2. ročník MO (1952/1953)

Obsah

1 kategorie A

1.1 Úlohy I. kola

1. Jsou-li m, n kladná celá čísla, ukažte, že číslo $\sqrt{2}$ leží mezi čísly

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m+2n}{m+n}.$$

2. Obrazy komplexních čísel $0, z_1, z_2$ tvoří v rovině komplexních čísel trojúhelník, který stručně označme OZ_1Z_2. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníka sestrojeného nad stranou Z_1Z_2 a ležícího v polorovině Z_1Z_2O.

3. Buďte A', B', C', D' paty kolmic spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C, D čtyřstěnu $ABCD$ vždy na rovinu jeho protější stěny.

(a) Bod A' leží na kolmici BH spuštěné v rovině BCD z bodu B k přímce CD (přičemž H je příslušná pata) právě tehdy, když $AB \perp CD$. Dokažte.

(b) Dokažte, že pokud bod A' splývá s průsečíkem výšek trojúhelníku BCD, potom i body B', C', D' splynou po řadě s průsečíky výšek trojúhelníků CDA, DAB, ABC. Co pak platí o přímkách AA', BB', CC', DD'?

4. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Budiž $A_1B_1C_1$ trojúhelník stejnolehlý s trojúhelníkem ABC podle středu A s koeficientem stejnolehlosti $\lambda > 1$. Dále $A_2B_2C_2$ je trojúhelník osově souměrný s trojúhelníkem $A_1B_1C_1$ podle přímky BC. Určete konstrukčně i početně, který bod trojúhelníka ABC přejde po obou operacích na své původní místo.

5. Komplexní číslo z vyhovuje rovnici

$$az + b\bar{z} + c = 0,$$

kde a, b, c jsou daná komplexní čísla. Co vyplňují obrazy všech takových čísel z v rovině komplexních čísel?

6. Buďte a, b, c, d racionální čísla a u číslo iracionální. Dokažte, že je číslo

$$\frac{au+b}{cu+d}$$

racionální právě tehdy, když $ad - bc = 0$.

7. Budiž dán trojúhelník ABC; dále buďtež M, N, P body, které leží uvnitř stran BC, CA, AB, a to tak, že $MN \parallel AB, MP \parallel AC$. Zvolme bod M tak, aby platil vztah

$$|MN| + |MP| = k,$$

kde $k > 0$ je dané číslo. Proveďte diskuzi za předpokladu, že $|AB| \leq |AC|$, a stanovte, kterou podmínku musí splňovat číslo k, aby měla úloha řešení.

8. Dokažte, že pro daný čtyřstěn $ABCD$ existuje kulová plocha dotýkající se všech jeho hran (tj. každá z šesti přímek určená vrcholy čtyřstěnu je tečnou kulové plochy s dotykem uvnitř stran) právě tehdy, když

$$|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |AD| + |BC|.$$

9. Nádržka má tvar rotačního kuželu spočívajícího podstavou na vodorovné rovině; její objem je V_0 litrů a výška u decimetrů. Při plnění nateče do nádržky a litrů za sekundu. Vyjádřete vzdálenost vodní hladiny od vrcholu kužele po q sekundách, kde q je kladné raciolnální číslo.

10. Jsou dána dvě komplexní čísla a, b, přičemž $|a| = 1$. Jestliže pro komplexní čísla z, z' platí vztah

$$z' = az + b,$$

potom z' vznikne z obrazu čísla z otáčením, je-li $a \neq 1$; a posunutím, je-li $a = 1, b \neq 0$. Dokažte a určete střed otáčení, resp. vektor posunutí.

11. Budiž dán trojúhelník ABC. Nechť jsou A', B', C' takové body roviny, že platí

$$|AB'| = |AC'|, \quad |BC'| = |BA'|, \quad |CA'| = |CB'|.$$

Označme a', b', c' přímky roviny, které postupně procházejí body A', B', C', přičemž platí

$$a' \perp BC, \quad b' \perp CA, \quad c' \perp AB.$$

Dokažte, že přímky a', b', c' procházejí jedním bodem.

12. Označme P počátek soustavy pravoúhlých souřadnic. Body s oběma souřadnicemi celočíselnými nazveme *mřížovými*. Budiž $p > 2$ dané liché číslo. Označme A_k ty mřížové body $[p, k]$, kde $k \in \{0, \ldots, p\}$, a uvažme trojúhelníky

$$PA_1A_2, PA_2A_3, PA_3A_4, \ldots, PA_{p-2}A_{p-1}.$$

Dokažte, že p je prvočíslo právě tehdy, když je počet mřížových bodu uvnitř každého z uvažovaných trojúhelníků roven $(p-1)/2$.

