Sbírka úloh z analýzy v komplexním oboru

Podle cvičení k předmětu M6170 (jaro 2022) vysázel Jan Procházka,
za což mu patří obrovský dík

Obsah

Úvod

Tato sbírka úloh z komplexní analýzy k předmětu M6170 Analýza v komplexním oboru vznikla studentským „přeTEXováním“ poznámek a příkladů doc. Zemánka používaných ve cvičení z tohoto předmětu.

V kapitolách 1 až 8 se nacházejí řešené i neřešené úlohy jakožto přehled používaných vzorců. Kapitola 9 obsahuje zadání cvičení z předchozích kapitol s výsledky a sbírku je tak jednodušší používat k procvičování. V řešeních cvičení je někdy odkazováno na přednášku (skripta [1]).

Poznámka. V textu se vyskytuje v matematickém zápisu jak „i“ (značí imaginární jednotku, tj. $\mathrm{i}^2 = -1$), tak „i“ (značí indexovou proměnnou), viz [5, strana 5].

Seznam zkratek

C-S-B Cauchyho-Schwartzova-Buňakovského nerovnost

C-R Cauchyho-Riemannovy[1] nutné podmínky komplexní diferencovatelnosti

l'H. p. l'Hospitalovo pravidlo

[1] nebo také Cauchyho-Riemannovy-d'Alambertovy-Eulerovy-Lagrangeovy (C-R-d'A-E-L)

Kapitola 1

Komplexní čísla

V této kapitole se budeme věnovat počítání s komplexními čísly. Nejprve si připomeneme některé základní vlastnosti komplexních čísel.

Nechť tedy $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, a, $b \in \mathbb{R}$ je komplexní číslo. Pak platí:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2+b^2} & \arg z &= \varphi \in [-\pi, \pi) \\ \cos\varphi &= \frac{a}{|z|} & \sin\varphi &= \frac{b}{|z|} \\ z &= |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} &:= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \end{aligned}$$

Pro funkci arg dále platí

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & a > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi & a < 0, b > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi & a < 0, b \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a = 0, b < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Pro $a + b\mathrm{i}$ a $c + d\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ platí (u posledního za předpokladu $c^2 + d^2 > 0$)

$$\begin{aligned} (a+b\mathrm{i}) + (c+d\mathrm{i}) &= (a+c) + (b+d)\mathrm{i} \\ (a+b\mathrm{i}) \cdot (c+d\mathrm{i}) &= (ac-bd) + (ad+bc)\mathrm{i} \\ \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Pro $u = |u|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ a $v = |v|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ platí (ve druhém případě $v \neq 0$)

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \Big(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)\Big) \qquad \frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|}\Big(\cos(\alpha-\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha-\beta)\Big)$$

Dále pro $n \in \mathbb{Z}$ a $z \in \mathbb{C}$ platí

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi\right)$$

Nakonec pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

kde $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

1.1 Komplexní čísla, jejich algebraický tvar a vlastnosti

Úloha 1.1. Zjednodušte následující číselné výrazy:

1. $(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$
2. $\mathrm{i} + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^{15} + \mathrm{i}^{29}$
3. $\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$

Řešení.

1. $(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = -1 + 3\mathrm{i}$
2. $\mathrm{i} + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^{15} + \mathrm{i}^{29} = \mathrm{i} + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i} = \mathrm{i} - \mathrm{i} - \mathrm{i} + \mathrm{i} = 0$
3. $\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} = \frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\frac{3+4\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} = \frac{-5+10\mathrm{i}}{9+16} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}$

△

Úloha 1.2. Dokažte, že $\Im(\mathrm{i}z) = \Re(z)$.

