($f$ je identita), $g(x) = x, g(y) = x, h(x) = y, h(y) = y, k(x) = y, k(y) = x$.



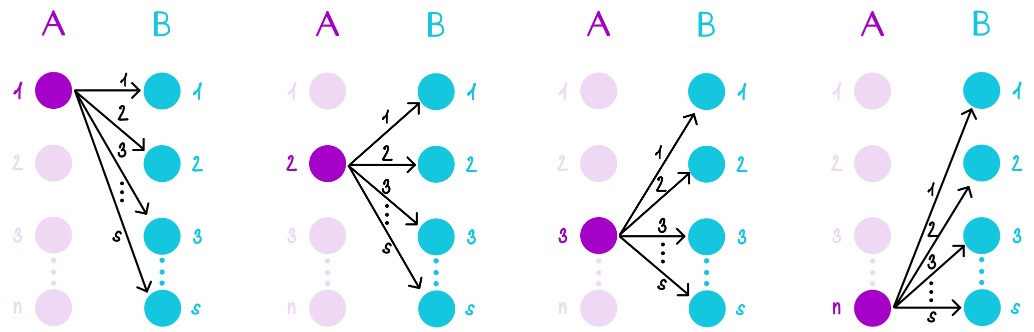

**[1.5.B4].** Nechť $A$ je $n$-prvková množina, $B$ je $s$-prvková množina ($n, s \in \mathbb{N}$). Dokažte, že počet všech zobrazení $A \longrightarrow B$ je roven $s^n$.
Návod: důkaz veďte matematickou indukcí vzhledem k $n$.

*Důkaz matematickou indukcí.* Tento důkaz má dva kroky:

1. V prvním kroku je třeba dokázat, že toto tvrzení platí pro $n = 1$: tedy množina $A$ má jeden prvek a množina $B$ má $s$ prvků, tzn. jediný prvek z množiny $A$ se zobrazí na některý prvek z množiny $B$, tedy má $s$ možností, kam se zobrazit a tím pádem existuje $s$ zobrazení $A \longrightarrow B$ ($s = s^1 = s^n$).

2. V druhém kroku se předpokládá, že tvrzení platí pro $n = 1, 2, 3, \ldots, k$ (speciálně pro $n = k$ je počet zobrazení $k$-prvkové množiny $A$ do $s$ prvkové množiny $B$ roven $s^k$), a dokáže se pro $n = k+1$: je počet zobrazení $(k+1)$-prvkové množiny $A$ do $s$-prvkové množiny $B$ $s^{k+1}$? Pro $k$ prvků to platí podle předpokladu a když se přidá ještě jeden prvek, který se může opět zobrazit na libovolný prvek z $s$ prvků množiny $B$, je podle pravidla součinu počet možných zobrazení $k+1$-prvkové množiny $A$ do $s$-prvkové množiny $B$ roven
$$s^k \cdot s = s^k \cdot s^1 = s^{k+1}.$$

Tedy bylo dokázáno, že počet zobrazení $n$-prvkové množiny $A$ do $s$-prvkové množiny $B$ je $s^n$. □




*Jiný důkaz.* Každý prvek množiny $A$ má $s$ možností, jak se může zobrazit do množiny $B$. Má-li tedy množina $A$ $n$ prvků, počet všech možných zobrazení $A \longrightarrow B$ je

$$\underbrace{s \cdot s \cdot s \cdot \dots \cdot s}_{n} = s^n.$$

Tento důkaz je zde uveden navíc. Nicméně mi připadá snadnější a lépe pochopitelný. □

**[1.5.B5].** Rozhodněte, zda dané zobrazení $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ je injektivní, resp. surjektivní, je-li pro každé $x \in \mathbb{N}$:

a) $f(x) = 5x - 3$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{pro } x \leq 6 \\ x - 6 & \text{pro } x > 6 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pro } x \text{ sudé} \\ x + 1 & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}$

*Řešení.* Zobrazení $f : A \longrightarrow B$ je injektivní, pokud rovnají-li se obrazy, tak se rovnají i jejich vzory. V řeči šipek to znamená, že ke každému prvku množiny $B$ vede nejvýše jedna šipka. Surjektivní je, pokud lze ke každému prvky množiny obrazů najít alespoň jeden vzor. V řeči šipek je zobrazení surjektivní, pokud ke každému prvku množiny $B$ vede alespoň jedna šipka. Bijektivní je zobrazení, které je injektivní a surjektivní zároveň, tedy v řeči šipek vede ke každému prvku množiny $B$ právě jedna šipka.

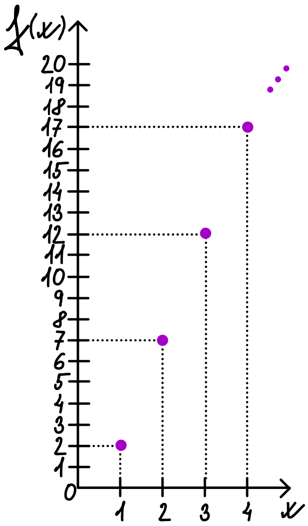
a) <u>Injektivní?</u>

Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

$$x, y \in \mathbb{N} : f(x) = f(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 3 = 5y - 3 \Rightarrow x = y.$$

Toto zobrazení **je** injektivní.
<u>Surjektivní?</u>
**Není**, protože např. $f(x) = 1$ nikdy nenastane (neexistuje takové $x \in \mathbb{N}$, které se zobrazí na číslo jedna).



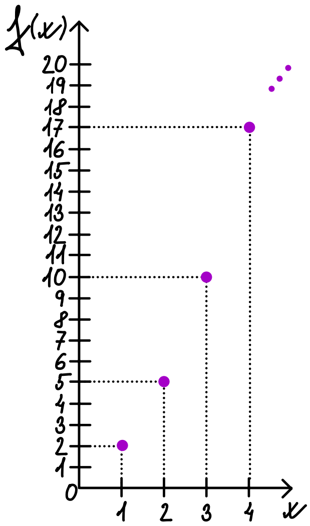

b) <u>Injektivní?</u>

Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

$$x, y \in \mathbb{N} \colon f(x) = f(y) \Rightarrow$$

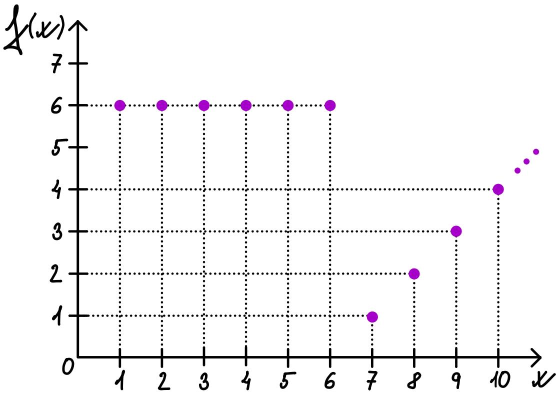
$$\Rightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Rightarrow x = y.$$

Poslední (druhá) implikace platí, protože se jedná o zobrazení $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Toto zobrazení tedy **je** injektivní.
<u>Surjektivní?</u>
**Není**, protože např. $f(x) = 1$ nikdy nenastane (číslo jedna nemá žádný vzor).



c) Injektivní?

**Není**, protože např. $f(1) = f(2)$, ale $1 \neq 2$.
Surjektivní?
Pro všechna $f(x) \in \mathbb{N}$ lze najít vzor dle předpisu $x = f(x) + 6$, který vznikl pouhým prohozením $x$ a $f(x)$ v předpisu tohoto zobrazení a vyjádření $x$. Tedy každý obraz má alespoň jeden vzor a toto zobrazení **je** surjektivní.




d) Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

$$x, y \in \mathbb{N} : f(x) = f(y) \Rightarrow$$

- Pro $x, y$, která jsou čísla lichá:

$$\Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y.$$

- Pro $x, y$, která jsou čísla sudá:

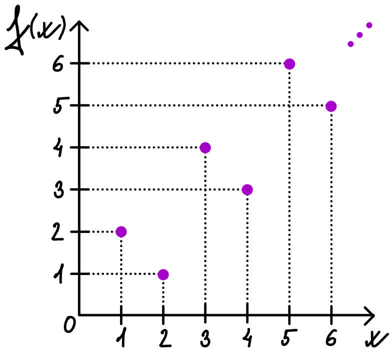
$$\Rightarrow x - 1 = y - 1 \Rightarrow x = y.$$

- Pro $x, y$, kde jedno je liché a druhé sudé nelze předpokládat $f(x) = f(y)$, protože liché číslo se nikde nebude rovnat sudému.

Toto zobrazení **je** injektivní.
Surjektivní?
Předpis, dle kterého lze nalézt ke každému obrazu vzor, se získá opět pouhým prohozením $x$ a $f(x)$ v předpisu tohoto zobrazení a vyjádřením $x$:

$$x = \begin{cases} f(x) - 1 & \text{pro } f(x) \text{ sudé,} \\ f(x) + 1 & \text{pro } f(x) \text{ liché.} \end{cases}.$$

Zobrazení **je** tedy i surjektivní, takže je bijektivní.




