4. ročník MO (1954/1955)

Obsah

1 kategorie A

1.1 Úlohy I. kola

1. Buďte dány zlomky

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0 \neq d$. Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x}.$$

2. Rovnicí

$$y = 2^x + 2^{-x}$$

je dána funkce reálné proměnné x.

(a) Určete obor hodnot.

(b) Určete, na kterých intervalech je daná funkce monotónní. Rozhodněte, zda (a kde) nabývá daná funkce nejmenší hodnoty.

3. Mějme dánu délku p hrany čtvercové podstavy jehlanu $MNPQV$ a odchylku β přímky VP od roviny MNP. Přitom každé dvě z rovin MNP, VMN, VQM jsou k sobě kolmé.

Do daného jehlanu je vepsán rovnoběžnostěn $\mathsf{R} = ABCDA'B'C'D'$ o podstavě $ABCD$, přičemž $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Vrcholy $A = M, B, C, D$ leží v rovině MNP a vrcholy A', B', C' leží po řadě uvnitř hran VM, VN, VP. Dále je dána odchylka α přímky AC' od roviny MNP.

(a) Narýsujte obraz obou těles v rovnoběžném promítání a proveďte diskuzi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům p, α, β.

(b) Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu R v závislosti na p, α, β.

4. Vzdálenost paty výšky o délce v kosého kuželu s kruhovou podstavou o poloměru r od středu podstavy je d. Určete konstrukčně ty řezy daného kuželu vrcholovými rovinami, které jsou pravoúhlými trojúhelníky a které obsahují střed podstavy. Určete podmínky řešitelnosti.

5. Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z splňující rovnici

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

6. Určete počet trojúhelníků, jejichž všechny strany mají celočíselné délky a nejsou větší než dané přirozené číslo n.

7. V rovině ϱ je dán pravidelný n-úhelník ($n > 2$) $A_1 \dots A_n$ se středem S. Uvnitř jednoho z poloprostorů vyťatých rovinou ϱ zvolme bod U tak, aby platilo $SU \perp \varrho$. Uvnitř polopřímky SU zvolme bod V a uvažme jehlan $A_1 \dots A_n V$. Bodem A_1 proložme rovinu $\omega \perp VA_2$ a označme X její průsečík s přímkou VA_2.

(a) Dokažte, že velikost odchylky rovin VA_1A_2, VA_2A_3 je rovna jedné z hodnot

$$|\sphericalangle A_1XA_3|, \quad 180^\circ - |\sphericalangle A_1XA_3|.$$

(b) Určete množiny bodů X, probíhá-li bod V vnitřek polopřímky SU.

(c) Pro kterou polohu bodu V má bod X od roviny největší vzdálenost? Určete tuto hodnotu vzdálenosti.

8. Nechť čísla $a \geq b \geq c$ udávají velikosti stran daného trojúhelníku ABC. Určete číslo x tak, aby úsečky o velikostech $a+x, b+x, c+x$ udávaly strany pravoúhlého trojúhelníku.

9. První tři členy geometrické posloupnosti reálných čísel mají součet s; součet druhých mocnin těchto tří členů je roven $s^2 - hs$, kde $hs \neq 0$. Určete první člen a kvocient této posloupnosti pomocí h, s a proveďte diskuzi řešitelnosti úlohy.

10. Dokažte, že mnohočlen $a^6 - a^5 - a^4 + a^2 + a + 1$ je dělitelem mnohočlenu

$$a^{3n} - a^{2n+1} - a^{2n} - a^{2n-1} + a^{n+1} + a^n + a^{n-1} - 1$$

pro každé přirozené číslo n.

11. Nechť jsou dány číslo $m > 0$ a obdélník $ABCD$ o stranách $|AB| = a \geq b = |BC|$. Zvolme postupně body X, Y uvnitř stran CD, BC a uvažme obdélník $XCYZ$.

(a) Vyšetřete množinu všech takto sestrojených bodů Z, pro které navíc platí

$$|\sphericalangle XAD| = |\sphericalangle YAB|.$$

(b) Sestrojte úsečku XY takovou, aby platilo

$$|\sphericalangle XAD| = |\sphericalangle YAB|, \quad |XY| = m.$$

Proveďte diskuzi řešitelnosti.