Řešení. Uvažme $z = x + \mathrm{i}y$. Pak $\mathrm{i}z = -y + \mathrm{i}x$. Zřejmě $\Im(\mathrm{i}z) = \Re(z)$. △

Úloha 1.3. Dokažte, že pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$\frac{1}{\frac{1}{z}} = z$$

Řešení. Pro $z = x + \mathrm{i}y$ platí $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}$. Odtud plyne

$$\frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{(\frac{x}{x^2+y^2})^2 + (\frac{-y}{x^2+y^2})^2} + \mathrm{i}\frac{-\frac{-y}{x^2+y^2}}{(\frac{x}{x^2+y^2})^2 + (\frac{-y}{x^2+y^2})^2} = \frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} + \mathrm{i}\frac{\frac{y}{x^2+y^2}}{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = x + \mathrm{i}y = z$$

△

Úloha 1.4. Ukažte, že $\sqrt{2}\,|z| \geq |\Re(z)| + |\Im(z)|$.

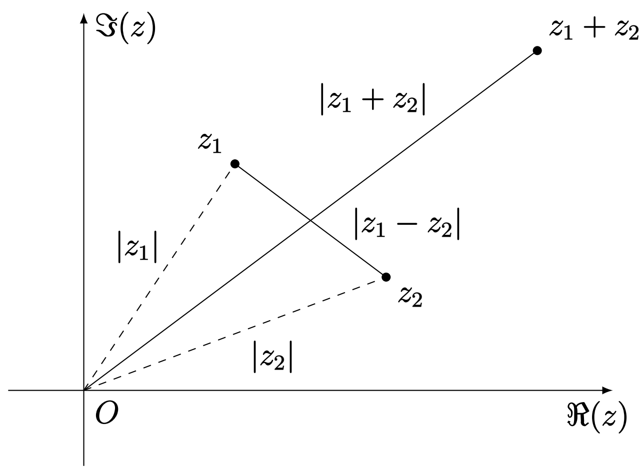
Řešení. Označme $z = x + \mathrm{i}y$, tedy $x = \Re(z)$ a $y = \Im(z)$. Nejprve $\sqrt{2}\,|z| = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$. Zřejmě platí $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. Z toho okamžitě $x^2 + y^2 \geq 2\,|x|\,|y|$ (aritmeticko-geometrická nerovnost). Přičtením x^2+y^2 máme $2x^2+2y^2 \geq x^2+2\,|x|\,|y|+y^2 = (|x|+|y|)^2$. Odmocněním získáme požadovanou nerovnost: $\sqrt{2x^2 + 2y^2} \geq |x| + |y|$. △

Úloha 1.5. Dokažte „rovnoběžníkovou rovnost“ $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ a geometricky ji interpretujte.

Řešení. Uvažme $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ a počítejme

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = \\ &= x_1^2 + \cancel{2x_1x_2} + x_2^2 + y_1^2 + \cancel{2y_1y_2} + y_2^2 + x_1^2 - \cancel{2x_1x_2} + x_2^2 + y_1^2 - \cancel{2y_1y_2} + y_2^2 = \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 = 2(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)\end{aligned}$$

Pokud chceme úlohu interpretovat geometricky, zobrazíme si čísla z_1 a z_2 do komplexní roviny na obrázku 1.1. △



Obrázek 1.1: Zakreslíme-li si komplexní čísla do komplexní roviny, vidíme, že body O, z_2, z_1+z_2, z_1 tvoří rovnoběžník. V něm platí, že součet čtverců obou úhlopříček je roven součtu čtverců délek všech stran.

Úloha 1.6. Dokažte $\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1|+|z_2|$ (druhá nerovnost je trojúhelníková).