**[1.5.B6].** Rozhodněte, zda dané zobrazení $f$ je injektivní, resp. surjektivní, je-li:

a) $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$

b) $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$

c) $f : \mathbb{Q} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}^+, f(x) = x^2$

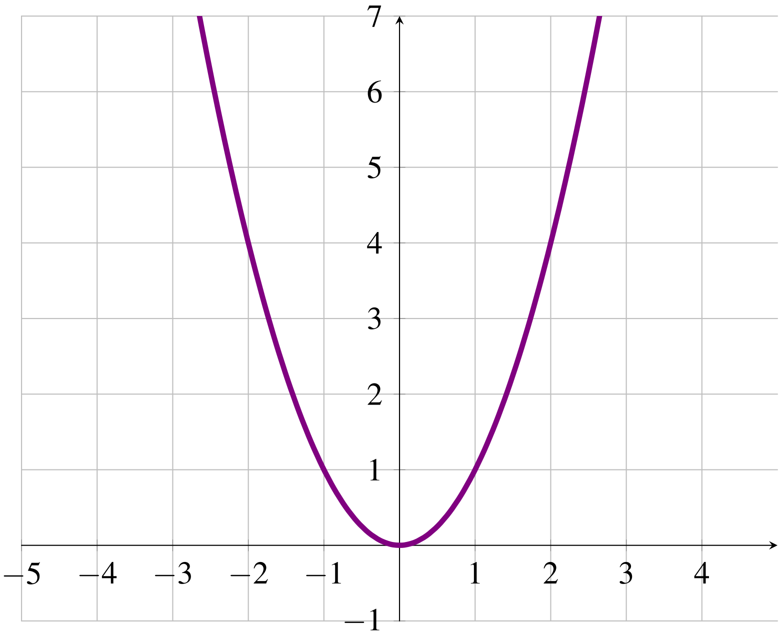
d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 7x + 12$

e) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+3} & \text{pro } x \neq -3 \\ 1 & \text{pro } x = -3 \end{cases}$

f) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \text{ sudé} \\ \frac{3-x}{2} & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}$

*Řešení.*

a) Injektivní?
**Není**, protože např. $f(1) = f(-1)$, ale $1 \neq -1$.
Surjektivní?
Pro všechna $f(x) \in \mathbb{R}^+$ lze najít vzor $x$ podle předpisu $x = \sqrt{f(x)}$. To platí proto, že množina vzorů je $\mathbb{R}^+$, tedy kladná reálná čísla. Pro ty je odmocnina definovaná a je z $\mathbb{R}^+$ (kdyby byla množina obrazů množina všech reálných čísel, už by to nefungovalo). Toto zobrazení tedy **je** surjektivní.
Pro lepší názornost je zde graf funkce $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$. Tato funkce je stejná jako zde definované zobrazení, až na to, že zde do definičního oboru patří i nula. Pokud by nepatřila, byly by to dvě totožné věci. Z toho jde vidět, že funkce jsou také zobrazení (, ty ze střední školy na množině reálných čísel). Z grafu je také dobře vidět, že každý obraz má dva vzory, tedy zobrazení není injektivní. Dále také, že odmocněním funkční hodnoty skutečně lze dostat pro každý obraz vzor, a to ten z kladné části definičního oboru. Zobrazení tedy je surjektivní.



b) Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

$$x, y \in \mathbb{R}^+ : f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y.$$

Poslední implikace platí, protože množina vzorů je množina pouze reálných kladných čísel. A toto zobrazení tak injektivní **je**.
Surjektivní?
Zde lze použít stejný předpis pro hledání vzorů jednotlivých obrazů, jako v a): pro všechna $f(x) \in \mathbb{R}^+ : x = \sqrt{f(x)} \in \mathbb{R}^+$. Toto zobrazení **je** i surjektivní. Protože byla dokázáno i injektivita i surjektivita, je toto zobrazení také bijektivní.
Graf tohoto zobrazení je pravá polovina grafu v a) (tedy od svislé osy doprava bez nuly). Z tohoto grafu je vidět jak injektivita, tak surjektivita, a tedy i bijektivita tohoto zobrazení: každý obraz má právě jeden vzor.

c) Injektivní?
**Není**, protože např. $f(1) = f(-1)$, ale $1 \neq -1$.
Surjektivní?
**Není**, protože např. pro obraz $f(x) = 3 \in \mathbb{Q}^+$ by musel být vzor $x = \sqrt{3}$, ale $\sqrt{3} \neq \mathbb{Q} - \{0\}$.

d) Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, pro které platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

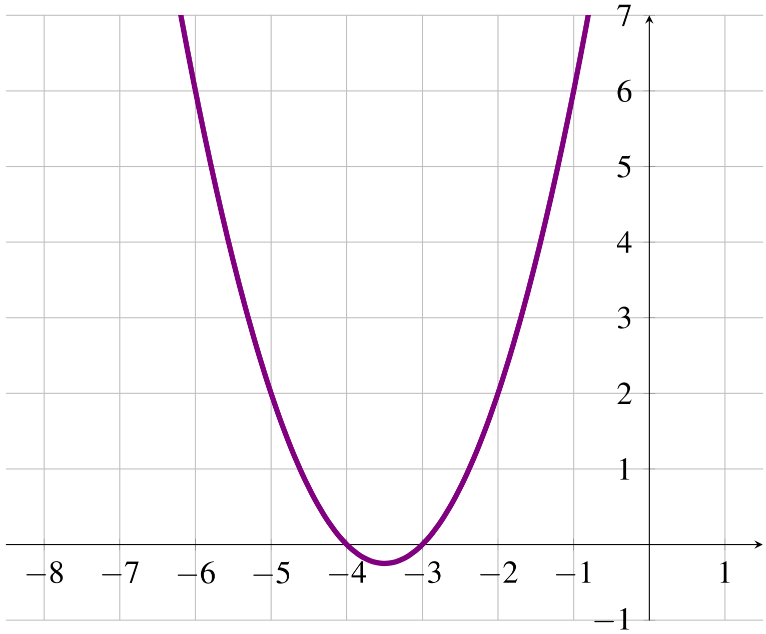
$$x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 + 7x + 12 = y^2 + 7y + 12 \Rightarrow x^2 + 7x = y^2 + 7y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x+7) = y(y+7) \Rightarrow x = y \vee (x = 0 \wedge y = -7) \vee (x = -7 \wedge y = 0).$$

Je tedy zřejmé, že injektivní toto zobrazení **není**, protože jeden obraz může mít více vzorů (konkrétně obraz 0 má vzory 0 a $-7$).
Surjektivní?
**Není**, protože např.

$$f(x) = -2 : -2 = x^2 + 7x + 12 \Rightarrow x^2 + 7x + 14 = 0 \Rightarrow D = -7 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}.$$

Slovy: prvek $-2 \in \mathbb{R}$ nemá žádný vzor.
Toto zobrazení je na grafu níže. Je vidět, že se jedná pouze o drobnou modifikaci příkladu z bodu a).




e) Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

$$x, y \in \mathbb{Q} : f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x+2}{x+3} = \frac{y+2}{y+3} \Rightarrow x = y.$$

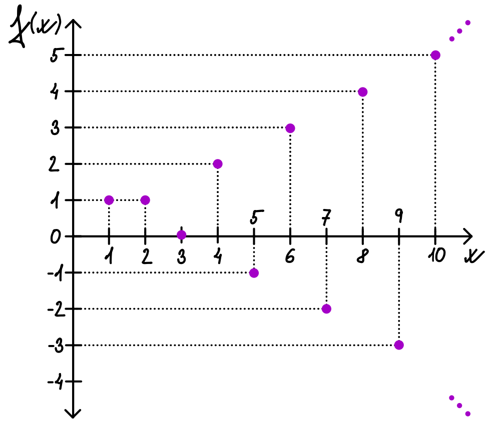
Vypadá to, že toto zobrazení injektivní, mohlo by se to ovšem pokazit, kdyby se zlomek $\frac{x+2}{x+3}$ rovnal jedné, což ale nikdy nenastane, takže toto zobrazení skutečně **je** injektivní.

$$\left(\frac{x+2}{x+3} = 1 \Rightarrow x+2 = x+3 \Rightarrow 2 \neq 3\right)$$

Surjektivní?
**Není**, protože např. $f(x) = \frac{1}{3}$ nemá vzor v množině celých čísel.

$$\left(\frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{3}x + 1 = x+2 \Rightarrow \frac{2}{3}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}\right)$$

f) Injektivní?
**Není**, protože např. $f(1) = f(2)$, ale $1 \neq 2$.
Surjektivní?
Pro nalezení předpisu, dle kterého lze najít každému obrazu vzor, zde velmi pomůže schéma:




Zde je vidět, že nejlepší bude rozdělit obrazy na tři části - nula, kladná čísla, záporná čísla, přičemž pak vznikne předpis:

$$x = \begin{cases} 3 & \text{pro } f(x) = 0 \\ 2f(x) & \text{pro } f(x) > 0 \\ 3 - 2f(x) & \text{pro } f(x) < 0 \end{cases},$$

a protože podle něj lze najít ke všem obrazům vzor, **je** toto zobrazení surjektivní.

**[1.5.B7].** Rozhodněte, zda dané zobrazení $f$ je injektivní, resp. surjektivní, je-li:

a) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad f((x,y)) = x + y$

b) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad f(x) = (2x, 2x+1)$

c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}, \qquad f((x,y)) = \{x, y\}$

d) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \{1,2,3\}, \qquad f(x) = \begin{cases} (\frac{x}{3}, 1) & \text{pro } x \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ (\frac{x-1}{3}, 2) & \text{pro } x \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ (\frac{x+1}{3}, 3) & \text{pro } x \equiv 2 (\text{mod } 3) \end{cases}$

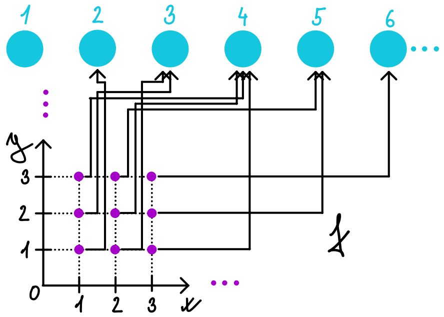
e) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad f((x,y)) = \begin{cases} (\frac{y}{2}, x) & \text{pro } y \text{ sudé, přirozené} \\ (\frac{1-y}{2}, x) & \text{pro } y \text{ liché, přirozené} \end{cases}$

f) $f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad f(A) = \begin{cases} a_0 & \text{kde } a_0 \text{ je nejmenší číslo z } A \text{, je-li } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{je-li } A \neq \emptyset \end{cases}$

*Řešení.* Před samotným řešením je dobré ujasnit si, co znamenají jednotlivé značky ze zadání:

- $A \times A$ je množina všech uspořádaných dvojic, kde první složka je z množiny $A$ a druhá z množiny $B$, např. $A = \{1,2\}, B = \{a,b\} : A \times B = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}$,
- $2^A$ je množina všech podmnožin množiny A (např. $A = \{1,2,3\} : 2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.