13. Buďte $[x, y]$ body v rovině pravoúhlých souřadnic. Určete, pro které z nich platí nerovnost

$$\big||x + a| - |y - a|\big| < a,$$

kde a je dané reálné číslo. Vyznačte v rovině souřadnic ty její části, pro jejichž body je splněna daná nerovnost.

14. Dokažte s použitím komplexních čísel, že složením dvou otáčení s různými středy vznikne otáčení nebo posunutí. Určete střed výsledného otáčení, resp. vektor výsledného posunutí. Určete podmínky, kdy je složení otočení a kdy posunutí.

15. Dokažte, že pro každé kladné a a libovolné přirozené n platí

$$n\left(a^{2n+1} + 1\right) \geq a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2n-1} + a^{2n}.$$

Určete, pro která a nastane rovnost.

16. Dokažte, že číslo $2^{12n+8} - 3^{6n+2}$ je dělitelné třinácti pro každé celé nezáporné n.

1.2 Úlohy II. kola

1. Dokažte, že číslo $a_n = 2^{n+1} + 5^n$ není prvočíslem pro žádné přirozené číslo n.

2. Dána jsou kladná čísla $a_1, \ldots, a_{10}, b_1, \ldots, b_5$ všechna menší než 7 a žádné z nich není celé. Dokažte, že mezi padesáti body $[a_i, b_j]$, kde $i \in \{1, \ldots, 10\}$ a $j \in \{1, \ldots, 5\}$, existují alespoň dva takové, jejichž vzdálenost je menší než $\sqrt{2}$.

3. Zjistěte, který útvar je analyticky vyjádřen vztahem

$$|ax + by| + |y| \leq c,$$

kde x, y jsou pravoúhlé souřadnice bodu v rovině a a, b, c jsou daná kladná čísla.

4. Je dán čtyřstěn $VABC$. Označme ρ rovinu jeho stěny ABC. Uvnitř hran VA, VB, VC zvolme po řadě body X, Y, Z tak, aby rovina σ určená těmito body byla rovnoběžná s rovinou ρ. Označme dále X_1, Y_1, Z_1 po řadě středy úseček YZ, ZX, XY.

(a) Dokažte, že se úsečky AX_1, BY_1, CZ_1 protínají v jednom bodě. Označme jej S.

(b) Co vyplní všechny body S, když bod X probíhá vnitřek úsečky VA?

1.3 Úlohy III. kola

1. V rovině komplexních čísel určete útvar, který vyplní obrazy čísel z vyhovující vztahu

$$z + \bar{z} = a \cdot |z|,$$

kde a je dané reálné číslo. Proveďte diskuzi pro všechny hodnoty čísla a.

2. Nechť α, β, γ jsou úhly trojúhelníka. Dva z nich jsou vyjádřené pomocným úhlem φ tak, že

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \pi - 3\varphi.$$

Dokažte, že potom $\alpha > \gamma$.

3. Jsou-li $a_1, \dots, a_n$ kladná čísla, pak platí

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Dokažte a určete, kdy nastává rovnost.

4. Jsou dány mimoběžky a, b a rovina ρ, která je různoběžná s oběma přímkami a, b. Zvolme body $X \in a$ a $Y \in b$ tak, aby $XY \parallel \rho$. Jaký geometrický útvar vyplní střed S úsečky XY, probíhá-li bod X přímkou a?

2 kategorie B

2.1 Úlohy I. kola

1. V dílně pracuje a (stejně výkonných) dělníků, kteří mají dokončit určitou zakázku. Skupina m dělníků vytvoří úderku a zaváží se, že lepší organizací práce zvýší svůj výkon o 10 %. Stalo se tak po p dnech práce na zakázce. O kolik dní se zmenší původně plánovaná doba d dní, potřebná k provedení zakázky?

2. (a) Dokažte, že každé prvočíslo $p > 3$ lze psát ve tvaru $6n \pm 1$, kde n je vhodné přirozené číslo. Platí také obrácené tvrzení?

(b) Užitím předchozího výsledku dokažte, že zmenšíme-li čtverec libovolného prvočísla $p > 3$ o jedna, dostaneme číslo dělitelné číslem 24.

