3. ročník MO (1953/1954)

Obsah

1 kategorie A

1.1 Úlohy I. kola

1. Uvažme posloupnost danou vztahy

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}.$$

Dokažte, že pro $n > 1$ je a_n dělitelné číslem $n-1$.

2. Nechť a, b jsou kladná a $z \neq 0$ komplexní. Dokažte, že

$$|az + b\bar{z}|^2 \leq (a+b)^2|z|^2$$

a určete, kdy nastává rovnost. Interpretujte nerovnost geometricky.

3. V prostoru je dán rovnoramenný trojúhelník ABS o základně AB. Určete poloměr r kulové plochy o středu S tak, aby vzdálenost dotykových bodů C, D tečných rovin přímkou AB vedených k hledané kulové ploše byla rovna velikosti úsečky AB.

(a) Zjistěte podmínky řešitelnosti a určete velikost poloměru r.

(b) Naznačte grafické řešení a proveďte jeho diskuzi.

4. Budiž dán čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$. Označme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ roviny jeho stěn po řadě protějších k vrcholům A_1, A_2, A_3, A_4. Jsou dány tři různé body J, K, L ležící vně danému čtyřstěnu.

Dokažte, že pro každou polohu bodů J, K, L existuje alespoň jeden bod X různých od bodů J, K, L takový, že všechny body úseček XJ, XK, XL leží vně daného čtyřstěnu.

Při diskuzi uveďte příklady, jak k dané trojici bodů J, K, L určíte bod X.

5. Dokažte, že pro $a > b > 0$ a přirozené n platí vztah

$$\frac{n+1}{n}\,a > \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} > \frac{n+1}{n}\,b.$$

6. Nechť A, B jsou komplexní čísla a X_1, X_2 kořeny rovnice $x^2 + Ax + B = 0$. Dokažte, že je-li $|X_1| = |X_2| \neq 0$, potom $\frac{A^2}{B}$ je reálné. Rozhodněte, zda platí obrácené tvrzení.

7. Trojúhelník ABC je podstavou trojbokého kolmého hranolu. Na pobočných hranách jsou postupně zvoleny body A', B', C'. Rovina $A'B'C'$ oddělí část hranolu, jejíž objem je roven součinu obsahu trojúhelníka ABC a aritmetického průměru délek úseček AA', BB', CC'.

(a) Dokažte uvedené tvrzení pro případ $A' = A$.

(b) Dokažte tvrzení pro libovolně zvolené body A', B', C'.

8. Budiž $ABCDA'B'C'D$ krychle (přičemž $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ a $ABCD$ je její jedna stěna).

(a) Dokažte, že je tělesová úhlopříčka $B'D$ kolmá k rovinám $A'BC', ACD'$ a že je jimi rozdělena na tři stejně dlouhé úseky.

(b) Vyšetřete polohu a velikost nejkratší příčky mimoběžek AC, BC', jestliže je dána velikost a hrany krychle. (Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání.)

9. Najděte všechna reálná x splňující

$$\log_{100} x + \log_{1000} x \leq \log_{10x} x^3.$$

10. Jsou-li z_1, z_2 komplexní čísla splňující

$$|z_1| = |z_2|, \quad |z_1 - 1| = |z_2 - 1|,$$

pak $z_1 = z_2$ nebo $z_1 = \overline{z_2}$. Dokažte a intepretujte tvrzení geometricky.

11. Mějme kvádr o rozměrech a, b, c. Dokažte, že délka nejkratší příčky dvou mimoběžných stěnových úhlopříček je

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

12. Je dán trojúhelník ABC. Najděte množiny bodů X takové, že ve čtyřstěnu $ABCX$ jsou

(a) hrany AX, BX navzájem kolmé,

(b) hrany AX, BX a hrany BX, CX navzájem kolmé,

(c) každé dvě z hran AX, BX, CX navzájem kolmé. V tomto případě určete podmínky řešitelnosti.

13. Určete geometrický útvar v rovině, který vyplní obrazy komplexních čísel z splňující

$$z = \frac{as + b}{1 + s},$$

kde a, b jsou daná komplexní čísla a $s \neq -1$ probíhá všechny komplexní jednotky.

14. Nechť (a_n) je posloupnost nenulových čísel. Má-li (a_n) nenulovou limitu, pak má posloupnost (a_n/a_{n+1}) také limitu, která je rovna jedné. Dokažte.