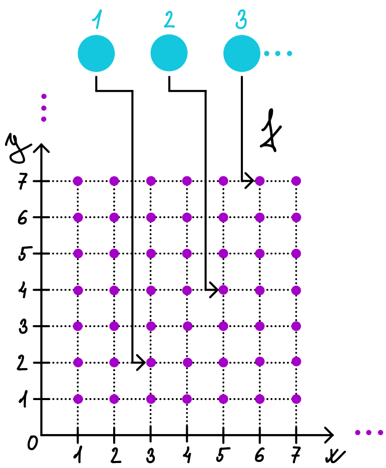
a) Injektivní?
**Není**, protože např. $f((1,2)) = f((2,1))$, ale $(1,2) \neq (2,1)$ (uspořádané dvojice se rovnají, když se rovnají jejich odpovídající si složky).
Surjektivní?
**Není**, protože pro $f((x,y)) = 1$ neexistuje vzor ($\nexists x,y \in \mathbb{N} : x+y=1$).




b) Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x,y \in \mathbb{N}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

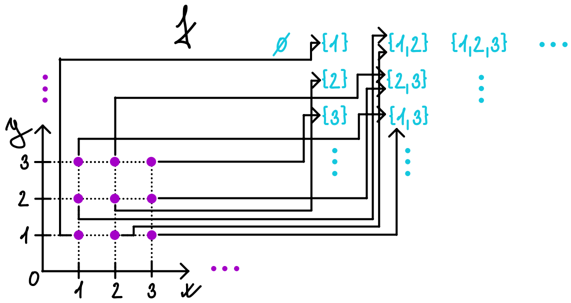
$$x,y \in \mathbb{N} : f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \wedge 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow x = y \Rightarrow \textbf{je injektivní.}$$

Surjektivní?
**Není**, protože např. $f(x) = (1,1)$ nemá vzor $x \in \mathbb{N}$ ($2x = 1 \wedge 2x+1 = 1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{N}$, $2x$ se nemůže zároveň rovnat dvěma různým číslům, navíc $2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$).




c) Injektivní?
**Není**, protože např. $f((1,2)) = f((2,1)) \Rightarrow \{1,2\} = \{2,1\}$ (množiny se rovnají, mají-li stejné prvky), ale $(1,2) \neq (2,1)$.
Surjektivní?
**Není**, protože např. prázdná množina $\emptyset$ nemá vzor. (Vzor mají pouze jednoprvkové

a dvouprvkové množiny - uspořádaná dvojice má dva stejné nebo dva různé prvky.)




d) Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

$$x, y \in \mathbb{Z} : f(x) = f(y) \Rightarrow \underbrace{x \equiv y (\bmod 3)}_{\text{jinak by se nerovnala druhá složka a tedy by neplatilo} f(x)=f(y)} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{stačí porovnat první složky}}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{3} & \Rightarrow x = y \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} & \Rightarrow x = y \Rightarrow \textbf{je} \text{ injektivní.} \\ \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{3} & \Rightarrow x = y \end{cases}$$

Aby se rovnaly dvě uspořádané dvojice, musí se rovnat jejich odpovídající si složky. Aby se rovnala druhá složka, musí být splněna kongruence $x \equiv y (\bmod 3)$, neboť tato složka je určena podle zbytku po dělení trojkou a budou se tedy rovnat pro čísla, která mají tento zbytek stejný. Kongruencí je tedy zajištěno, že se rovnají druhé složky. Poté už stačí pouze pro jednotlivé případy porovnat první složky.
Surjektivní?
Při hledání předpisu, dle kterého lze najít pro každý obraz vzor, je zde dobré najít několik obrazů různých vzorů:

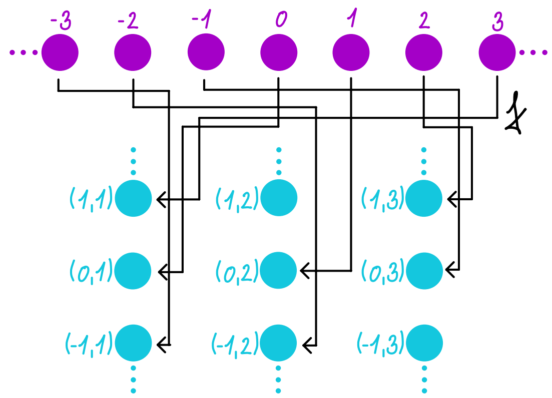
$$f(-4) = (-1,3); f(-3) = (-1,1); f(-2) = (-1,2); f(-1) = (0,3)$$
$$f(0) = (0,1); f(1) = (0,2); f(2) = (1,3); f(3) = (1,1), f(4) = (1,2)$$

Z toho je vidět, že bude dobré rozdělit si výsledné obrazy (uspořádané dvojice) do třech skupin podle jejich druhé složky. Dále už pro každou trojici stačí najít předpis, dle kterého bude možné získat z první složky obrazu vzor:

$$x = \begin{cases} 3k & \text{pro } f(x) = (k,1) \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \\ 3k+1 & \text{pro } f(x) = (k,2), \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \\ 3k-1 & \text{pro } f(x) = (k,3), \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ke každému obrazu (uspořádané dvojici) tedy podle tohoto předpisu lze najít vzor $x$ a toto zobrazení **je** surjektivní.

Protože je zobrazení injektivní i surjektivní, je bijektivní.




e) Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $(x,y),(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, pro která platí $f((x,y)) = f((a,b))$, je $(x,y) = (a,b)$:

$$(x,y),(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \Rightarrow f((x,y)) = f((a,b))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \text{ i } b \text{ jsou sudé: } \frac{y}{2} = \frac{b}{2} \wedge x = a \Rightarrow y = b \wedge x = a \Rightarrow (x,y) = (a,b) \\ y \text{ i } b \text{ jsou liché: } \frac{1-y}{2} = \frac{1-b}{2} \wedge x = a \Rightarrow y = b \wedge x = a \Rightarrow (x,y) = (a,b) \\ y \text{ je liché a } b \text{ sudé: } \frac{1-y}{2} = \frac{b}{2} \wedge x = a \Rightarrow 1 - y = b \wedge x = a \Rightarrow \text{nelze} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textbf{je} \text{ injektivní.}$$

Poslední možnost nikdy nenastane, protože $y, b \in \mathbb{N}$, tzn. když $b \in \mathbb{N}$, tak musí také $(1-y) \in \mathbb{N}$, ale také $y \in \mathbb{N}$, z čehož plyne, že takové $y$ neexistuje, protože pokud se do výrazu $1-y$ dosadí jakékoli $y \in \mathbb{N}$ vyjde nula nebo záporné číslo, ty ale nepatří do množiny přirozených čísel, tedy $f((x,y)) = f((a,b))$ nikdy pro kombinaci lichého a sudého druhého členu nenastane (pro $b$ liché a $y$ sudé a vyjde stejně jako pro $y$ liché a $b$ sudé).
Surjektivní?

$$(x,y) = \begin{cases} x = x \wedge y = 1 - 2k & \text{pro } f((x,y)) = (k,x), \text{ kde } k \leq 0 \\ x = x \wedge y = 2k & \text{pro } f((x,y)) = (k,x), \text{ kde } k > 0 \end{cases}$$

Tento předpis vychází z toho, že pokud je druhá složka zobrazované uspořádané dvojice sudá, první složka výsledné uspořádané dvojice bude kladná. Naopak pokud je druhá složka zobrazované uspořádané dvojice lichá, první složka výsledné uspořádané dvojice bude nekladná (záporná nebo nula). Proto se nabízí rozdělit obrazy na případy, kdy je jejich první složka kladná a kdy nekladná. První složka zobrazované uspořádané dvojice je stejná jako druhá složka výsledné dvojice, a proto nic nebrání tomu rozdělit obrazy pouze podle jejich první složky, druhá složka budou v obou případech určovat hodnotu první složky vzoru.
Protože podle takto vytvořeného předpisu lze najít ke každému obrazu vzor (např. pro obraz $(1,2)$ je vzor $(2,2)$, protože první složka tohoto vzoru je stejná jako druhá

složka obrazu a druhá složka vzoru je dva, protože první složka obrazu je větší než nula a tedy se druhá složka vzoru počítá jako dvojnásobek této první složky obrazu), **je** toto zobrazení surjektivní, a jelikož je i injektivní, je také bijektivní.

f) Injektivní?
**Není**, protože např. $f(\emptyset) = f(\{1,2,3\})$, ale $\emptyset \neq \{1,2,3\}$.
Surjektivní?
Zde je třeba najít takový předpis, který každému obrazu z množiny přirozených čísel přiřadí množinu, ve které je tento prvek nejmenším. Jednou z možností je předpis:

$$x \in \mathbb{N} : x = f(\{x\}).$$

Předpisů, dle kterých je možné najít ke každému obraz vzor je zde nekonečně mnoho. Tento je ovšem asi nejnázornější - vzorem obrazu $x \in \mathbb{N}$ je zde množina obsahující pouze toto $x$, tedy je zde nejmenší.
Zobrazení **je** tedy surjektivní.

**[1.5.B8].** Nechť $A$ je $n$-prvková množina, $B$ je $s$-prvková množina ($n, s, \in \mathbb{N}$). Určete počet všech:

a) bijektivní zobrazení $A \longrightarrow B$

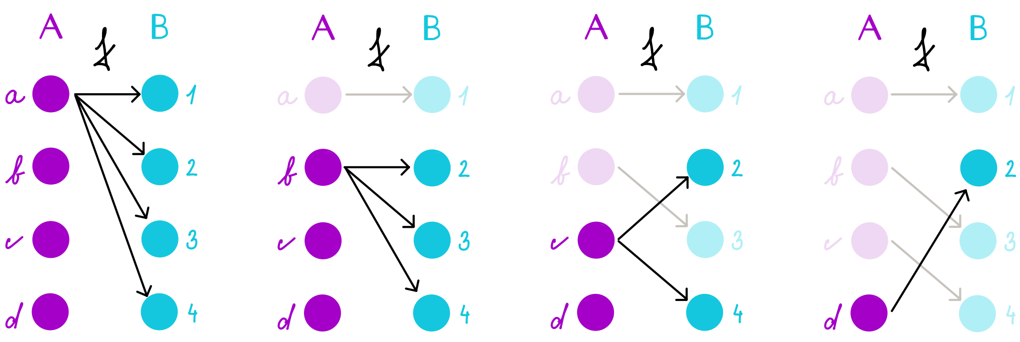
b) injektivní zobrazení $A \longrightarrow B$

*Řešení.*

a) Aby bylo možné vytvořit bijektivní zobrazení, musí být $n = s$ (pokud se mají každé dva prvky zobrazit na dva různé a zároveň každý obraz má mít vzor, musí mít množiny $A$ a $B$ stejný počet prvků). Pokud se tedy $n \neq s$, neexistuje **žádné** bijektivní zobrazení $A \longrightarrow B$. Pokud ale $n = s$, těchto zobrazení bude $\boldsymbol{n!}$, resp. $s!$ ($n! = s!$). To proto, že první prvek má $s$-možností, kam se zobrazit, druhý už má o jednu možnost méně, neboť se nemůže zobrazit na stejný prvek jako první, tedy má $s-1$ možností, třetí prvek už se může zobrazit pouze na $s-2$ prvků, až poslednímu prvku zbude pouze jediná možnost (protože $n = s$):

$$s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = \boldsymbol{s! = n!}$$

Pro lepší pochopení lze ukázat tuto skutečnost na schématu:



Množiny $A$ i $B$ jsou zde 4-prvkové (je tedy splněno, že $n = s$, $n = s = 4$). Prvek $a \in A$ má 4 ($s$) možnosti, kam se může zobrazit a vybere si jednu z těchto možností (zde si vybral prvek $1 \in B$). Prvek $b \in A$ se už tedy nemůže zobrazit na prvek $1 \in B$ (jinak by zobrazení nebylo bijektivní), může se však zobrazit kamkoli jinak, tedy má 3 ($s-1$) možností a opět si vybere jednu z nich (zde si vybral prvek $3 \in B$). Prvek $c \in A$ se již nemůže zobrazit na prvky $1,3 \in B$ a má tedy dvě ($s-2$) možnosti a vybere si opět jednu (zde si vybral $4 \in B$). Na prvek $d \in A$ poté zbude možnost jediná (v tomto případě prvek $2 \in B$). Bijektivních zobrazení je tedy

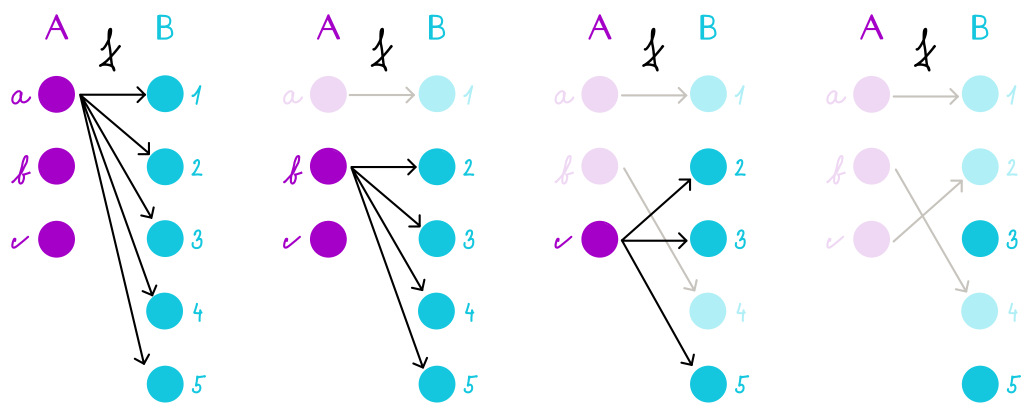
$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = s! = n!.$$

b) Toto zobrazení bude injektivní, jestli se každé dva různé prvky z množiny $A$ zobrazí na dva různé prvky z množiny $B$. Aby takové zobrazení vůbec existovalo, musí být $n \leq s$ (pro $n = s$ by byla také surjektivní, tedy by byla zobrazení bijektivní, což je rozebráno v předchozím bodu). Pokud je tedy $n > s$ neexistuje **žádné** takové injektivní zobrazení. Jestliže však $n \leq s$, pak taková zobrazení existují a je jich $\boldsymbol{\frac{s!}{(s-n)!}}$. Je tomu tak proto, že první prvek množiny $A$ má $s$ možností, kam se může zobrazit, druhý už pouze $(s-1)$ možností, protože se nemůže zobrazit na stejný prvek jako ten první, až $n$-tý prvek má $(s-(n-1))$ možností, kam se může zobrazit, protože se nemůže již zobrazit na žádný z prvků, na které už se zobrazilo předchozích $(n-1)$ prvků:

$$s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \dots \cdot (s-n+1) = \frac{s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-n+1) \cdot (s-n) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(s-n) \cdot (s-n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{s!}{(s-n)!}}$$

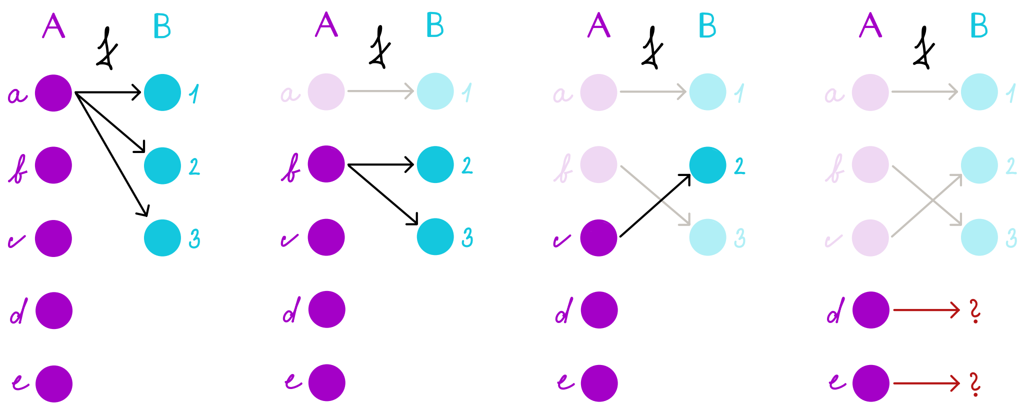
Toto opět lze ukázat na schématu:




Množina $A$ zde má 3 prvky ($n = 3$) a množina $B$ má 5 prvků ($s = 5$). Tedy zde platí $n \leq s$ a lze zde hledat injektivní zobrazení. Prvek $a \in A$ má pět ($s$) možností, kam se může zobrazit a vybere si vždy jednu (zde prvek $1 \in B$). Prvek $b \in A$ má poté pouze čtyři ($s-1$) možnosti, kam se může zobrazit, protože aby bylo zobrazení injektivní, nemůže se zobrazit na stejný prvek jako prvek $a \in A$ a opět si vybere jeden z nich (zde prvek $4 \in B$). Konečně prvek $c \in A$ má již pouze tři ($s-2=s-n$) možností a vybere si opět jednu (zde prvek $2 \in B$). Možných injektivních zobrazení je tedy:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 = s \cdot (s-1) \cdot \underbrace{(s-2)}_{(s-n+1)} = \frac{s!}{(s-n)!}$$

Na schématu také lze ukázat, proč pro $n > s$ neexistuje žádné injektivní zobrazení:




Na tomto schématu je vidět, že pro případ, kdy $n > s$, nelze vytvořit žádné injektivní zobrazení, protože v takovém případě nikdy nebudou mít každé dva prvky množiny $A$ různé obrazy.

**[1.5.B9].** Nechť $f : A \longrightarrow B$ je zobrazení. Dokažte, že platí:

a) $f$ je injektivní $\iff$ existuje zobrazení $g : B \longrightarrow A$ tak, že $g \circ f = id_A$

b) $f$ je surjektivní $\iff$ existuje zobrazení $h : B \longrightarrow A$ tak, že $f \circ h = id_B$.

Návod: při důkazu ”$\Rightarrow$”v (a), resp. v (b) hledané zobrazení $g$, resp. $h$ přímo zkonstruujte.

*Důkaz.* Při důkazu ekvivalence se první dokazuje jeden směr a poté druhý, tedy dvě implikace:

a) „$\Rightarrow$“ Při důkazu tohoto směru je nejjednodušší dané zobrazení přímo zkonstruovat. Pokud je $f$ injektivní, znamená to, že se každé dva různé vzory zobrazí na dva různé obrazy, tedy množina $B$ má stejně či více prvků, než množina $A$ (jinak by mezi jimi nemohlo injektivní zobrazení existovat). Při konstrukci zobrazení $g$ se tedy prvky $b \in B$, které měly v zobrazení $f$ vzor, zobrazí právě na tento vzor $b^* \in A$ a prvky, které neměly vzor, se mohou zobrazit kamkoli, tedy je nejjednodušší zvolit jeden pevný prvek $a_0$ množiny $A$, na který se zobrazí všechny takové prvky. Toto zobrazení $g$ tedy bude mít předpis:

$$\text{Pro } x \in B : g(b) = \begin{cases} b^* & \text{má-li prvek } b \text{ při zobrazení } f \text{ vzor} \\ a_0 & \text{nemá-li prvek } b \text{ při zobrazení } f \text{ vzor} \end{cases}$$

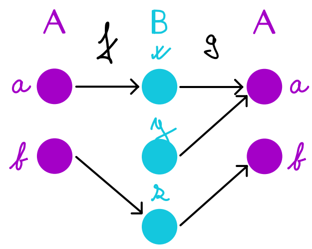
Zobrazení $(g \circ f)$ je skutečně $id_A$, neboť se každý prvek zobrazený zobrazením $(g \circ f)$ zobrazí sám na sebe.

„⇐“ Při důkazu tohoto směru se musí dokázat, že pokud je $g \circ f = id_A$, pak musí být zobrazení $f$ injektivní. (Aby toto složené zobrazení mohlo být identické, musí být zobrazení $g$ surjektivní, protože každý prvek množiny $A$ musí mít v tomto zobrazení vzor.) Kdyby zobrazení $f$ nebylo injektivní, měly by některé dva prvky množiny $A$ stejný obraz v množině $B$ a při zobrazení zobrazení $g$ už by nebylo možné „rozdělit“ tento jeden prvek množiny $B$ na dva prvky z množiny $A$, protože z definice zobrazení může mít každý vzor pouze jeden obraz.

Ukázka na příkladu:

$$A = \{a,b\}, B = \{x,y,z\} : f(a) = x, f(b) = z$$

$$\Rightarrow g(x) = a, g(y) = a, g(z) = b$$




V tomto příkladě jsme si vyzkoušeli, že jsou-li ve zobrazení $g$ prvky $b \in A = \{a,b\}$ a $b^* \in \{x,z\}$. Prvek $y \in B$ nemá ve zobrazení $f$ vzor, zobrazí se tedy na pevně zvolený prvek $a_0 = a$.

b) „⇒“ Při důkazu tohoto směru ekvivalence je opět nejjednodušší takové zobrazení vytvořit. Když je zobrazení $f$ surjektivní, má každý obraz jeden nebo více vzorů. Pro konstrukci zobrazení $h$ lze zvolit ke každému obrazu $b \in B$ zobrazení $f$ jeden pevný vzor (ze všech jeho vzorů) $b^* \in A$. Zobrazení $h$ pak lze definovat tak, že se každé $b \in B$ zobrazí na $b^* \in A$:

$$h(b) = b^*$$

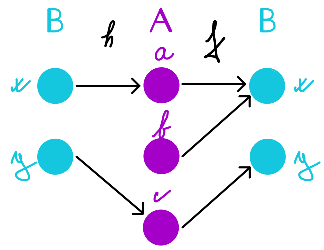
Zobrazení $f \circ h$ tak bude skutečně $id_B$, neboť se při něm každý prvek množiny $B$ zobrazí sám na sebe.