12. Jsou dány tři po dvou mimoběžné přímky p, q, x. Dále buď dána rovina $\varrho \parallel x$, přičemž přímka x v rovině ϱ neleží. Určete všechny body $X \in x$, z nichž se přímky p, q promítají na rovinu ϱ jako různoběžky. (Je-li X střed promítání a $\varrho \not\ni X$ průmětna, pak průmětem přímky $m \not\ni X$ je průsečnice rovin ϱ a (X, m).) Proveďte diskuzi řešitelnosti úlohy vzhledem k různým polohám daných přímek a roviny ϱ.

13. Určete všechna přirozená čísla k taková, aby číslo k^2 zapsané v dekadické soustavě mělo na posledních dvou místech stejné nenulové cifry.

14. Najděte všechna komplexní čísla z vyhovující rovnici

$$z = \frac{z + a\mathrm{i}}{\bar{z}},$$

kde a je dané reálné číslo. Řešení geometricky interpretujte.

15. Řešte soustavu rovnic

$$x + y = \alpha,$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos\alpha,$$

kde α je dané číslo.

16. Nechť jsou dány body A, B, C, D na jednotkové kulové ploše se středem S. Pokud leží bod S uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, potom alespoň jedna ze tří hran AB, AC, AD má délku větší než $\sqrt{2}$. Dokažte.

1.2 Úlohy II. kola

1. Řešte rovnici

$$\frac{1+x}{m+x} = \frac{m^3+x}{m^2+x}$$

s neznámou x a reálným parametrem m.

2. Dokažte, že tvoří-li obrazy komplexních čísel $0, u, v$ vrcholy jednotkového rovnostranného trojúhelníku, potom

$$u\bar{v} + \bar{u}v = 1.$$

3. Buď dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je stěna a $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) o hraně délky h a číslo $m > h$. Sestrojte obdélník $MNPQ$, jehož vrcholy M, N, P, Q leží po řadě na polopřímkách $AB, AD, A'D', A'B'$ a jehož úhlopříčky mají velikost m. Označme U, V postupně středy stran MN, PQ. Jaký útvar vyplní úsečky UV všech takto sestrojených obdélníků? Udejte podmínku řešitelnosti.

4. Buď dán rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB. Nechť bod X leží uvnitř strany AC a bod $Y \neq B$ leží na polopřímce opačné k BC. Označme P průsečík úseček AB a XY. Dokažte, že $|PX| = |PY|$ právě tehdy, když $|AX| = |BY|$.

1.3 Úlohy III. kola

1. Buď dán lichoběžník $ABCD$ takový, že $AB \parallel CD, |AB| > |CD|$. Označme E průsečík přímek AC, BD a F průsečík přímek AD, BC. Dále označme GH přímku jdoucí bodem E a rovnoběžnou se základnami, přičemž G leží na přímce AD a H na přímce BC. Označme po řadě K, L středy základen AB, CD. Dokažte, že

(a) přímka EF prochází body K, L,

(b) exituje průsečík M přímek AC, KH a průsečík N přímek BD, KG,

(c) body F, M, N leží na jedné přímce.

2. Buďte dány dvě soustředné kulové plochy K_1 s poloměrem a a K_2 s poloměrem b, přitom $a < b$. Označme $ABCDA'B'C'D'$ kolmý hranol se čtvercovou podstavou $ABCD$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$), jehož vrcholy A, B, C, D leží na ploše K_2, a rovina $A'B'C'D'$ se dotýká plochy K_1. Nechť dále platí

$$\frac{|AB|}{|AA'|} = \frac{a}{b}.$$

Vypočtěte rozměry tohoto hranolu. Kolik takových hranolů (až na shodnost) existuje?

3. V rovině komplexních čísel je vepsán jednotkové kružnici se středem v počátku pravidelný 17úhelník s jedním vrcholem v bodě $1 + 0\mathrm{i}$. Určete počet jeho vrcholů, které leží uvnitř jednotkové kružnice se středem $\sqrt{3/2}(1 + \mathrm{i})$.