15. Najděte všechna přirozená čísla, která jsou rovna jedenáctinásobku svého ciferného součtu v desítkové soustavě.

16. Budiž dána rovina $ABC = \rho$ a mimo ni přímka $p \parallel \rho$. Uvažujme čtyřstěny $ABCX$, kde vrchol X probíhá přímku p. Označme V vrchol rotačního kužele s podstavou v rovině ρ, na jehož plaášti leží všechny čtyři body A, B, C, X. Proveďte diskuzi, kdy takový kužel existuje, a vyšetřete útvar, který vyplní všechny vrcholy V.

1.2 Úlohy II. kola

1. Určete součet
$$s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1} n^2,$$
kde n je dané přirozené číslo.

2. Buďte dána čísla $a > b > 0$. Dokažte, že
$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

3. Rozhodněte, pro která x má smysl rovnice
$$\log_x 10 + \log_x 100 + \log_x 1000 = \frac{\log x^3}{1 + \log x}$$
a najděte všechna její řešení.

4. Je dán kolmý čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$ (s podstavami $ABCD, A'B'C'D'$ a $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$). Najděte příčku p mimoběžek AC, BC' takovou, že $p \parallel B'D$, a rozhodněte, kdy taková příčka existuje.

Předpokládejme dále existenci příčky p. Označme X průsečík přímek AC, p a Y průsečík přímek BC', p. Dokažte, že X, Y jsou po řadě vnitřními body úseček AC, BC', přičemž
$$|AX| = 2|CX|, \quad |C'Y| = 2|BY|, \quad |B'D| = 3|XY|.$$

1.3 Úlohy III. kola

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$ax^2 + 2(a-1)x + a - 5 = 0$$

s (reálným) parametrem a.

2. Nechť a, b jsou komplexní čísla. Jestliže obrazy kořenů rovnice $z^2 + az + b = 0$ tvoří v komplexní rovině spolu s obrazem čísla 0 pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem při počátku, potom platí $a^2 = 2b \neq 0$. Dokažte a rozhodněte, zda lze tvrzení obrátit.

3. Dokažte, že

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

4. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'(AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD')$. Nechť bod X leží uvnitř úsečky AB, průsečík hrany AD s rovinou $B'D'X$ označme Y.

(a) Jaký útvar vyplní průsečík úhlopříček čtyřúhelníka $B'D'YX$, probíhá-li bod X vnitřek strany AB?

(b) Rozhodněte, zda existuje mezi těmito čtyřúhelníky $B'D'YX$ takový, že se jeho úhlopříčky navzájem dělí v poměru $1:2$.

2 kategorie B

2.1 Úlohy I. kola

1. Nechť a, b, c jsou nezáporná racionální čísla a $b \neq 0$. Pokud platí

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c},$$

potom je $\frac{a}{b}$ druhou mocninou racionálního čísla. Dokažte.

2. Budiž a přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě a b číslo, které vznikne zapsáním cifer čísla a v opačném pořadí. Označme $s = a + b, r = |a - b|$. Dokažte, že je-li počet cifer čísla a sudý, je číslo s dělitelné jedenácti a v opačném případě je dělitelné jedenácti číslo r.

3. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod O. Veďme bodem O rovnoběžky p, q, r postupně se stranami BC, CA, AB a označme $A_1 = BC \cap q, A_2 = BC \cap r, B_1 = CA \cap r, B_2 = CA \cap p$, $C_1 = AB \cap p, C_2 = AB \cap q$. Dokažte rovnost

$$\sqrt{[A_1OA_2]} + \sqrt{[B_1OB_2]} + \sqrt{[C_1OC_2]} = \sqrt{[ABC]},$$

kde $[XYZ]$ značí obsah trojúhelníku XYZ.

4. Mějme dány různé kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2), r_1 \geq r_2$. Označme X_1 libovolný bod kružnice k_1, X_2 libovolný bod kružnice k_2 a Y střed úsečky X_1X_2 (pokud $X_1 = X_2$, tak $X_1 = Y = X_2$). Co vyplní všechny body Y, když body X_1, X_2 mění svou polohu?

5. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n není číslo $2^n - 1$ druhou mocninou celého čísla.