„⇐“ Zde se musí dokázat, že existuje-li zobrazení $f \circ h = id_B$, pak musí být zobrazení $f$ surjektivní. Aby mohlo být toto zobrazení identické, musí se každý prvek množiny $B$ zobrazit sám na sebe, takže každý prvek množiny obrazů (množiny $B$) musí mít alespoň jeden vzor v množině $A$ při zobrazení $f$, což znamená, že $f$ musí být surjektivní, jinak by zde mohl existovat obraz, který nemá žádný vzor a toto složené zobrazení by tak již nemohlo být identitou na $B$.

Ukázka na příkladu:

$$A = \{a,b,c\}, B = \{x,y\} : f(a) = f(b) = x, f(c) = y$$

$$\Rightarrow h(x) = a, h(y) = c$$




V tomto příkladě jsme si vyzkoušeli, že jsou-li pevně zvolené vzory ve zobrazení $f$: pro $b = x$ je to $b^* = a$ (při jiné volbě by to mohlo být i $b^* = b$) a pro $b = y$ je to $b^* = c$ (zde v tomto případě není jiná možnost, neboť $y$ má pouze jeden vzor).

□

**[1.5.B10].** Nechť $f : A \longrightarrow A$ je dané neidentické zobrazení. Dokažte, že pak existuje zobrazení $g : A \longrightarrow A$ takové, že $f \circ g \neq g \circ f$.
Návod: z předpokladu plyne, že v množině $A$ existují dva různé prvky $a, b$ takové, že $f(a) = b$. Této skutečnosti pak využijeme při konstrukci zobrazení $g$.

*Důkaz.* Zobrazení $f$ není identita, tedy alespoň jeden prvek $a \in A$ se nezobrazí sám na sebe, tedy pro tento prvek platí

$$a, b \in A, a \neq b : f(a) = b.$$

Nyní je (stejně jako v příkladu 9) nejjednodušší zobrazení $g$ zkonstruovat. Zobrazení $g$ může být například takové, které zobrazí všechny vzory na jeden pevně zvolený prvek. kterým bude právě ten prvek $a$, který se nezobrazí sám na sebe -

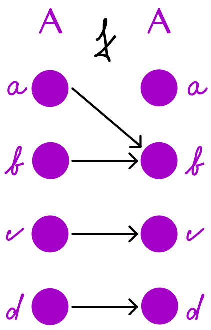
$$\forall x \in A : g(x) = a.$$

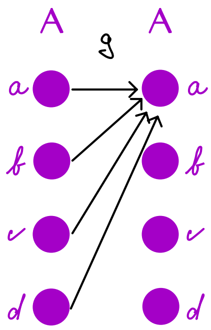
Při takto zvoleném zobrazení $g$ se $\forall x \in A : (g \circ f)(x) = a$ (nejprve se zobrazením $f$ zobrazí všechny prvky libovolně tak, aby $f$ nebylo identické zobrazení a následně se všechny takto získané obrazy zobrazí na pevně zvolený prvek $a$), zatím při složeném zobrazení $(g \circ f)(x) = b$ (nejprve se všechny prvky zobrazí zobrazením $g$ na prvek $a$ a ten se následně zobrazí na prvek $b$, tedy se na prvek $b$ zobrazí tímto složeným zobrazením všechny prvky). Pro lepší pochopení lze tento příklad, který dokazuje existenci zobrazení $g$, ukázat na konkrétní množině a zobrazení $f$:

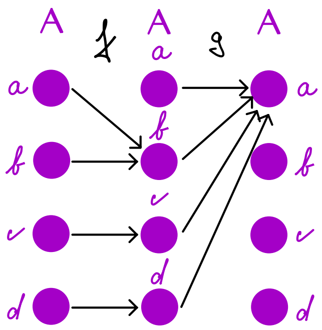
$$A = \{a, b, c, d\}, f : A \longrightarrow A : f(a) = b, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$$

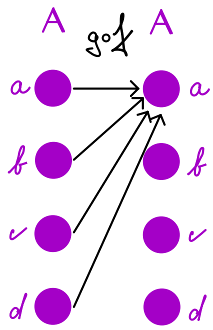
$$g : A \longrightarrow A : f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = a$$

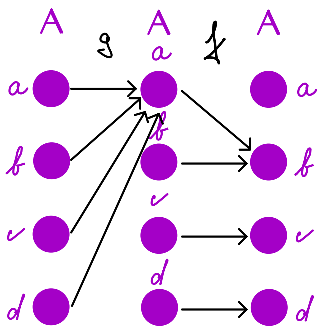
$$\forall x \in A : (g \circ f)(x) = a, (f \circ g)(x) = b \Rightarrow g \circ f \neq f \circ g$$

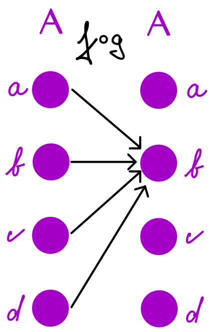



$\square$

**[1.5.B11].** Dokažte, že zobrazení $f : A \longrightarrow B$, je bijektivní. Přitom:

a) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, \qquad f((x,y)) = 2^{x-1}(2y-1)$

b) $A = (a,b), B = (c,d), \qquad f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$

c) $A = (a,b), B = \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = \frac{x-a}{b-x}$

d) $A = (a,b), B = \mathbb{R}$; resp. $p$ je pevné reálné číslo takové, že $a < p < b$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-p}{x-a} & \text{pro } a < x \leq p \\ \frac{x-p}{b-x} & \text{pro } p \leq x < b \end{cases}$$

kde $(a,b), (c,d)$ značí otevřené intervaly na reálné ose.
Návod: v (a) využijte větu o rozkladu čísla na součin prvočísel.

*Řešení.* Při důkazu bijektivity zobrazení je třeba ukázat, že je toto zobrazení injektivní a surjektivní.

a) Toto zobrazení zobrazuje uspořádané dvojice přirozených čísel na přirozená čísla.
Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $(x,y),(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, pro která platí $f((x,y)) = f((a,b))$, je $(x,y) = (a,b)$:

$$(x,y),(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : f((x,y)) = f((a,b)) \Rightarrow 2^{x-1}\cdot(2y-1) = 2^{a-1}\cdot(2b-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^{x}\cdot 2^{-1}\cdot(2y-1) = 2^{a}\cdot 2^{-1}\cdot(2b-1) \Rightarrow 2^{x}\cdot(2y-1) = 2^{a}\cdot(2b-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = a \wedge y = b \Rightarrow (x,y) = (a,b)$$

Předposlední implikace

$$2^{x}\cdot(2y-1) = 2^{a}\cdot(2b-1) \Rightarrow x = a \wedge y = b$$

platí, protože každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel (podle věty o rozkladu čísla na součin prvočísel). Jediné sudé prvočíslo, je číslo 2 a další sudá čísla, jsou jeho mocninou nebo jeho násobkem s lichým číslem (tento násobek však opět lze rozložit na součin mocniny čísla 2 a nějakých dalších lichých prvočísel). Pokud se tedy mají rovnat dvě přirozená čísla, musí mít v rozkladu na prvočísla stejnou mocninu čísla 2. V závorce $(2y-1)$, resp. $(2b-1)$, vždy vyjde liché číslo (dvojnásobek libovolného přirozeného čísla je číslo sudé a po odečtení jedničky od sudého čísla vždy vyjde číslo liché), tedy nedělitelné dvěma. Proto se musí rovnat $x$ a $a$, a tedy i $y$ a $b$. Injektivita tohoto zobrazení tedy byla dokázána.
Surjektivní?
Zde se, stejně jako u důkazu injektivity, využije rozkladu čísla na součin prvočísel. Nejprve je dobré zkusit určit vzory pro několik obrazů, aby šlo lépe vidět, jak toto zobrazení funguje:

$$1 = 2^{\mathbf{1}-1}(2\cdot\mathbf{1}-1) = f((1,1))$$
$$2 = 2^{\mathbf{2}-1}(2\cdot\mathbf{1}-1) = f((2,1))$$
$$3 = 2^{\mathbf{1}-1}(2\cdot\mathbf{2}-1) = f((1,2))$$
$$4 = 2^{2} = 2^{\mathbf{3}-1}(2\cdot\mathbf{1}-1) = f((3,1))$$
$$5 = 2^{\mathbf{1}-1}(2\cdot\mathbf{3}-1) = f((1,3))$$
$$6 = 2\cdot 3 = 2^{\mathbf{2}-1}(2\cdot\mathbf{2}-1) = f((2,2))$$

Z toho jde vidět, že čísla $a \in \mathbb{N}$, která nemají v rozkladu na součin prvočísel, žádnou mocninu dvojky (lichá čísla), budou první člen uspořádané dvojice $(x,y)$ roven $x = 1$. Ze závorky pak lze určit druhý člen $y$ jako

$$a = 2y-1 \Rightarrow y = \frac{a+1}{2}.$$

Pro každé liché číslo tedy lze najít vzor.
Pro sudá čísla $a \in \mathbb{N}$ se při hledání vzoru postupuje podobně. První člen uspořádané

dvojice $(x,y)$ $x$ se zde určí z exponentu $e$ čísla 2 v rozkladu daného $a$ na prvočísla jako

$$x = e + 1,$$

protože dvojka musí mít stejný exponent jako v rozkladu na součin prvočísel a v rovnici tohoto zobrazení je v exponentu $x-1$, tedy aby byly exponenty stejné, musí být $x$ o jedničku větší, než exponent v rozkladu na součin prvočísel. Druhý člen uspořádané dvojice $y$ se určuje ze zbylých členů rozkladu $a$ na součin prvočísel (z lichých členů) - tento součin zde bude značen jako $s$. Součin těchto zbylých čísel musí být roven závorce $(2y-1)$, tedy $y$ lze určit jako

$$s = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{s+1}{2}.$$

Tedy i sudým číslům lze najít vzor. Proto je toto zobrazení také surjektivní a tedy i bijektivní.