3. Je dána kružnice k a její tětiva AB, která není průměrem. Buď p sečna této kružnice kolmá k přímce AB. Najděte ta přímce p bod X takový, aby byl konvexní nepřímý úhel $\sphericalangle AXB$ co největší. Proveďte diskuzi.

4. Buď $AA'BC$ čtyřstěn takový, že je hrana AA' kolmá na rovinu $A'BC$. Dokažte, že je-li $|\sphericalangle BAC| \geq 90°$, pak $|\sphericalangle BA'C| > 90°$.

5. Dokažte:

(a) je-li zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru, pak jsou v základním tvaru také zlomky $\frac{a \pm b}{ab}$;

(b) součet tří zlomků v základním tvaru nemůže být celočíselný, jestliže není každý prvočinitel jednoho z daných jmenovatelů prvočinitelem alespoň jednoho ze zbývajících dvou jmenovatelů.

6. Označme

$$x = \frac{a}{b+c}, \quad y = \frac{b}{c+a}, \quad z = \frac{c}{a+b},$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla. Určete, za jakých předpokladů platí

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

7. Určete geometrické místo průsečíků V výšek v trojúhelnících ABC, jestliže je dána poloha strany BC, velikost úhlu $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ a jestliže vrcholy A těchto trojúhelníků leží v jedné z obou opačných polorovin vyťatých přímkou BC. Proveďte diskuzi pro $\alpha > 90°, \alpha = 90°$ a $\alpha < 90°$.

8. Budiž V průsečík výšek trojúhelníka ABC. Dokažte, že jestliže $|CA| < |AB|$, pak

(a) $|VC| < |VB|$,

(b) vzdálenost bodu V od strany CA je menší než od strany AB s výjimkou případu, kde $|\sphericalangle CAB| = 90°$. Jak je tomu v tomto výjimečném případě?

Proveďte diskuzi pro trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý.

9. Buďte $ABCD, A'B'C'D'$ protilehlé strany krychle (přičemž AA', BB', CC', DD' jsou hrany této krychle). Dokažte, že je-li vnitřní bod krychle X blíže k vrcholu B, než ke všem ostatním, potom je bod X dále od vrcholu D', než od kteréhokoli z ostatních vrcholů.

10. K očíslování všech svazků určité knihovny bylo potřeba na hřbety knih natisknout třikrát více tolik cifer, než kolik je svazků. Kolik svazků měla knihovna?

11. Stanovte geometrické místo bodů, pro něž je absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou daných různoběžek a, b rovna danému číslu $d \geq 0$.

12. Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$
Dokažte a určete, kdy nastává rovnost.

13. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} < 1.$$

14. Jsou-li a, b, c reálná čísla, pak
$$(a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 \geq ab + bc + ca.$$
Dokažte a určete, kdy nastává rovnost.

15. Určete, co vyplňují za útvar středy všech rovnoběžníků, které jsou rovinnými řezy daného čtyřstěnu.

16. Budiž dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně velikosti a. Buďte M, N, P body zvolené po řadě uvnitř úseček BC, CA, AB.

Dokažte nejprve, že je možné zvolit body M, N, P (různé od středů stran) tak, že MNP je rovnostranný trojúhelník. Potom sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky MNP takové, aby jejich strany měly danou velikost m. Diskutujte, pro která m má úloha řešení.

2.2 Úlohy II. kola

1. Mějme libovolné přirozené číslo n a kladná čísla $a_1, \ldots, a_{n+1}$, která nejsou větší než jedna. Dokažte, že mezi nimi existují alespoň dvě taková, že absolutní hodnota jejich rozdílu je menší než $\frac{1}{n}$.

2. Buďte dány dvě stejně dlouhé, na sebe kolmé úsečky AB, AC. Označme X bod ležící uvnitř úsečky AB a Y bod ležící uvnitř úsečky AC; buď Z střed úsečky XY.

Probíhá-li bod X vnitřek úsečky AB, bod Y vnitřek úsečky AC, patří bod Z určitému geometrickému útvaru, jehož každý bod je střed některé z úseček XY; určete tento útvar.

3. Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c, d platí

$$ac + bd > ad + bc,$$

potom je buď $a > b, c > d$, anebo $a < b, c < d$. Je možné toto tvrzení obrátit?

4. Jsou dány dvě různé rovnoběžky m, n; uvnitř pásu jimi určeného jsou dány dva různé body K, L.

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ mající tyto vlastnosti

- body A, B leží na přímce m,
- body C, D na přímce n,
- bod K na přímce AD a bod L na přímce BC.

Proveďte diskuzi řešitelnosti.