4. Jsou-li a, b, c různá reálná čísla, potom má rovnice

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

vždy reálné řešení. Dokažte.

2 kategorie B

2.1 Úlohy I. kola

1. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{1}{x+1} + m(y-2) = 1,$$
$$\frac{m}{x+1} + y - 1 = 2m,$$

kde x, y jsou neznámé a m je reálný parametr.

2. Nechť a, b, c jsou po dvou různá kladná čísla.

(a) Dokažte, že platí-li
$$(a-b)(a-c) > 0,$$
pak je a největším nebo nejmenším z dané trojice čísel. Lze tvrzení obrátit?

(b) Dokažte, že platí-li
$$(a-b)(b-c) > 0,$$
pak je a největším nebo nejmenším z dané trojice čísel. Lze tvrzení obrátit?

(c) Jestliže je číslo a největším nebo nejmenším z čísel a, b, c, potom platí
$$b(c+a) > a(c-a).$$
Lze tvrzení obrátit?

3. Buď dána kružnice m a její dva navzájem kolmé průměry AA', BB'. Uvnitř menšího oblouku AB zvolme bod X a označme K průsečík přímek BX, AA'. Dále označme k kolmici vedenou bodem K k přímce AA' a t tečnu kružnice m v bodě X. Určete množinu průsečíků Y přímek k, t, probíhá-li bod X vnitřek menšího oblouku AB kružnice m.

4. Kvádr má rozměry a, b, c. Zobrazte v rovnoběžném promítání lomenou čáru na povrchu kvádru, která je nejkratší spojnicí dvou protějších vrcholů tohoto kvádru. Konstrukci proveďte na základě předchozího výpočtu.

5. Nechť m je dané reálné číslo. Určete všechna reálná čísla $x \neq -m$ splňující vztah

$$\frac{4x}{x+m} \geq 2.$$

Proveďte diskuzi vzhledem k různým hodnotám čísla m.

6. Nechť je dáno reálné číslo a. Proveďte rozbor funkce

$$y = x^2 + |ax^2 - 1|$$

vzhledem na různé hodnoty čísla a a na základě rozboru načrtněte graf funkce.

7. Mějme kružnici k se středem S a její průměr AB. Nechť je dále C bod na kružnici k různý od A, B. Na polopřímce BC najděte bod D tak, aby platilo $|BD| = 2|BC|$.

(a) Dokažte, že se úsečky AC, SD protínají v bodě X ležícím uvnitř každé z nich.

(b) Určete množinu všech bodů X, probíhá-li bod C všechny body kružnice k s výjimkou bodů A, B.

8. V trojúhelníku o stranách a, b, c označme

$$x = b^2 + c^2 - a^2$$

a α úhel proti straně a. Dokažte, že $\alpha < 90^\circ$ právě tehdy, když $x > 0$; $\alpha = 90^\circ$ právě tehdy, když $x = 0$; a $\alpha > 90^\circ$ právě tehdy, když $x < 0$.

9. (a) Buďte a, b, c kladná racionální čísla taková, že

$$a + \sqrt{b} = \sqrt{c}.$$

Dokažte, že jsou čísla b, c druhými mocninami racionálních čísel.

(b) Buďte a, b, c, d kladná racionální čísla, přičemž b není druhou mocninou racionálního čísla. Jestliže platí

$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d},$$

potom $a = c, b = d$. Dokažte.

10. Najděte posledních pět cifer dekadického zápisu čísla 5^{555}.

11. (a) Ve čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$ označme T_n těžiště jeho stěny, která je protější k vrcholu A_n, kde $n = 1, 2, 3, 4$. Dokažte, že se úsečky $A_nT_n, n = 1, 2, 3, 4$ protínají v jednom bodě T (takový bod nazveme těžiště čtyřstěnu) a platí

$$|A_nT_n| = 4|TT_n|.$$

(b) Buď dána rovina ABC a v ní bod P, dále bod Q, který v rovině ABC neleží. Uvažme čtyřstěn $ABCD$, jehož vrchol D leží uvnitř polopřímky PQ, a označme T jeho těžiště. Co vyplní všechny body T, probíhá-li bod D vnitřek polopřímky PQ?