6. Pro libovolné reálné x označme $\lfloor x \rfloor$ největší celé číslo nepřevyšující x. Dokažte, že pro každé $a > 0$ a přirozené m platí

$$\left\lfloor \sqrt[m]{a} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[m]{\lfloor a \rfloor} \right\rfloor.$$

7. Dokažte, že kladná a, b, c jsou délky trojúhelníka právě tehdy, když

$$\left| \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} \right| < 1.$$

8. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník o přeponě AB, jsou-li dána čísla $p \geq q > 0$ a víme-li, že

$$|AB| + |AC| = p, \quad |BA| + |BC| = q.$$

Proveďte diskuzi.

9. Uvažujme reálná čísla a, b, c splňující

$$abc > 0, \quad ab + bc + ca > 0, \quad a + b + c > 0.$$

Dokažte, že všechna tři čísla a, b, c jsou kladná.

10. Dokažte, že číslo

$$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$$

je dělitelné devíti pro libovolné přirozené číslo n.

11. Dokažte správnost tohoto postupně prováděného dělení úsečky A_0A_1 na jednu polovinu, jednu třetinu, …, jednu n-tinu.

Označme A_k bod úsečky A_0A_1, pro nějž platí $|A_0A_k| = \frac{1}{k}|A_0A_1|$, kde $k > 1$ je přirozené číslo. Jestliže pro přirozené číslo $n > 1$ známe polohu bodu A_{n-1} na úsečce A_0A_1, sestrojíme bod A_n následovně. Veďme body A_0, A_1, A_{n-1} po řadě přímky $a_0 \parallel a_1 \parallel a_{n-1}$, různé od přímky A_0A_1, a označme P_0, P_1, P_{n-1} průsečíky s přímkou $p \parallel A_0A_1, p \neq \overleftrightarrow{A_0A_1}$. Budiž X_n průsečík přímek $P_0A_1, P_{n-1}A_0$. Přímka $a_n \parallel a_0$ vedená bodem X_n protíná úsečku A_0A_1 v hledaném bodě A_n.

12. Obdélník, jehož rozměry jsou přirozená čísla a, b, je rozdělen na ab shodných čtverců. Stočme tento obdélník do pláště rotačního válce tak, aby se strana obdélníka o délce a stala obvodem podstavy tohoto válce. Vrcholy zmíněných shodných čtverců vytvoří na plášti válce *mřížové body*. Každé dva mřížové body spojíme přímkou, kterou nazveme *příčka*.

(a) Kolik je těch příček, které procházejí vnitřkem vytvořeného válce?

(b) Dostaneme více takových příček, když stočíme větší, nebo když stočíme menší stranu tohoto obdélníka v podstavnou kružnici rotačního válce?

13. Určete součet

$$s_n = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - \cdots + (-1)^{n+1} n(n+1),$$

kde n je dané přirozené číslo.

14. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + a\,(x_2 + x_3 + x_4) &= b_1, \\ x_2 + a\,(x_3 + x_4 + x_1) &= b_2, \\ x_3 + a\,(x_4 + x_1 + x_2) &= b_3, \\ x_4 + a\,(x_1 + x_2 + x_3) &= b_4, \end{aligned}$$

s neznámými x_1, x_2, x_3, x_4 a stanovte podmínky řešitelnosti vzhledem k daným číslům a, b_1, b_2, b_3, b_4.

15. Jsou dány po dvou navzájem mimoběžné přímky a, b, c. Kolik je na přímce c bodů takových, jimiž nelze vést příčku přímek a, b? Proveďte diskuzi.

16. Označme M střed strany CD daného obdélníka $ABCD$. Co musí platit o rozměrech tohoto obdélníku, platí-li $BD \perp AM$?

2.2 Úlohy II. kola

1. Druhá mocnina celého čísla je vždy tvaru $5n$ nebo $5n \pm 1$ pro vhodné nezáporné celé číslo. Dokažte a rozhodněte, zda lze tvrzení obrátit.

2. Jsou-li u_1, u_2, v_1, v_2 libovolná reálná čísla, potom

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leq \left(u_1^2 + u_2^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2\right).$$

Dokažte a rozhodněte, kdy nastává rovnost.

3. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř strany BC zvolme dva různé body J, J'. Na úsečce AB určete body K, K' tak, aby platilo $JK \parallel AC \parallel J'K'$, a na úsečce AC body L, L' tak, aby $JL \parallel AB \parallel J'L'$. Dokažte, že

$$\frac{|KK'|}{|LL'|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

4. Uvažme rovnostranný trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P. Dokažte, že délka každé ze tří úseček PA, PB, PC je menší než součet délek zbývajících dvou.