b) Zde jde o zobrazení z otevřeného intervalu na reálné ose do otevřeného intervalu na reálné ose, tedy se zde zobrazují reálná čísla z určitého intervalu na reálná čísla z jiného intervalu. Pro lepší orientaci lze spočíst obrazy některých vzorů. Je dobré spočíst, kam by se zobrazila horní a dolní mez tohoto intervalu $a$ a $b$. Protože je tento interval otevřený (tedy meze do něj nepatří), je třeba počítat limitu v těchto bodech:

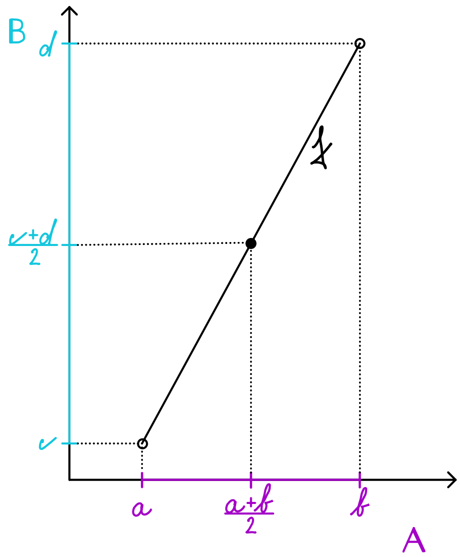
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[c + \frac{d-c}{b-a}\cdot(x-a)\right] = c,$$

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b}\left[c + \frac{d-c}{b-a}\cdot(x-a)\right] = d.$$

Dolní mez $a$ intervalu $(a,b)$ by se tedy v tomto zobrazení zobrazila na dolní mez $c$ intervalu $(c,d)$ a horní mez $b$ na horní mez $d$ (intervaly jsou ovšem otevřené, tudíž tam tyto body nepatří, ale je na nich dobře vidět, jak toto zobrazení funguje). Dále je dobré zkusit, kam by se zobrazil nějaký jiný bod intervalu $(a,b)$, a to například jeho střed, kterým je bod $\frac{a+b}{2}$:

$$f(\frac{a+b}{2}) = c + \frac{d-c}{b-a}(\frac{a+b}{2} - a) = c + \frac{d-c}{b-a}\cdot\frac{b-a}{2} = c + \frac{d-c}{2} = \frac{c+d}{2}.$$

Střed intervalu $(a,b)$ se tedy zobrazí na střed intervalu $(c,d)$. Stejně tak by se bod nacházející se ve čtvrtině intervalu $(a,b)$ zobrazil na bod nacházející se ve čtvrtině intervalu $(c,d)$: $f(\frac{3a+d}{4}) = \frac{3c+d}{4})$ apod.




Injektivní?

Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x,y \in (a,b), a,b \in \mathbb{R}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

$$x,y \in (a,b), a,b \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \Rightarrow c + \frac{d-c}{b-a}(x-a) = c + \frac{d-c}{b-a}(y-a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - a = y - a \Rightarrow x = y$$

Problém by zde mohl nastat pouze v případě, kdy by se dělilo nulou, ale zlomek $\frac{d-c}{b-a}$ nikdy nula nebude, protože $c \neq d$ a $a \neq b$, jinak by to nebyly otevřené intervaly (kdyby $c = d$ nebo $a = b$, pak by byl interval, pro který by toto platilo vlastně prázdná množina, protože by byl např. $(a,a)$, ale do otevřeného intervalu nepatří krajní body - horní a dolní mez, takže by se nejednalo o otevřený interval, ale prázdnou množinu). Injektivní tedy toto zobrazení je.

Surjektivní?

Zde stačí z předpisu zobrazení vyjádřit $x$:

$$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) \Rightarrow x = \frac{(f(x)-c)\cdot(b-a)}{d-c} + a$$

Podle tohoto předpisu lze každému prvku z intervalu $(c,d)$ nalézt vzor. Nyní je ještě třeba ověřit, zda budu tento vzor vždy z intervalu $(a,b)$, tedy

$$a < \frac{(f(x)-c)\cdot(b-a)}{d-c} + a < b.$$

Nejprve se budeme zabývat nerovností

$$a < \frac{(f(x)-c)\cdot(b-a)}{d-c} + a.$$

Na obou stranách této nerovnosti se nachází $+a$, což tedy můžeme odečíst od obou stran a dostaneme nerovnost

$$0 < \frac{(f(x)-c)\cdot(b-a)}{d-c}.$$

Dále budeme zkoumat znaménka jednotlivých závorek – jsou tři možnosti:

- $a,b,c,d > 0$
- $a,b,c,d < 0$
- $a,c < 0 \wedge b,d > 0$.

Ve všech případech vyjde vždy ve všech závorkách $(f(x)-c),(b-a),(d-c)$ kladné číslo a zlomek $\frac{(f(x)-c)\cdot(b-a)}{d-c}$ budu skutečně vždy kladný (větší než nula).
Nyní budeme zkoumat druhou nerovnost

$$\frac{(f(x)-c)\cdot(b-a)}{d-c}+a > b.$$

Po upravách dostaneme

$$\frac{(f(x)-c)\cdot(b-a)}{d-c} > b-a$$

$$\frac{f(x)-c}{d-c} > 1$$

$$f(x)-c < d-c$$

$$f(x) < d$$

což je jistě pravda, protože $f(x)$ je z intervalu $(c,d)$, tedy $f(x)$ je jistě menší než $d$.
Zobrazení je tedy také surjektivní, a tedy i bijektivní.

c) Zde se jedná o zobrazení z otevřené množiny do množiny všech kladných reálných čísel. Pro lepší představu, jak toto zobrazení vypadá, lze opět vyzkoušet, kam se zobrazí dolní a horní mez (i v tomto případě je třeba počítat limitu z předpisu zobrazení pro $x$ jdoucí k $a$ a k $b$, protože tyto meze to otevřeného intervalu nepatří a navíc po pouhém dosazení $b$ do předpisu by zde bylo dělení nulou, což nelze):

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{b-x}=0$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{x-a}{b-x}=\infty$$

Dále lze vyzkoušet další body z intervalu (například rozdělit interval na osm dílků a najít obraz každého bodu ležícího v každé osmině):

$$f\left(\frac{7a+b}{8}\right)=\frac{\frac{7a+b}{8}-a}{b-\frac{7a+b}{8}}=\frac{b-a}{8}\cdot\frac{8}{7(b-a)}=\frac{1}{7}$$

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right)=\frac{\frac{3a+b}{4}-a}{b-\frac{3a+b}{4}}=\frac{b-a}{4}\cdot\frac{4}{3(b-a)}=\frac{1}{3}$$

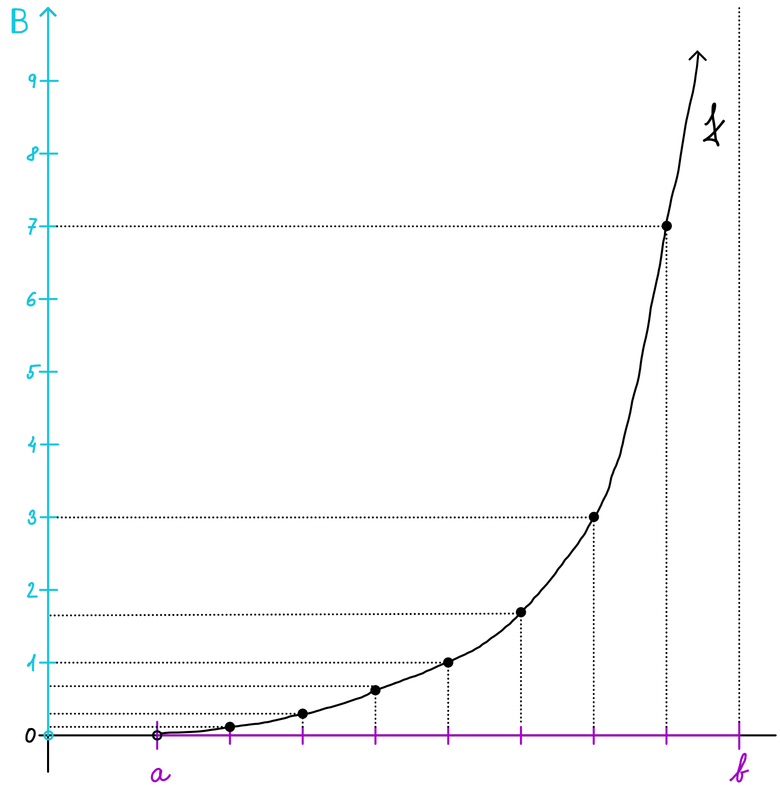
$$f\left(\frac{5a+3b}{8}\right)=\frac{\frac{5a+3b}{8}-a}{b-\frac{5a+3b}{8}}=\frac{3(b-a)}{8}\cdot\frac{8}{5(b-a)}=\frac{3}{5}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\frac{a+b}{2} - a}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{2}{b-a} = 1$$

$$f\left(\frac{3a+5b}{8}\right) = \frac{a - \frac{3a+5b}{8}}{b - \frac{3a+5b}{8}} = \frac{5(b-a)}{8} \cdot \frac{8}{3(b-a)} = \frac{5}{3}$$

$$f\left(\frac{a+3b}{4}\right) = \frac{\frac{a+3b}{4} - a}{b - \frac{a+3b}{4}} = \frac{3(b-a)}{4} \cdot \frac{4}{b-a} = 3$$

$$f\left(\frac{a+7b}{8}\right) = \frac{\frac{a+7b}{8} - a}{b - \frac{a+7b}{8}} = \frac{7(b-a)}{8} \cdot \frac{8}{b-a} = 7$$




Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in (a,b), a, b \in \mathbb{R}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

$$x, y \in (a,b) : f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x-a}{b-x} = \frac{y-a}{b-y} \Rightarrow x = y$$