12. Označme T střed základny PQ daného rovnoramenného trojúhelníku OPQ. V polorovině PQO buď dána kružnice k o poloměru r dotýkající se přímky PQ v bodě T. Sestrojte body A, B postupně uvnitř úseček OP, OQ, které mají tyto vlastnosti:

(a) $AB \parallel PQ$,

(b) přímka AB protne kružnici k ve dvou různých bodech M, N,

(c) platí $|MN| = 3|AB|$.

Proveďte diskuzi řešitelnosti vzhledem k délkám a, v, r, kde $a = \frac{1}{2}|PQ|, v = |OT|$.

13. Dokažte, že pro každé reálné číslo a platí

$$3\left(1 + a^2 + a^4\right) \geq \left(1 + a + a^2\right)^2,$$

a určete, kdy nastává rovnost.

14. Označme obvyklým způsobem a, b, c strany trojúhelníka a α, β, γ jeho úhly. Platí-li pro jeho úhly $\beta = 3\alpha$, pak pro jeho strany platí vztah

$$\frac{c^2}{(b-a)^2} = \frac{b+a}{a}.$$

Dokažte.

15. Buď dána přímka p a na ní po řadě různé body O, A_1, A_2, A_3 tak, že $|OA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3|$. V jedné z polorovin vyťatých přímkou p sestrojme čtverce $OA_1B_1B_0, A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2$. Dokažte, že

$$|\sphericalangle B_1OA_1| + |\sphericalangle B_2OA_2| + |\sphericalangle B_3OA_3| = 90^\circ.$$

16. Buďte dány dvě různé rovnoběžné roviny κ, γ. V rovině κ je dán kruh K, v rovině γ čtverec C. Buď X libovolný bod kruhu K a Y libovolný bod čtverce C (tj. i jeho vnitřku). Najděte množinu středů všech takových úseček XY.

2.2 Úlohy II. kola

1. Nechť je dáno reálné číslo a. Proveďte rozbor funkce

$$y = ax^2 + |x^2 - 1|$$

vzhledem na různé hodnoty čísla a a na základě rozboru načrtněte graf funkce.

2. Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \leq 2.$$

3. Buď dána rovina ϱ a bod $C \notin \varrho$. Označme P patu kolmice vedené bodem C k rovině ϱ. V rovině ϱ buď dále dán bod $A \neq P$. Uvažme obdélník $ABCD$, kde $B \in \varrho$, a jeho střed označme S. Vyšetřete množinu bodů B a množinu bodů D všech takto sestrojených obdélníků $ABCD$.

4. V téže polorovině vyťaté přímkou p leží trojúhelníky $ABC, A'B'C'$ tak, že body A, B, A', B' leží na přímce p. Označme $c = |AB|, c' = |A'B'|$ a v, v' velikosti výšek v těchto trojúhelnících, které po řadě příslušejí ke stranám $AB, A'B'$ daných trojúhelníků. Sestrojte přímku $q \parallel p$ takovou, aby protťala úsečky $AC, BC, A'C', B'C'$ uvnitř po řadě v bodech M, N, M', N' takových, že platí $|MN| = |M'N'|$. Proveďte diskuzi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným rozměrům c, c', v, v' za předpokladu $v > v'$.

3 kategorie C

3.1 Úlohy I. kola

1. Do nádržky stále přitéká rovnoměrným proudem voda. Jestliže se v určitém okamžiku otevřou tři stejné odtokové trubice, vyprázdní se nádržka za 18 hodin. Kdybychom v témže okamžiku otevřeli jen dvě ze tří odtokových trubic, vyprázdnila by se nádrž za 30 hodin. Za kolik hodin by se vyprázdnila nádrž, kdybychom ve zmíněném okamžiku otevřeli pouze jednu ze tří odtokových trubic?

2. Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c a $d \neq 0$ platí

$$d = a + b + c,$$

potom platí také

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2.$$

Lze tvrzení obrátit?

3. Jestliže přímka rozdělí trojúhelník ABC na dva rovnoramenné trojúhelníky, má trojúhelník ABC buď dva úhly v součtu $90°$, nebo dva úhly v poměru $1 : 2$, nebo dva úhly v poměru $1 : 3$. Dokažte.