3 kategorie C

3.1 Úlohy I. kola

1. Jsou dána přirozená čísla $n > 1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ a zlomky

$$\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}.$$

Dokažte následující dvě tvrzení.

(a) Jestliže jsou si všechny tyto zlomky rovny, potom je jim roven i zlomek

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n}.$$

(b) Jestliže jsou alespoň dva z daných zlomků různé, potom

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right\} < \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} < \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

2. V dílně mělo n dělníků se stejným pracovním výkonem vykonat určitou práci za d dní. Po odpracování $a < d$ dní se dělníci zavázali, že zvýší svůj výkon o p %. Kolik dělníků potom stačí na to, aby byla práce vykonaná v plánované době d dní?

3. Určete všechny trojice po dvou nesoudělných přirozených čísel s vlastností, že součet kterýchkoli dvou z nich je dělitelný třetím číslem.

4. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník a S_1, S_2 postupně středy stran AB, CD.

(a) Jestliže se přímky S_1S_2, AD, BC protínají v jednom bodě, je $ABCD$ lichoběžník.

(b) Jestliže je průsečík úhlopříček AC, BD bodem úsečky S_1S_2, je $ABCD$ lichoběžník nebo rovnoběžník.

Dokažte obě tvrzení.

5. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro která je $x^2 - y^2$ třetí mocninou prvočísla.

6. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla a $c > 1$. Dokažte, že

$$a + b \le abc,$$

a určete, kdy nastává rovnost.

7. Je dána úsečka AA_1 a její vnitřní bod V. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby byl bod A_1 patou výšky spuštěné z vrcholu A na stranu BC a aby bod V byl průsečíkem výšek tohoto trojúhelníka. Uvažujte oba případy, kdy AB je, resp. není, základnou a proveďte diskuzi řešitelnosti.

8. Je dán lichoběžník $ABA'B'$ se základnami $AB, A'B'$ a dále bod M, který neleží na žádné z přímek $AB, A'B'$. Sestrojte přímku q jdoucí bodom M tak, aby protnula polopřímky $AB, A'B'$ postupně v takových bodech X, X', že $|AX| = |A'X'|$. Proveďte diskuzi s ohledem na polohu bodu M.

9. Letadlo koná službu mezi místy A, B tak, že létá z místa A do místa B a hned se vrací zpět. Vane-li vítr od A k B určitou rychlostí, vykoná letadlo obě cesty za 4 hodiny 6 minut. Vane-li vítr opačným směrem, ale rychlostí trojnásobnou než v prvním případě, vykoná letadlo obě cesty za 5 hodin. Za jakou dobu vykoná letadlo obě cesty za bezvětří?

10. Určete všechny dvojice x, y nezáporných celých čísel, které splňují

(a) $xy = x + y$,

(b) $xy < x + y$,

(c) $xy > x + y$.

11. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a. Označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4 středy jeho stran CD, DA, AB, BC. Dokažte, že přímky AS_1, BS_2, CS_3, DS_4 určují čtverec $A_1B_1C_1D_1$, kde $A_1 = AS_1 \cap BS_2, B_1 = BS_2 \cap CS_3$, a vyjádřete jeho obsah v závislosti na a.

12. Jsou dány dvě různé soustředné kružnice a pevný bod M na vnitřní kružnici. Bodem M vedeme jednak libovolnou tětivu MA vnitřní kružnice, jednak tětivu $BC \perp MA$ vnější kružnice. Co vyplní středy jednotlivých stran všech trojúhelníků ABC, mění-li se poloha bodu A? Co vyplní těžiště všech těchto trojúhelníků ABC?

13. Určete všechna reálná a, b, c, pro která je výraz

$$\frac{b+c}{a} - \frac{c+a}{b} - \frac{a-b}{c}$$

roven nule

14. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$ax^2 = a^2 - a - 2$$

s reálným parametrem a.

15. Budiž dána kružnice k o středu S a poloměru r. Zvolme na ní body A, B tak, že AB je jejím průměrem. Buď X libovolný bod kružnice k různý od A, B. Na polopřímce AX určeme bod Y tak, aby platilo $|AY| = |BX|$. Co vyplní všechny body Y, když bod X probíhá kružnici k?

16. Najděte všechny konvexní čtyřúhelníky, které jsou svou úhlopříčkou rozděleny na dva podobné trojúhelníky. Určete, kdy je tato podobnost shodností.

