# 1. ročník MO (1951/1952)

## Obsah

# 1 kategorie A

## 1.1 Úlohy I. kola

**1.** Jaký je vztah mezi úhly $\alpha, \beta, \gamma$, platí-li

(a) buď $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$,

(b) nebo $\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma$?

**2.** Jsou-li $p_1, p_2, q_1, q_2$ reálná čísla splňující $p_1 p_2 = 2\left(q_1 + q_2\right)$, pak alespoň jedna z rovnic

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0,$$
$$x^2 + p_2 x + q_2 = 0$$

má reálné kořeny. Dokažte.

**3.** Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úseček $AB, AC, BD, CD$ a přímky $p \parallel AC, q \parallel BD$. Proveďte diskuzi.

**4.** Jsou dány dvě různoběžky $p, p'$ a na nich dva různé body $A \in p, A' \in p'$. Určete body $M \in p, M' \in p'$ tak, aby platilo $|AM| = |A'M'|$ a aby úsečka $MM'$ měla danou velikost $d$. Proveďte diskuzi.

**5.** Buď $n$ přirozené číslo a $x_1, \dots, x_n$ čísla reálná. Dokažte, že když platí

$$n\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) = \left(x_1 + \cdots + x_n\right)^2,$$

pak je nutně $x_1 = \cdots = x_n$.

**6.** Dokažte, že pro všechna reálná $x, y, z$ platí

$$x + y + z \le \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

a určete, kdy nastává rovnost.

**7.** Úsečka $AB$ velikosti $d$ se pohybuje tak, že její krajní body zůstávají na dvou pevných navzájem kolmých přímkách. Co při tomto pohybu vyplní bod $X$ přímky $AB$, jehož dělicí poměr $(ABX)$ je roven danému číslu $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$? Může být křivka opsaná bodem $X$ kružnice? Jsou mezi křivkami opsanými bodem $X$ dvě podobné nebo shodné?

**8.** Jsou dány přímky $p, q, r$ a množina čtverců takových, že jeden vrchol každého čtverce leží na přímce $p$, druhý na přímce $q$ a třetí na přímce $r$. Dokažte, že čtvrté vrcholy také leží na jedné přímce.

Užitím předchozího výsledku sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol $A$ leží na dané přímce $a$, vrchol $B$ na dané přímce $b$, vrchol $C$ na dané přímce $c$ a vrchol $D$ na dané přímce $d$. Proveďte diskuzi.

**9.** Pro které hodnoty nezávisle proměnné $x$ nabývá lomená lineární funkce

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

hodnoty $x$? Proveďte diskuzi vzhledem k různým hodnotám koeficientů $a, b, c, d$.

**10.** Buďte $A, O, B$ tři různé body svislé roviny, která protne vodorovnou rovinu jdoucí bodem $O$ v přímce $KOL$.

Po polopřímkách $AO, BO$ se pohybují směrem k $O$ body vlivem tíže zemské bez tření; jeden je bod $M$, jehož výchozí polohou je bod $A$, druhý je bod $N$ s počáteční polohou v bodě $B$.

Určete čas, v němž bude přímka $MN$ vodorovná a proveďte diskuzi o existenci řešení. Body $M, N$ se začnou ze svých výchozích poloh pohybovat současně.

**11.** Dokažte, že pro celé $n > 1$ platí

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

**12.** Buď $ABCD$ čtverec. Uvnitř strany $AB$ zvolme $m$ různých bodů a veďme jimi rovnoběžky se stranou $BC$. Podobně uvnitř strany $BC$ zvolme $n$ různých bodů a veďme jimi rovnoběžky ke straně $AB$. Kolik různých pravoúhelníků vzniklo provedenou konstrukcí?

**13.** Pro která přirozená čísla $n$ je možno zlomek $\frac{n^2+4n+6}{n(n^4-1)}$ vyjádřit desetinným rozvojem

(a) ukončeným,

(b) ryze periodickým,

(c) periodickým s předperiodou?

**14.** Je dána posloupnost $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$, přičemž platí $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$, a $a_1, b_1$ jsou kladná čísla.