4. Nechť jsou dány kružnice k se středem S, poloměrem r a bod X, jehož vzdálenost od bodu S je x.

(a) Největší možný součet vzdáleností bodu X od kterýchkoliv dvou bodů kružnice k (různých nebo splývajících) je $2(r + x)$. Dokažte.

(b) Jaký útvar vyplní body, jejichž součet vzdáleností od kterýchkoli dvou bodů kružnice k není větší než poloviční délka kružnice k?

5. Dokažte, že každá dvě přirozená čísla mající desítkový zápis ve tvarech

$$\overline{uvuvuv}, \quad \overline{xyzxyz},$$

kde u, v, x, y, z jsou některé z cifer $0, 1, \ldots, 9$, jsou soudělná. (Připouštíme i možnosti $u = 0$ nebo $x = 0$.)

6. Určete, kolik tahů koněm lze provést na čtvercové šachovnici, která má n^2 polí, kde $n > 1$ je přirozené číslo. (Tj. určete, kolik existuje různých uspořádaných dvojic (start, cíl), kde start je výchozí pole, na které je kůň umístěn, a cíl je pole po jednom tahu tímto koněm.)

7. Buď přímka AB a na ní bod Z. Bodem Z sestrojme přímku $p \perp AB$ a zvolme na ní bod $C \neq Z$. Označme T těžiště trojúhelníka ABC. Jaký útvar vyplní bod T, probíhá-li bod C přímku p bez bodu Z?

8. Buď dána konvexní deltoid $ABCD$ s osou somérnosti AC. Označme S průsečík přímek AC, BD, veďme jím kolmice k přímkám AB, BC, CD, DA a jejich paty označme po řadě M, N, P, Q.

(a) Dokažte, že $MQ \parallel NP$.

(b) Vyjádřete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníka $MNPQ$ pomocí velikostí vnitřních úhlů daného deltoidu.

(c) Rozhodněte, kdy je $MNPQ$ lichoběžník a kdy rovnoběžník.

9. Nechť nenulová reálná čísla a, b, c splňují

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=0.$$

Určete všechna přirozená čísla n, pro která platí

$$\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)\left(\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\right)\left(\frac{1}{c^n}+\frac{1}{a^n}\right)=0.$$

10. Buď N přirozené číslo takové, že je druhou mocninou přirozeného čísla, a jehož desítkový zápis má na místě jednotek číslici 6. Dokažte, že na místě desítek v zápise tohoto čísla stojí lichá cifra.

11. Buď dán obdélník $ABCD$. Na přímkách AB, BC, CD, DA zvolme po řadě body X, U, Y, V tak, aby platilo $XY \perp UV$. Dokažte, že

$$\frac{|UV|}{|XY|}=\frac{|AB|}{|AD|}.$$

12. Buď dána kružnice k se středem S a poloměrem r. Uvnitř této kružnice je dán bod $A \neq S$. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jehož vrcholy B, C, D leží na kružnici k a $|AB| = r$.

13. Určete všechna přirozená čísla m taková, pro která je číslo $m^2 - 25$ nezáporné a dělitelné osmi.

14. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}+ay&=a,\\ ax+\frac{a}{y}&=1,\end{aligned}$$

s neznámými x, y a reálným parametrem $a \neq 0$.

15. Symbolem (S, SR) označme kružnici se středem S a poloměrem SR. Mějme dány dva různé body A, B. Jeden z průsečíků kružnic $(A, AB), (B, BA)$ označme C. Označme D průsečík kružnic $(B, BA), (C, CA)$ různý od A a E průsečík kružnic $(B, BA), (D, DC)$ různý od C. Dále označme U, V průsečíky kružnic $(A, AB), (E, EA)$ a konečně X průsečík kružnic $(U, UA), (V, VA)$ různý od A. Dokažte, že

(a) body A, B, E leží na jedné přímce,

(b) trojúhelníky EAU, UAX jsou podobné,

(c) platí $|AX| = |BX|$.

16. Trojúhelník ABC má obsah 24 cm^2. Označme X střed strany AB a Y takový bod strany BC, že platí $|BY| = 2|CY|$. Konečně označme Z průsečík úseček CX, AY. Vypočítejte obsah čtyřúhelníku $BYZX$.