Dodatková úloha. Ukažte, že $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| < 1$ pro $|a_i| < 1$, $\lambda_i \ge 0$, $\lambda_1 + {} + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Řešení. Nerovnosti ukážeme postupně.

i) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2|$

Platí

$$|z_2| = |z_1 + (z_2 - z_1)| \overset{\triangle\text{-nerovnost}}{\le} |z_1| + |z_2 - z_1|$$

a tudíž

$$|z_2| - |z_1| \ge -|z_2 - z_1| = -|z_1 - z_2|$$

Současně platí
$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$$
takže
$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$
Kombinací předchozích dvou výsledků dostaneme
$$-|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$
což jsou nerovnosti v $\mathbb{R}$. Z definice (reálné) absolutní hodnoty máme
$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \le |z_1 - z_2|$$
Protože je pro libovolné $z_2 \in \mathbb{C}$ je $|-z_2| = |z_2|$, dostáváme i druhou verzi
$$-|z_1 + z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$$

ii) $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ plyne z toho, že $(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R}^2, +)$ a komplexní absolutní hodnota odpovídá euklidovské normě v $\mathbb{R}^2$. Potom je přímým důsledkem trojúhelníkové nerovnosti normy.

Dokážeme pro úplnost trojúhelníkovou nerovnost euklidovské normy v $\mathbb{R}^2$. Vezměme tedy libovolné (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Chceme dokázat nerovnost
$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$
která je díky nezápornosti obou stran ekvivalentní se svojí druhou mocninou
$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \le x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$
neboli
$$\begin{aligned} 2x_1x_2 + 2y_1y_2 &\le 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ x_1x_2 + y_1y_2 &\le \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \end{aligned}$$
poslední nerovnost můžeme dále (ekvivalentně) upravovat
$$\begin{aligned} x_1x_2 + y_1y_2 &\le \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ |x_1x_2 + y_1y_2| &\le \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \text{ díky nezápornosti pravé strany} \\ (x_1x_2 + y_1y_2)^2 &\le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\ x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 &\le x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 \\ \cancel{x_1^2x_2^2} + 2x_1x_2y_1y_2 + \cancel{y_1^2y_2^2} &\le \cancel{x_1^2x_2^2} + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + \cancel{y_1^2y_2^2} \\ 2x_1x_2y_1y_2 &\le x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 \\ 0 &\le x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{aligned}$$
což je platná rovnost.

Dodatkovou úlohu s pomocí tohoto výsledku vyřešíme snadno. Nechť tedy platí $|a_i| < 1$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Označme $a := \max\{a_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Pak platí pro každé i $a_i \leq a < 1$ protože je každé $a_i < 1$ a je jich konečně mnoho. Počítejme tedy s pomocí již dokázané trojúhelníkové nerovnosti:

$$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| \leq |\lambda_1 a + \lambda_2 a + \cdots + \lambda_n a| = \underbrace{|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n|}_{=1} |a| = |a| < 1$$

$\triangle$

Úloha 1.7. Dokažte Cauchyho-Schwartzovu-Buňakovského (C-S-B) nerovnost.

Dodatková úloha. S pomocí C-S-B nerovnosti ukažte, že

i) $\sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^2}{i} \geq \frac{2}{n(n+1)}$ pro $|\sum_{i=1}^n a_i| = 1$

ii) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{|a_i|} \geq n^2$ pro $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$ a $a_i \neq 0$ pro každé i

Řešení. Připomínáme C-S-B nerovnost $|\sum_{i=1}^n z_i w_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|$. Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i=1}^n |z_i - \alpha w_i|^2 &= \sum_{i=1}^n (z_i - \alpha w_i)(\overline{z_i} - \overline{\alpha w_i}) \\
&= \sum_{i=1}^n (z_i \overline{z_i} + |\alpha|^2 w_i \overline{w_i} - \overline{\alpha} z_i \overline{w_i} - \alpha \overline{z_i} w_i) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n |z_i|^2 & -\sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i \\ \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i} & \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = v^* A v
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že pro libovolné $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{C}^2$ s $v_1 \neq 0$ je

$$v^* A v \geq 0 \tag{1.2}$$

neboť $(v_1, v_2)^T = v_1(1, \frac{v_2}{v_1})^T$, čímž máme předchozí případ s $\alpha := \frac{v_2}{v_1}$, přičemž jej násobíme zleva $\overline{v_1}$ a zprava v_1, tedy celkem $|v_1|^2 \geq 0$. Je-li $v_1 = 0$, platí (1.2) také, neboť v takovém případě máme

$$v^* A v = |v_2|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \geq 0$$

To znamená, že matice A je pozitivně semidefinitní. Tato skutečnost je ekvivalentní s nezáporností prvků na diagonále (zřejmě pravdivé) a determinantu $\det A$, tj.