3.2 Úlohy II. kola

1. Určete všechy trojice reálných čísel a, b, c, pro které je výraz

$$a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)-c(a+b)^2$$

roven nule.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t, \quad x+y+z=s,$$

s neznámými t, x, y, z a s nenulovými parametry a, b, c a libovolným s.

3. Buďte dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Najděte na přímce p bod O splňující $|\sphericalangle XOP|=|\sphericalangle YOP|$, kde $P \neq O$ je libovolný bod přímky P. Stanovte podmínku řešitelnosti pro různé polohy bodů X, Y.

4. Buď dán rovnoběžník $ABCD$. Označme po řadě M, N středy stran AD, BC a dále P, Q průsečíky úhlopříčky BD s přímkami AN, MC. Dokažte, že

$$|BP|=|PQ|=|QD|, \quad |PN|=|MQ|=\frac{1}{3}|AN|.$$

4 kategorie D

4.1 Úlohy I. kola

1. Gumový míček pustíme volně z ruky z určité výšky na podlahu, od níž se opět odrazí vzhůru. Po každém odrazu dosáhne míček výšky rovné $\frac{3}{5}$ té výšky, z níž právě dopadl.

(a) Jestliže jsme pustili míček z výšky 12 metrů, určete, jaké výšky dosáhne po třetím odrazu od podlahy?

(b) Z jaké výšky jsme míček pustili, jestliže po třetím odrazu od podlahy dosáhl výše $\frac{7}{3}$ m?

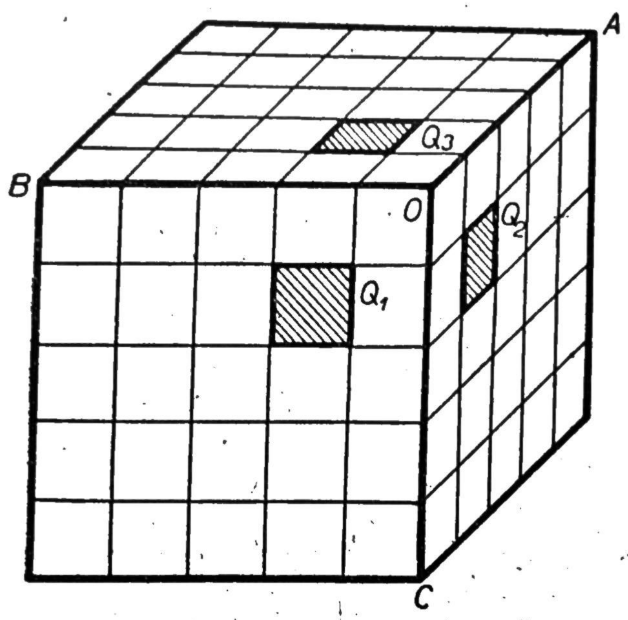
2. V obchodě měli ráno určitý počet bochníků chleba. Z toho závodní kuchyně odebrala $\frac{3}{4}$ zásoby a ještě navíc $\frac{1}{4}$ bochníku. Potom $\frac{3}{4}$ zbytku zásoby a $\frac{1}{4}$ bochníku navíc koupilo sousední uzenářství, $\frac{3}{4}$ zbytku a další $\frac{1}{4}$ bochníku koupila mateřská škola na svačiny žákům, načež $\frac{3}{4}$ zbytku poslední zásoby a $\frac{1}{4}$ bochníku odebral kupující.

(a) Vypočtěte, kolik bochníků chleba měli původně v obchodě.

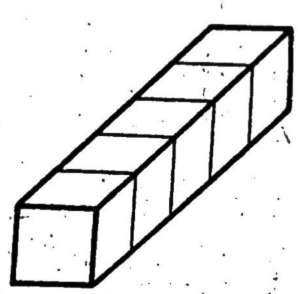
(b) Vysvětlete, jak je možné, že při žádném z uvedených prodejů nemuseů prodavač bochníky rozkrajovat.

3. Budiž dána krychle o hraně velikosti 5 cm. Krychle je slepena z krychliček o hraně 1 cm. Zvolme na povrchu krychle tři čtverečky Q_1, Q_2, Q_3 o stranách 1 cm tak, jak je naznačeno v obr. 26. Nad čtverečkem Q_1 ve směru hrany OA (viz obr. 26) vyrazíme sloupec složený z pěti krychliček (vyňatá část je znázorněna na obr. 27). Tím vznikne v dané krychli otvor. Obdobným způsobem sestrojíme otvor nad čtverečkem Q_2 ve směru hrany OB a dále nad čtverečkem Q_3 ve směru hrany OC. (Celkem bylo vyňato 13 krychliček.)