3.2 Úlohy II. kola

1. Řešte rovnici
$$\frac{x}{x-m}+\frac{x}{x+m}=\frac{2x}{x+1}$$
s neznámou x a reálným parametrem m.

2. Dokažte, že každou celočíselnou částku větší než 7 Kčs je možné zaplatit pomocí tříkorunových a pětikorunových bankovek. Určete nejmenší počet (tří- a pětikorunových) bankovek, kterými je možné zaplatit částku 364 Kčs.

3. Buď dána úsečka S_1S_2 a její vnitřní bod P. Označme $v_1 = |PS_1|, v_2 = |PS_2|$ a předpokládejme $v_1 \geq v_2$. Uvažme kružnice k_1, k_2 postupně se středy S_1, S_2 a poloměry r_1, r_2. Dále uvažme přímku $p \perp S_1S_2$ procházející bodem P. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na kružnici k_1, bod C na kružnici k_2 a aby body B, D ležely na přímce p. Dokažte, že pokud kružnice k_1, k_2 nemají společný bod na přímce p a současně platí
$$|r_1 - r_2| \leq v_1 - v_2 < r_1 + r_2,$$
potom má daná úloha řešení.

4. Buď dán trojúhelník ABC, kružnice k tomuto trojúhelníku opsaná a její střed S. Osa úhlu BCA protne kružnici k ještě v bodě $D \neq C$. Dokažte, že je trojúhelník ABD rovnoramenný a přímka SD je jeho osou souměrnosti.

4 kategorie D

4.1 Úlohy I. kola

1. Pět chlapců pracovalo šest dní na chmelové brigádě. Za vykonanou práci jim měla být vyplacena odměna úměrná jejich práci, ale s tou výhradou, že z této odměny jim odečtou za stravování částku 6 Kčs denně za každého chlapce. Přitom průměrný denní výkon prvního chlapce byl 6, druhého 11, třetího 12, čtvrtého 15 a pátého 16 vaků načesaného chmelu. Za vykonanou práci dostali chlapci po sjednané srážce odměnu v součtu 180 Kčs. Vypočítejte, jak si chlapci spravedlivě rozdělí tuto částku.

2. Sedm spolužáků se na začátku prázdnin dohodlo, že každý napíše třem dalším z nich zprávu o svém prázdninovém pobytu. Je to možné zařídit tak, aby každý z nich dostal právě tři dopisy od těch třech spolužáků, kterým sám napsal?

3. Buďte dány dvě úsečky o velikostech p, q. Uvažme rovnostranný trojúhelník ABC o straně velikosti p a označme O střed kružnice jemu opsané. Na polopřímkách opačných postupně k BA, CB, AC uvažme (postupně) body X, Y, Z takové, že

$$|BX| = |CY| = |AZ| = q.$$

Dokažte, že XYZ je rovnostranný trojúhelník a O je středem kružnice jemu opsané.

4. Mějme trojúhelník ABC. Sestrojte bod X uvnitř strany AC a bod Y uvnitř strany BC tak, aby platilo

$$|AX| = |XY|, \quad XY \parallel AB.$$

Dokažte správnost provedené konstrukce.

5. Je dán zlomek

$$\frac{-x}{a^2 + y^2},$$

kde a je pevně dané nenulové číslo. Čísla x, y volíme libovolně. Dokažte, že

(a) jmenovatel zadaného zlomku je kladný,

(b) znaménko výsledného podílu je opačné k znaménku čísla x, nebo se číslo x i daný zlomek současně rovnají nule.

6. Nechť a, b, c jsou libovolná čísla. Dokažte, že je číslo

$$x = 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left((a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\right)$$

nezáporné a najděte všechny trojice čísel a, b, c, pro které je číslo x rovno nule.

7. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Na polopřímkách opačných k CA, CB zvolme postupně body B_1, A_1 takové, že

$$|CB_1| = |CB|, \quad |CA_1| = |CA|.$$

Bodem C veďme kolmici p k přímce A_1B_1 a označme D její patu. Dokažte, že

(a) jsou trojúhelníky ABC a A_1B_1C shodné,

(b) přímka p protne úsečku AB v jejím vnitřním bodě F,

(c) bod F z předchozího bodu je střed úsečky AB,

(d) střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku půlí jeho přeponu.

8. Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB má obvod 50 cm. Označme po řadě D, E středy stran BC, AC. Obvod trojúhelníku ABE je o 8 cm větší než obvod trojúhelníku ACD. Vypočtěte velikosti stran AB, AC.

9. Vzdálenost Prahy a Brna po železniční trati je 255 km. Rychlík projede tuto trať za dobu 4 h 45 min. Chceme-li, aby se doba jízdy rychlíku zkrátila o 10 %, o kolik procent se musí zvýšit průměrná rychlost vlaku?

10. Buďte a, b, c čísla, ne všechna nulová, splňující

$$ab + bc + ca = 0.$$

Dokažte, že potom má zlomek

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

tutéž hodnotu pro všechny přípustné trojice a, b, c, a tuto hodnotu určete.

11. Buď dán rovnoběžník $ABCD$ a libovolný bod O. Bodem O sestrojte přímku p protínající přímky DA, AB, BC, CD po řadě v takových bodech M, X, N, Y že platí $|XY| = |MN|$. Dokažte správnost nalezené konstrukce a rozhodněte, kolik má úloha řešení.

12. Uvnitř trojúhelníku ABC_1 leží bod C_n takový, že

$$|\sphericalangle C_nAB| = \frac{1}{n}|\sphericalangle C_1AB|, \quad |\sphericalangle ABC_n| = \frac{1}{n}|\sphericalangle ABC_1|,$$

kde $n > 1$ je přirozené číslo. Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle AC_nB$ pomocí velikosti úhlu $\sphericalangle ACB$.

13. Označme

$$V(m) = \frac{1+m}{5+m}.$$

(a) Dokažte, že

$$\frac{1}{5} < V(m) < 1$$

pro libovolné přirozené m.

(b) Určete, který z rozdílů $V(200) - V(100), V(300) - V(200)$ je větší.

14. Dokažte, že je mnohočlen

$$4x^4y^2 + 1 - x^2\left(4y^2+1\right)$$

kladný pro libovolná čísla $x > 1, y > 1$.

15. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC. Dále je v polorovině BCA dána kružnice k dotýkající se přímky BC v bodě B, jejíž průměr je roven vzdálenosti bodu A od přímky BC. Sestrojte sečnu s kružnice k takovou, že

(a) $s \parallel BC$,

(b) přímka s protíná kružnici k v bodech M, N a úsečky AB, AC v bodech X, Y, přičemž platí $|MN| = |XY|$.

Dokažte, že úloha má jediné řešení.

16. Buď dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, ve kterém $|BC| < |AC|$. Označme P patu výšky z vrcholu C a O střed úsečky AB. Dokažte, že body A, O, P, B leží v tomto pořadí na přímce. Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle OCP$ pomocí velikosti úhlu $\sphericalangle CAB$.

4.2 Úlohy II. kola

1. Obdélník $ABCD$ má rozměry $|AB| = 6,6$ cm, $|BC| = \frac{14}{3}$ cm a označme F střed strany AB. Na polopřímce BC uvažme bod X takový, že obsah trojúhelníka AFX je roven $\frac{5}{8}$ obsahu obdélníka $ABCD$. Vypočtěte délku úsečky BX.

2. Číslování stránek učebnice matematiky pro 6. ročník začíná číslem 5 a končí číslem 272. Podobně v učebnici pro 7. ročník začíná číslování stránek číslem 3 a končí číslem 320; v učebnici pro 8. ročník začíná číslem 3 a končí číslem 255. Kolik cifer bylo celkem natištěno při očíslování všech stránek všech tří učebnic?

3. V rovině jsou dány různé body S, P. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou délky c tak, aby bod S byl středem přepony AB a P středem odvěsny AC. Dokažte, že úloha má řešení, pokud $c > 2|SP|$.

4. Mějme lichoběžník $ABCD$ takový, že $AB \parallel CD, |AB| > |CD|$. Dokažte, že součet úhlů při základně CD je větší než součet úhlů při základně AB.