$$0 \leq \det A = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2 - \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$$

neboli

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} w_i \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} w_i}}_{=\left|\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} w_i\right|^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2$$

což pro $\tilde{z}_i := \overline{z_i}$ dává požadovanou nerovnost

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i w_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\tilde{z}_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |w_i|$$

Nyní vyřešíme dodatkovou úlohu.

i) $1 = |\sum_{i=1}^{n} a_i| = |\sum_{i=1}^{n} a_i|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{i}} \sqrt{i}\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^2}{i} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^2}{i}$

ii) $n^2 = |\sum_{i=1}^{n} 1|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i|} \frac{1}{\sqrt{|a_i|}}\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|a_i|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|a_i|}$

△

Úloha 1.8. Určete optimální (největší a nejmenší možné) konstanty A, B tak, že

$$A(1 + |y|) \leq |1 + \mathrm{i}y| \leq B(1 + |y|)$$

Řešení. Dle trojúhelníkové nerovnosti máme

$$|1 + \mathrm{i}y| \leq 1 + |y|$$

tudíž $B \leq 1$. Nerovnost se však pro $y = 0$ realizuje jako rovnost, takže $B = 1$.

Vzhledem k symetrii stačí v první nerovnosti uvažovat pouze $y \geq 0$. Pak uvažujme funkci

$$f(y) := \frac{|1 + \mathrm{i}y|}{1 + y} = \frac{\sqrt{1 + y^2}}{1 + y}$$

která má globální minimum pro $y = 1$ s hodnotou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, protože

$$f'(y) = \frac{\frac{1}{2}(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y(1 + y) - (1 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 1}{(1 + y)^2} = \frac{y - 1}{(1 + y)^2(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

tedy $f'(y) = 0$ právě tehdy, když $y - 1 = 0$ neboli když $y = 1$ a f má v $y = 1$ stacionární bod. Takže

$$\begin{array}{cccccc} f & & \searrow & & \nearrow & \\ \hline & 0 & & 1 & & \\ f' & & + & & - & \end{array}$$

Tudíž $A \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pro $y = 1$ se ale nerovnost opět realizuje jako rovnost, takže $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Celkem platí

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + |y|) \leq |1 + \mathrm{i}y| \leq (1 + |y|)$$

△

Úloha 1.9. Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $|z| + z = 3 + \mathrm{i}$.

Řešení. Rovnici řešíme obvyklou „substitucí“ $z = x + \mathrm{i}y$, kde $x = \Re(z)$ a $y = \Im(z)$ a porovnáním reálných a imaginárních částí obou stran rovnice. Pak

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + \mathrm{i}y = 3 + \mathrm{i}$$

takže $y = 1$ a řešíme rovnici pro reálnou část

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} + x &= 3 \\ \sqrt{x^2 + 1} &= 3 - x \\ x^2 + 1 &= 9 - 6x + x^2 \\ \cancel{x^2} + 1 &= 9 - 6x + \cancel{x^2} \\ -8 &= -6x \\ x &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

a $z = \frac{4}{3} + \mathrm{i}$. △

Úloha 1.10. Určete řešení kvadratických rovnic v základním tvaru.