(a) Vyjádřete $a_n^2 - 2b_n^2$ pomocí $a_1, b_1$.

(b) Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

**15.** V rovině $\rho$ jsou dány dva body $A, B$ a dva konvexní nepřímé úhly $\alpha, \beta$. Bod $X$ roviny $\rho$ otočíme jednak kolem středu $A$ o úhel $\alpha$ v daném smyslu do polohy $X'$, jednak kolem bodu $B$ o úhel $\beta$ v daném (stejném nebo opačném) smyslu do polohy $X''$. Co vyplní všechny ty body $X$, pro něž má úsečka $X'X''$ danou velikost $d > 0$?

**16.** Je dán pravoúhelník $ABCD$. Z bodu $M$ jeho roviny spustíme kolmice na přímky dané jeho stranami a označíme paty těchto kolmic $P \in \overleftrightarrow{AB}, Q \in \overleftrightarrow{CD}, R \in \overleftrightarrow{AD}, S \in \overleftrightarrow{BC}$ (tedy $AB \perp PQ \perp CD$ a $BC \perp RS \perp AD$).

(a) Určete geometrické místo průsečíků přímek $PR, QS$ a přímek $PS, QR$.

(b) Určete všechny body $M$ v rovině, které vedou k jednomu a témuž bodu nalezeného geometrického místa.

## 1.2 Úlohy II. kola

**1.** Jestliže je číslo $n$ celé, potom i výraz

$$V = \frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$$

je celé číslo. Dokažte.

**2.** Dokažte, že číslo $11^{100} - 1$ končí skupinou číslic 6000.

**3.** Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jestliže jsou dány velikosti $a, b, c, d$ jeho stran.

**4.** Rovina je pokryta sítí shodných rovnostranných trojúhelníků. Dokažte, že neexistuje čtverec, jehož všechny vrcholy leží ve vrcholech sítě.

## 1.3 Úlohy III. kola

**1.** Jsou-li $a, b, c$ kladná racionální čísla splňující

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c.$$

Dokažte, že $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ jsou rovněž racionální.

**2.** Tabulka čísel

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & a_1 & b_1 & c_1 & & & \\
 & & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 & \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

je sestavena takto: první řádek obsahuje tři lichá čísla. Každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních čísel předcházejícího řádku, z nichž prostřední je nad uvažovaným číslem; schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

**3.** Budiž $ABCD$ konvexní různoběžník, v němž $|AB| = |CD|$. Označme $R, S$ středy stran $AD, BC$. Sestrojte polopřímky $AU, DV$ souhlasně rovnoběžné s polopřímkou $RS$. Dokažte, že $|\sphericalangle BAU| = |\sphericalangle CDV|$.

**4.** Rozměry obdélníka $ABCD$ jsou přirozená čísla $p, q$; obdélník je rozdělen na $pq$ jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka $AC$.

# 2 kategorie B

## 2.1 Úlohy I. kola

**1.** Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a_1, \\ x_2 + x_3 &= a_2, \\ x_3 + x_4 &= a_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= a_{n-1}, \\ x_n + x_1 &= a_n, \end{aligned}$$

s parametry $a_1, \ldots, a_n$.

**2.** V rovině jsou dány čtyři různé body $A, B, S, O$. Sestrojte kružnici $k_1$ procházející body $A, B$ a kružnici $k_2$ se středem $S$ tak, aby bod $O$ byl středem jejich stejnolehlosti. Proveďte diskuzi.

**3.** Dokažte, že rovinný obrazec souměrný podle dvou různých středů není ohraničený (tj. neleží v žádném kruhu).

**4.** Dokažte, že

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < 1,$$

kde $n$ je přirozené číslo.

**5.** Je dána kružnice $k$, na ní bod $A$, dále kružnice $k'$ téhož poloměru a na ní bod $A'$. Udejte otáčení, které převádí kružnici $k$ v $k'$ a bod $A$ v $A'$. Proveďte diskuzi.

**6.** Buď $n$ přirozené číslo. Kolik existuje mezi čísly $n^2$ a $(n+2)^2$ přirozených čísel, z nichž žádné není druhou mocninou přirozeného čísla?