Poslední implikace platí, protože aby se rovnaly dva zlomky, musí mít stejný základní tvar. Tedy se rovnají jejich čitatelé i jmenovatelé nebo je čitatel prvního $n$-násobkem druhého čitatele a jmenovatel prvního taktéž $n$-násobkem jmenovatele druhého ($n$ je v obou případech stejné - násobení zlomku jedničkou, $n \in \mathbb{R}$):

$$x - a = n(y-a) \quad \Rightarrow \quad x - ny = a(1-n)$$

$$b-x=n(b-y) \quad \Rightarrow \quad -x+ny=b(n-1)$$

Po sečtení těchto dvou rovnic:

$$0=a(1-n)+b(n-1)$$
$$a(1-n)=b(1-n)$$
$$a=b,$$
$$\text{ale } a \neq b$$

a tedy se skutečně $x$ musí rovnat $y$. (Nabízí se otázka, jestli závorkou $(1-n)$ lze dělit. Odpověď je kladná, protože nelze dělit pouze nulou, která by v závorce vyšla, pokud by se $n=1$, což je ovšem případ, kdy se rovnají čitatelé i jmenovatelé zlomků, kde jistě platí $x=y$, protože $x-a=y-a \Rightarrow x=y \wedge b-x=b-y \Rightarrow x=y$.) Injektivní toto zobrazení je.
Surjektivní?
Pro každý obraz $f(x)$ lze najít vzor podle předpisu:

$$f(x)=\frac{x-a}{b-x} \Rightarrow x=\frac{a+b\cdot f(x)}{1+f(x)}.$$

Opět je třeba ověřit, že nalezený vzor skutečně leží v intervalu $(a,b)$:

$$a<\frac{a+b\cdot f(x)}{1+f(x)}<b$$

$$a<\frac{a+b\cdot f(x)}{1+f(x)}$$
$$a+a\cdot f(x)<a+b\cdot f(x)$$
$$a\cdot f(x)<b\cdot f(x)$$
$$a<b$$
$$\frac{a+b\cdot f(x)}{1+f(x)}<b$$
$$a+b\cdot f(x)<b+b\cdot f(x)$$
$$a<b.$$

A toto zobrazení tedy je i surjektivní, tedy je bijektivní.

d) Zde se jedná o zobrazení z otevřeného intervalu reálných čísel $(a,b)$ do množiny reálných čísel. Pro lepší představu je dobré (stejně jako v předchozím bodě) spočíst limitu z $f(x)$ pro $x$ jdoucí k dolní mezi $a$ zprava a horní mezi $b$ zleva:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x-p}{x-a}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{x-p}{b-x}=\infty.$$

(První limita je mínus nekonečno, protože $a < p$.) Dále je dobré si všimnout, že

$$\text{pro } a < x \leq p : x-p \leq 0 \wedge x-a < 0 \Rightarrow \frac{x-p}{x-a} \leq 0,$$

$$\text{pro } p \leq x < b : x-p \geq 0 \wedge b-x > 0 \Rightarrow \frac{x-p}{b-x} \geq 0.$$

Injektivní?

Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x,y \in (a,b), a,b \in \mathbb{R}$, pro která platí $f(x) = f(y)$, je $x = y$:

Zde je třeba rozdělit si to do tří případů:

$$a < x,y \leq p : f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x-p}{x-a} = \frac{y-p}{y-a} \Rightarrow x = y,$$

$$p \leq x,y < b : f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x-p}{b-x} = \frac{y-p}{b-y} \Rightarrow x = y,$$

$$a < x \leq p \wedge p \leq y < b \text{ (nebo } a < y \leq p \wedge p \leq x < b) :$$
$$\frac{x-p}{x-a} = \frac{y-p}{b-y} \text{ ,kde } \frac{x-p}{x-a} \leq 0 \wedge \frac{y-p}{b-y} \geq 0 \Rightarrow x = y = p.$$

(Podrobnější rozbor prvního a druhého případu viz bod c).) Toto zobrazení je injektivní.

Surjektivní?

Při hledání předpisu, dle kterého lze najít ke každému reálnému číslo vzor, se nabízí rozdělit si to na dva případy - nekladná čísla (záporná a nula) a nezáporná čísla (kladná a nula), a to proto, že

$$\text{pro } a < x \leq p : x-p \leq 0 \wedge x-a < 0 \Rightarrow \frac{x-p}{x-a} \leq 0,$$

$$\text{pro } p \leq x < b : x-p \geq 0 \wedge b-x > 0 \Rightarrow \frac{x-p}{b-x} \geq 0.$$

Stačí tedy z předpisu tohoto zobrazení vyjádřit $x$:

$$x = \begin{cases} \frac{f(x)a-p}{f(x)-1} & \text{pro } f(x) \leq 0 \\ \frac{f(x)b+p}{f(x)+1} & \text{pro } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Problém by zde mohl nastat pouze pokud by ve jmenovali v nějakém případě vyšla nula. To se ovšem nestane, protože aby k tomu došlo, v obou případech by se do předpisu muselo dosadit číslo, které nepatří do jim příslušných intervalů. Dále je samozřejmě opět třeba ověřit, zda jsou všechna takto nalezená $x$ z intervalu $(a,b)$, stejně jako v b) či c). Pro $f(x) = 0$ lze použít oba předpisy. (Toto dokončení již nechám na čtenáři.) Zobrazení je tedy i surjektivní, a proto je i bijektivní.

**[1.5.B12].** Jsou dána bijektivní zobrazení $f,g:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ takto:

$$f(x)=3x-4,\qquad g(x)=2x+\frac{5}{3},\qquad \text{pro } \forall x\in\mathbb{Q}.$$

Nalezněte předpis zadávající zobrazení:

$$f\circ g; g\circ f; (f\circ g)^{-1}; (g\circ f)^{-1}; f^{-1}; g^{-1}; f^{-1}\circ g^{-1}; g^{-1}\circ f^{-1}.$$

*Řešení.* Předpis složeného zobrazení $f\circ g$ ($f$ po $g$ - nejprve $g$, poté $f$) se nalezne tak, že se do předpisu zobrazení $f$ dosadí za $x$ předpis zobrazení $g$:

$$\boldsymbol{(f\circ g)}(x)=3\left(2x+\frac{5}{3}\right)-4=6x+5-4=\mathbf{6x+1}.$$

Stejným způsobem se dostane i složené zobrazení $g\circ f$ ($g$ po $f$ - nejprve $f$, pak $g$), a to tak, že se do předpisu zobrazení $g$ dosadí za $x$ předpis zobrazení $f$:

$$\boldsymbol{(g\circ f)}(x)=2(3x-4)+\frac{5}{3}=\mathbf{6x-\frac{19}{3}}.$$

Inverzní zobrazení se získá prohozením vzoru a obrazu v předpisu zobrazení a následným vyjádřením obrazu:

$$6(f\circ g)^{-1}(x)+1=x\Rightarrow \boldsymbol{(f\circ g)^{-1}}(x)=\boldsymbol{\frac{x-1}{6}},$$

$$6(g\circ f)^{-1}(x)-\frac{19}{3}=x\Rightarrow \boldsymbol{(g\circ f)^{-1}}(x)=\boldsymbol{\frac{x}{6}+\frac{19}{18}},$$

$$3f^{-1}(x)-4=x\Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}}(x)=\boldsymbol{\frac{x+4}{3}},$$

$$2g^{-1}(x)+\frac{5}{3}=x\Rightarrow \boldsymbol{g^{-1}}(x)=\boldsymbol{\frac{x}{2}-\frac{5}{6}}.$$

Nyní již připraveno vše pro složení inverzních zobrazení $f^{-1}$ a $g^{-1}$:

$$\boldsymbol{(f^{-1}\circ g^{-1})}(x)=\frac{\frac{x}{2}-\frac{5}{6}-4}{3}=\boldsymbol{\frac{x}{6}+\frac{19}{18}},$$

$$\boldsymbol{(g^{-1}\circ f^{-1})}(x)=\frac{\frac{x+4}{3}}{2}-\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{x-1}{6}}.$$

Zde je vidět, že

$$(f\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f^{-1})(x),$$
$$(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x),$$

což platí obecně.

**[1.5.B13].** Nechť $A,B,C$ jsou množiny a nechť $\varphi:A\longrightarrow B$ je bijektivní zobrazení. Dokažte, že bijektivním zobrazením je pak také zobrazení:

a) $F : A^C \longrightarrow B^C$, definované: $F(f) = \varphi \circ f \qquad \forall f \in A^C$

b) $G : C^A \longrightarrow C^B$, definované: $G(g) : g \circ \varphi^{-1} \qquad \forall g \in C^A$.

*Důkaz.*

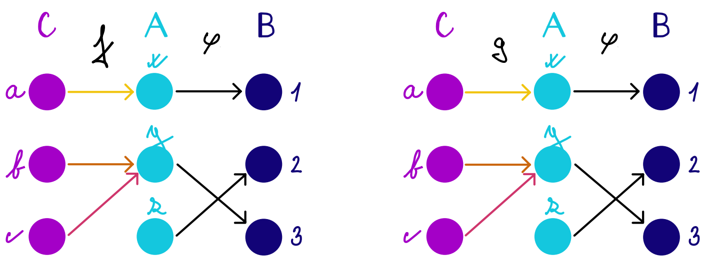
a) Zde se jedná o zobrazení z množiny všech zobrazení z množiny $C$ do množiny $A$ do množiny všech zobrazení z množiny $C$ do množiny $B$:

$$(C \longrightarrow A) \longrightarrow (C \longrightarrow B),$$

přičemž zobrazení $f \in A^C$ se zobrazí pomocí předpisu na zobrazení $F(f) = \varphi \circ f \in B^C$ (skutečně $\varphi \circ f$ je zobrazení z množiny $C$ do množiny $B$, protože $f : C \longrightarrow A$ a $\varphi : A \longrightarrow B$). Aby bylo dokázáno, že je toto zobrazení bijektivní, musí se ověřit, zda je injektivní a surjektivní.
Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $f, g \in A^C$, pro která platí $F(f) = F(g)$, je $f = g$:

$$f, g \in A^C : F(f) = F(g) \Rightarrow \varphi \circ f = \varphi \circ g \Rightarrow f = g.$$

Poslední implikace platí, protože $\varphi$ je bijektivní zobrazení, tedy se každé dva různé prvky z $A$ zobrazí na dva různé prvky z $B$ a každý prvek z $B$ má právě jeden vzor. Což znamená, že aby se rovnaly zobrazení $\varphi \circ f$ a $\varphi \circ g$ musí se rovnat zobrazení $f$ a $g$. Lépe je tato skutečnost vidět na následujícím schématu (jako zobrazení $\varphi$ je zde zvoleno libovolné bijektivní zobrazení):