Nyní provrtanou krychli ponoříme do barvy, aby se povrch a dutiny obarvily. Po uschnutí krychli rozbijeme na krychličky o hranách 1 cm. Určete, kolik jsme dostali krychliček, které mají obarvenou žádnou, jednu, dvě, tři, čtyři, pět nebo šest stěn.



Obr. 26.



Obr. 27.

4. Je dán trojúhelník ABC. Zkonstruujte střed S kružnice opsané pouze za pomoci (je-li třeba více) trojúhelníkových pravítek (tj. můžete rýsovat pouze rovnoběžky s existujícími přímkami a kolmice na ně). Odůvodněte správnost nalezené konstrukce.

5. Z Číny dorazila zásilka tří druhů čajů. Všech čajů bylo dohromady méně než 4 tuny, přitom celkové čisté hmotnosti všech tří druhů byly navzájem stejné. První druh byl dopraven v 76 bedničkách, druhý v 57 bedničkách jiné velikosti, třetí druh v 60 bedničkách ještě jiné velikosti. V každé bedničce byl celočíselný počet kilogramů čaje. Kolik kg každého čaje bylo a kolik kg čaje bylo v jednotlivých bedničkách?

6. Je dán trojúhelník ABC a kružnice k, která protíná strany AB, BC, CA postupně ve dvojicích bodů (buď různých, nebo splývajících)

$$(C_1, C_2)\,, \quad (A_1, A_2)\,, \quad (B_1, B_2)\,.$$

Určete, jak musí být zvolen střed a poloměr kružnice k, aby platilo

$$|AC_1| = |BC_2|\,, \quad |BA_1| = |CA_2|\,, \quad |CB_1| = |AB_2|\,.$$

7. Pan Novák je předsedou JZD v obci. Občas jezdívá z obce do okresního města. Tam pro něho odpoledne přijíždí na motocyklu z jejich obce vždy ve stejnou dobu jeho syn, který jej hned po svém příjezdu odváží domů, kam přijíždějí vždy v 17:00 po půlhodinové jízdě.

Jednoho dne skončil pan Novák v okresním městě svá jednání dříve a vydal se v 15:45 obvyklou cestou pěšky synovi naproti. Jakmile se setkali, nasedl pan Novák na motocykl a odjeli ihned domů, kam dojeli v 16:50. Předpokládejme, že motocykl jede oběma směry (tj. z obce do města a zpět) stejnou rychlostí.

(a) V kolik hodin se onoho dne oba setkali?

(b) Jakou část vzdálenosti z města k obci ušel pan Novák pěšky?

(c) Jaký je poměr rychlostí pěší chůze pana Nováka a motocyklu?

8. V trojúhelníku ABC platí $|AC| = |BC|$. Na stranách AC, BC zkonstruujte body A', B' tak, aby platilo

$$|AA'| = |A'B'| = |BB'|\,,$$

a dokažte, že $A'B' \parallel AB$.

9. Rychlík délky 200 m jede rychlostí 16 m/s. Na druhé koleji trati přejíždí opačným směrem nákladní vlak. Strojvedoucí rychlíku zjistil, že poslední vagón nákladního vlaku minul lokomotivu za 12 sekund od setkání lokomotiv. Dále zjistil, že od okamžiku, kdy se setkaly lokomotivy obou vlaků, až do okamžiku, kdy se minuly oba poslední vagóny vlaků, uplynulo 20 sekund. Jak dlouhý je nákladní vlak a jakou jel rychlostí?

10. Kterým nejmenším přirozeným číslem musíme vynásobit číslo 56 010 528, abychom dostali číslo, které je současně druhou mocninou nějakého přirozeného čísla a které je současně třetí mocninou jiného přirozeného čísla?

11. Je dáno číslo $m > 0$ a body A, B v rovině. Uvažme všechny rovnoběžníky $ABCD$ takové, že $|AD| = m$. Jaký útvar vyplní středy všech těchto rovnoběžníků?