**7.** Buďte $a, b, c$ nenulová čísla splňující

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Dokažte, že rovnost

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 = (ay + bz + cx)^2 + (az + bx + cy)^2$$

platí pro libovolná $x, y, z$.

**8.** Kovové kusy každý o váze asi 170 kg a tvaru velmi přibližně kvádru o rozměrech 20 cm, 30 cm, 35 cm byly po čtyřech dávány do beden ze smrkového dřeva o tloušťce 2 cm a posílány autem na místa určení. Truhlárna, která vyrábí bedny, chce zvýšit produktivitu a uspořit materiál. Jak zařídíte uskladnění kusů do beden, aby spotřeba dříví na bedny na kus klesla a počet balených kusů stoupl, když může z dopravních důvodů jedna bedna vážit nejvýše 1200 kg? Kterou abstraktní matematickou úlohu můžete položit a řešit na základě uvedené konkrétní praktické úlohy?

**9.** Na obvodu trojúhelníka $ABC$ zvolme dva různé body $M, N$. Dokažte, že úsečka $MN$ není větší než největší ze stran $AB, BC, CA$.

**10.** Sestrojte dva trojúhelníky, které nejsou shodné, ale u nichž pět základních prvků (tj. stran a úhlů) jednoho je rovno pěti základním prvkům druhého.

**11.** Pro která přirozená čísla $n$ je výraz $\frac{n-37}{n+43}$ roven druhé mocnině racionálního čísla?

**12.** Dokažte: jsou-li $a, b, c$ kladná čísla, pak platí

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

**13.** Nechť je $N$ přirozené číslo psáno v desítkové soustavě ve tvaru

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n,$$

kde $a_0, \ldots, a_n$ jsou číslice. Utvořme čísla

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - 2a_0, \\ b_2 &= a_2 - 2b_1, \\ b_3 &= a_3 - 2b_2, \\ &\vdots \\ b_n &= a_n - 2b_{n-1}. \end{aligned}$$

Dokažte, že $N$ je dělitelné sedmi právě tehdy, když je dělitelné sedmi číslo $b_n$.

**14.** U dvou hmotných koulí, které se nedotýkají a mají pevnou vzájemnou polohu, byla měřením zjištěna jejich nejmenší vzdálenost $a$, velikost vnější tečny $t$ a velikost vnitřní tečny $u$.

(a) Vyjádřete vzdálenost středů koulí a jejich poloměry v závislosti na veličinách $a, t, u$.

(b) Jaká je podmínka pro to, aby se poloměry koulí lišily nejvýše o úsečku délky $d$?

**15.** Jsou dány body $A, A'$ a $B \neq A$. Otáčení, které převede bod $A$ v bod $A'$, převede bod $B$ v jistý bod $B'$. Co vyplní body $B'$, které dostaneme všemi takovými otáčeními?

**16.** Budiž $D$ průsečík osy úhlu $CAB$ trojúhelníka s jeho stranou $BC$. Budiž dále $DE$ rovnoběžka vedená bodem $D$ k přímce $CA$ a $E$ její průsečík se stranou $AB$; budiž konečně $EF$ rovnoběžka vedená bodem $E$ k přímce $BC$ a $F$ její průsečík se stranou $CA$. Dokažte, že platí

$$|AF| = |AC| - |AE|.$$

## 2.2 Úlohy II. kola

**1.** Jsou dány dvě různé přímky $p, q$ a bod $A$. Každé otáčení, které převádí přímku $p$ v přímku $q$, převádí bod $A$ v jistý bod $A'$. Co vyplní všechny tyto body $A'$?

**2.** Najděte všechna čtyrciferná čísla $aabb$ (kde $a \neq 0$ a $b$ jsou arabské cifry), která jsou čtverci celého čísla.

**3.** Dokažte, že pro všechna reálná čísla $a, b$ platí

$$\left(a^2 + b^2\right) ab \leq a^4 + b^4.$$

Rozhodněte, kdy nastává rovnost.

**4.** Čtyřstěn $MNPQ$ má nejdelší hranu délky $d$. Dokažte, že pro každé dva body $A, B$ na povrchu čtyřstěnu platí nerovnost $|AB| \leq d$.