Zobrazení $f$ zde bylo voleno zcela libovolně. Aby se ovšem rovnaly složená zobrazení, pak musí být $g$ stejné, jinak by se ne všechny prvky zobrazili stejně a tedy by se tyto složená zobrazení nerovnala.
Injektivní toto zobrazení tedy je.
Surjektivní?
Zde je třeba najít ke každému zobrazení $F(f)$ z množiny $B^C$ vzor $f$ v množině $A^C$. To lze udělat takto:

$$F(f) = \varphi \circ f \quad /\varphi^{-1}\circ$$

$$\varphi^{-1} \circ F(f) = \underbrace{\varphi^{-1} \circ \varphi}_{id_A} \circ f$$

$$f = \varphi^{-1} \circ F(f).$$

Tuto skutečnost lze ukázat i následujícím schématem:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "F(f)"'] & A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "F(f)"'] & A & B \arrow[l, "\varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Inverzní zobrazení $\varphi^{-1}$ lze vytvořit, protože $\varphi$ je bijektivní. Složením tohoto inverzního zobrazení s obrazem $F(f)$ z množiny $B^C$ tedy lze najít ke každému obrazu vzor $f$ z množiny $A^C$.
Toto zobrazení je i surjektivní. A proto je skutečně toto zobrazení bijektivní.

b) Zde se jedná o zobrazení z množiny všech zobrazení z množiny $A$ do množiny $C$ do množiny všech zobrazení z množiny $B$ do množiny $C$:

$$(A \longrightarrow C) \longrightarrow (B \longrightarrow C),$$

přičemž zobrazení $g \in C^A$ se zobrazí pomocí předpisu na zobrazení $G(g) = g \circ \varphi^{-1} \in C^B$ (zobrazení $g : A \longrightarrow C$ a $\varphi^{-1} : B \longrightarrow A$, tedy skutečně $g \circ \varphi^1 : B \longrightarrow C$). Opět je třeba dokázat jak injektivitu, tak surjektivitu.
<u>Injektivní?</u>
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $f, g \in C^A$, pro která platí $G(f) = G(g)$, je $f = g$:

$$f, g \in C^A : G(f) = G(g) \Rightarrow f \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi^{-1} \Rightarrow f = g.$$

Poslední implikace platí ze stejného důvodu jako v a). (Schéma si můžete vyzkoušet nakreslit sami.)
Bylo dokázáno, že toto zobrazení je injektivní.
<u>Surjektivní?</u>
Opět je třeba najít předpis, dle které lze najít pro každý prvek (zobrazení) $G(g) \in C^B$ vzor $g \in C^A$. Pro tento případ platí:

$$G(g) = g \circ \varphi^{-1} \quad / \circ \varphi$$

$$G(g) \circ \varphi = g \circ \underbrace{\varphi^{-1} \circ \varphi}_{id_A}$$

$$g = G(g) \circ \varphi,$$

schématicky:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "G(g)"'] & A \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, bend right, "G(g)"'] & A \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Zobrazení je tedy i surjektivní a bylo tak dokázáno, že je bijektivní.

□

**[1.5.B14].** Nechť $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ je zobrazení, splňující podmínku:

$$(f \circ f)(x) = -x, \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že pak platí:

a) $f$ je bijektivní zobrazení

b) $f(-x) = -f(x)$ pro $\forall x \in Z$

c) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

*Důkaz.*

a) Zde je nejprve dobré zjistit, jaké vlastnosti má zobrazení $f \circ f$:
Injektivní?
Při důkazu injektivity chceme dokázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$, pro která platí $(f \circ f)(x) = (f \circ f)(y)$, je $x = y$:

$$x, y \in \mathbb{Z} : (f \circ f)(x) = (f \circ f)(y) \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y.$$

Injektivní tedy toto zobrazení je.
Surjektivní?
Pro každý obraz lze získat vzor podle předpisu:

$$(f \circ f)(x) = -x \Rightarrow x = -(f \circ f)(x)$$

a toto zobrazení je tedy také surjektivní, tedy je bijektivní.
Protože $f \circ f$ je bijektivní, je podle věty 2 zobrazení $f$ jak injektivní, tak surjektivní, tedy je bijektivní.

b) Zde se využije skutečnosti, že $f(f(f(x)))$ lze díky platnosti věty 1 rozepsat dvěma způsoby:

$$f(f(f(x))) = \begin{cases} (f \circ f)(f(x)) = -f(x) \\ f((f \circ f)(x)) = f(-x) \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

c) Aby byla dokázána ekvivalence, je třeba dokázat dvě implikace:

„$\Leftarrow$“ Zde je třeba dokázat, že pro $x = 0$ musí být $f(x) = 0$, přitom se hodí použít předchozí bod:

$$x = 0 \Rightarrow f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2 \cdot f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

„$\Rightarrow$“ Zde je třeba dokázat, že pro $f(x) = 0$ musí být $x = 0$, přitom lze využít toho, že $f(0) = 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) \overset{\text{protože } f \text{ je bijekce}}{\Rightarrow} x = 0.$$

□

**[1.5.B15].** Nechť $A, B$ jsou konečné množiny přirozených čísel; nechť
$f : A \longrightarrow B$ je injektivní zobrazení s vlastností: $x \leq f(x)$, $\forall x \in A$,
$g : B \longrightarrow A$ je injektivní zobrazení s vlastností: $y \leq g(y)$, $\forall y \in B$.
Dokažte, že pak platí: $\quad A = B \quad$ a $\quad f = id_A = g$.
Návod: označte $h = g \circ f$, ukažte, že $h$ je bijekce splňující podmínku $x \leq h(x)$ pro každé $x \in A$ a dále (sporem) ukažte, že $h = id_A$.

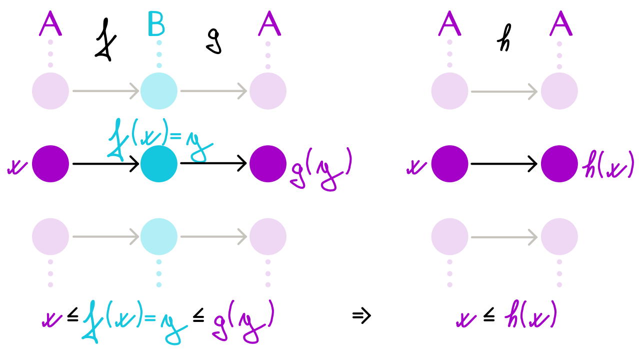
*Důkaz.* Podle návodu je dobré zde začít tím, že se pro zobrazení $h = g \circ f$ dokáže, že je bijektivní, tedy že je injektivní i surjektivní.

Injektivní?

Jelikož jsou zobrazení $f$ i $g$ ze zadání injektivní, je podle věty 2 injektinví i zobrazení $h = g \circ f$.

Surjektivní?

Zde je třeba najít ke každému obrazu vzor. Na začátku je dobré si uvědomit, že zobrazení $h$ je zobrazení z množiny $A$ do množiny $A$. Zobrazení $h$ funguje tak, že nejprve zobrazení prvek $x \in A$ zobrazením $f$ do množiny $B$ tak, že jeho obraz bude větší nebo roven vzoru. Dále se pak tento obraz zobrazení zobrazením $g$ zpět do množiny $A$ tak, že jeho obraz bude opět větší nebo roven zobrazovanému prvku. Schématicky:




Množina $A$ je konečná, tedy lze určit její největší prvek. Tento největší prvek množiny $A$ se zobrazí zobrazením $h$ na prvek množiny $A$, který je větší nebo roven vzoru. Protože byl však vzorem největší prvek množiny $A$ (větší už tam není), musel se tento prvek zobrazit sám na sebe. Dále lze vzít druhý největší prvek množiny $A$ (takový, který je menší než největší prvek množiny $A$ a větší než všechny ostatní prvky množiny $A$). Ten se zobrazením $h$ zobrazí opět sám na sebe nebo na nějaký větší prvek. Větší je však pouze ten největší prvek množiny $A$, na který se již zobrazil největší prvek $A$, a tedy protože $h$ je injektivní, žádný další prvek se na něj zobrazit nemůže. Proto se i tento prvek zobrazí sám na sebe. A tak lze postupovat dále až k zjištění, že se každý prvek množiny $A$ zobrazí zobrazením $h$ sám na sebe. Ke každému obrazu tedy lze najít vzor, který se bude danému obrazu rovnat:

$$x = f(x).$$

Toto zobrazení je tedy i surjektivní, což znamená, že je také bijektivní. Protože se každý prvek množiny $A$ zobrazí zobrazením $h$ sám na sebe, plyne z těchto úvah také to, že zobrazení $h$ je identické zobrazení na množině A:

$$h = id_A.$$

**Již bylo tedy dokázáno, že zobrazení $h = g \circ f$ je bijektivní a také, že $h = id_A$.**
Ze skutečnosti, že je $h$ bijektivní podle věty 2 plyne, že zobrazení $f$ je injektivní (což je známo již ze zadání) a zobrazení $g$ je surjektivní, přičemž zadání říká, že $g$ je také injektivní a tedy je zobrazení $g$ bijektivní. Dále lze psát:

$$h(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

a protože je $g$ bijektivní, lze vytvořit jeho inverzní zobrazení, které lze následně aplikovat na obě strany této rovnice:

$$(g \circ f)(x) = x \quad /g^{-1}\circ$$

$$(\underbrace{g^{-1} \circ g}_{id_B} \circ f)(x) = g^{-1}(x)$$

$$f(x) = g^{-1}(x).$$

Vyšlo tedy, že zobrazení $f$ a $g^{-1}$ se rovnají a z toho plyne, že i zobrazení $f$ je bijektivní (protože $g^{-1}$ je bijektivní).
**Bylo dokázáno, že zobrazení $f$ i $g$ jsou bijektivní a $f = g^{-1}$ (tedy také $f^{-1} = g$).**
O zobrazení $h = g \circ f$ již bylo dokázáno, že $h(x) = x$, tedy $h = id_A$. Ze zadání plyne, že pro toto složené zobrazení platí:

$$x \leq f(x) = y \leq g(y)$$

a ze skutečnosti, že $h = id_A$ pak také:

$$x = g(y) \Rightarrow x = f(x) = y = g(y),$$

z čehož je vidět, že pro zobrazení $f$ platí $f(x) = x$ a z bijektivity tohoto zobrazení pak také to, že

$$A = B \quad \wedge \quad f = id_A.$$

Ze skutečností $A = B$ a $f = g^{-1}$ plyne pak také

$$g = id_A.$$

□

# Závěr

V této bakalářské práci byla detailně rozebrána zobrazení a vyřešeny příklady ze sbírky úloh k předmětu Základy matematiky s důrazem na problémy, které studenti v tomto tématu nacházejí. Doufám, že tato práce přispěje k lepšímu pochopení tématu a bude studentům sloužit jako užitečný studijní materiál.

# Seznam použité literatury

[1] Horák, Pavel. *Základy matematiky: učební text k přednášce*. Brno: 2013.

[2] Horák, Pavel. *Základy matematiky: učební text ke cvičení*. Brno: 2013.