12. Je dána kružnice k o středu S a poloměru r. Dále je dán bod A ležící vně kružnice k. Uvažme kružnici ℓ se středem S, poloměrem SA a označme A_0 druhý krajní bod jejího průměru jdoucího bodem A. Dále uvažme kružnici m o poloměru $2r$ se středem A_0. Nechť A_1, A_2 jsou průsečíky kružnic ℓ, m. Dokažte, že jsou přímky AA_1, AA_2 tečnami kružnice k.

13. V nádobě máme 910 cm^3 solného roztoku, který vznikl rozpuštěním 80 g soli v čisté vodě. Odlejme 245 cm^3 roztoku a doplňme odebrané množství čistou vodou na původních 910 cm^3. Pak odlejme z nového roztoku opět 245 cm^3 a odebrané množství doplňme zase čistou vodou na původních 910 cm^3. Kolik gramů soli je v 910 cm^3 posledního roztoku?

14. Nechť $x238y$ značí pětimístné přirozené číslo N v desítkovém zápisu. Jaké musí být cifry x, y, aby bylo N dělitelné patnácti?

15. Mějme pravidelný osmiúhelník $A_1A_2 \dots A_8$ a označme O jeho střed. Uvnitř toho osmiúhelníka uvažme čtverec A_1A_2CD, jehož střed označíme S.

Čtvercem A_1A_2CD budeme pohybovat tak, že stále zůstane v daném osmiúhelníku. Čtverec nejdříve otočíme kolem bodu A_2 tak, že vrchol C splyne s bodem A_3; novou polohu bodu D označme D'. Čtverec, který jsme tak dostali, opět otočíme, tentokrát kolem bodu A_3, a to tak, že bod D' po otočení splyne s bodem A_4. Stejným způsobem postupně provedeme další otáčení čtverce kolem bodů $A_4, A_5, \dots, A_8, A_1$. Při posledním otočení se čtverec dostane do své původní polohy.

Vyšetřete, jakou čáru opsal bod S při všech osmi otočeních.

16. Je dána úsečka AB a uvnitř jedné z polorovin daných přímkou AB jsou dány body M, N takové, že součet velikostí úhlů $\sphericalangle MAB, \sphericalangle NBA$ je $180°$. Úhel $\sphericalangle MAB$ je rozdělen polopřímkami AM_1, AM_2 na tři úhly stejné velikosti, tj.

$$|\sphericalangle MAM_1| = |\sphericalangle M_1AM_2| = |\sphericalangle M_2AB| = \frac{1}{3}|\sphericalangle MAB|.$$

Stejně tak je úhel $\sphericalangle NBA$ je rozdělen polopřímkami BN_1, BN_2 na tři stejně velké úhly tak, že $|\sphericalangle NBN_1| = \frac{1}{3}\,|\sphericalangle NBA|$. Označme C průsečík polopřímek AM_1, BN_1 a U průsečík polopřímek AM_2, BN_2. Co musí platit o úhlech $\sphericalangle MAB$ a $\sphericalangle NBA$, aby bylo $UC \parallel AM$?

4.2 Úlohy II. kola

1. Z konečné stanice městských pouličních autobusových tratí vycházejí tři okružní autobusové tratě.

Tři určité vozy označené čísly 1, 2, 3 vyjely v 5:00 na své tratě. Vůz č. 1 po svém návratu na konečnou stanici vyjíždí opět v 5:40. Vůz č. 2 vyjíždí znovu v 6:00 a vůz č. 3 znovu v 6:20. S těmito časovými rozdíly projíždějí vozy své tratě po celý den.

V kolik hodin dopoledne budou tyto tři vozy opět vyjíždět současně z konečné stanice?

2. Zlomek $\frac{1}{13}$ vyjádřeme jako desetinné číslo. Která cifra stojí v tomto rozvoji na 1000. místě za desetinnou čárkou?

3. Narýsujte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno $|AB| = 7$ cm, $|\sphericalangle BAD| = 60°$ a strana CD prochází průsečíkem os úhlů $\sphericalangle BAD, \sphericalangle ABC$. Dokažte, že $|AB| = 2|AD|$.

4. Uvnitř strany AC trojúhelníku ABC zvolme bod E a veďme jím rovnoběžku s přímkou AB. Označme F její průsečík se stranou BC. Bodem F veďme rovnoběžku s přímkou AC a označme G její průsečík se stranou AB. Jak je třeba volit bod E, aby $EG \parallel BC$? Co pak platí o bodech F, G?