Řešení. Nejprve uvažujme rovnici $z^2 = a$, kde $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$. Hledáme tedy $\sqrt{a}$ v algebraickém tvaru. Nechť $z = x + \mathrm{i}y$, pak

$$\begin{aligned} (x + \mathrm{i}y)^2 &= a_1 + \mathrm{i}a_2 \\ x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 &= a_1 + \mathrm{i}a_2 \end{aligned}$$

porovnáním reálných a imaginárních částí získáme dvojici rovnic

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a_1 \\ \quad 2xy = a_2 \end{cases}$$

vyjádřením $y = \frac{a_2}{2x}$ a dosazením do první rovnice získáme

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{a_2^2}{4x^2} &= a_1 \\ x^4 - \frac{a_2^2}{4} &= a_1 x^2 \end{aligned}$$

$$x^4 - a_1 x^2 - \frac{a_2^2}{4} = 0$$

Substitucí $u = x^2$ pokračujeme

$$u^2 - a_1 u - \frac{a_2^2}{4} = 0$$
$$u_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{2}$$

ovšem x musí být reálné, tudíž pouze

$$u = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{2}$$

takže zpětnou substitucí $x = \pm u$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{2}}$$

Poté zpětně dopočítáme $y_{1,2} = \frac{a_2}{\pm 2\sqrt{\frac{a_1+\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{2}}} = \pm\frac{a_2}{\sqrt{2(a_1+\sqrt{a_1^2+a_2^2})}}$. Celkem máme

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{2}} + \mathrm{i}\frac{a_2}{\sqrt{2(a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2})}}\right)$$

Všimněme si ještě, že $z_1 = -z_2$.

Pro rovnice $z^2 + pz + q = 0$, p, $q \in \mathbb{C}$ platí stejný vzorec jako v $\mathbb{R}$, neboť

$$z^2 + pz + q = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

odtud

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

přičemž $\sqrt{p^2 - 4q}$ počítáme jako výše. △

Úloha 1.11. Určete algebraický tvar čísla $z \in \mathbb{C}$ takového, že:

a) $z^2 = -3 - 4\mathrm{i}$

b) $z^2 - 3z + 3 - \mathrm{i} = 0$

c) někdy to může jít i snadněji: $z^2 - (2 + \mathrm{i})z + 3 + \mathrm{i} = 0$

d) $z^2 - 2z + 2 = 0$ (neřešené, výsledek: $z_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$)

Řešení.

a) $z^2 = -3 - 4\mathrm{i}$

Po dosazení $z = x + \mathrm{i}y$ dostáváme

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ \quad 2xy = -4 \end{cases}$$

odtud $y = -\frac{2}{x}$, pak

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{4}{x^2} &= -3 \\ x^4 + 3x^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

substituce $x^2 = u$

$$\begin{aligned} u^2 + 3u - 4 &= 0 \\ u_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 & \text{zvolíme tento výsledek} \\ -\frac{8}{2} = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Poté $x_{1,2} = \pm 1$ a $y = -\frac{2}{\pm 1} = \mp 2$. Takže

$$z_1 = 1 - 2\mathrm{i} \qquad\qquad z_2 = -1 + 2\mathrm{i}$$

b) $z^2 - 3z + 3 - \mathrm{i} = 0$

Dle vzorce platí $z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{-3+4\mathrm{i}}\right)$. Potřebujeme určit hodnotu $\sqrt{-3+4\mathrm{i}}$, tj. řešíme rovnici $w^2 = -3 + 4\mathrm{i}$. Po vyjádření $w = x + \mathrm{i}y$ máme

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ \quad 2xy = 4 \end{cases}$$

následně $y = \frac{2}{x}$, pak dostáváme rovnici pro x

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3$$

tj. stejnou rovnici jako v a). Proto víme, že $x = \pm 1$. Pak $y = \frac{2}{\pm 1} = \pm 2$. Takže $w_{1,2} = \pm(1 + 2\mathrm{i})$. Nakonec

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3 \pm (1 + 2\mathrm{i})\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4 + 2\mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i} \\ \frac{1}{2}(2 - 2\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i} \end{cases}$$

c) $z^2 - (2+\mathrm{i})z + 3 + \mathrm{i} = 0$

Počítáme diskriminant

$$D = (2+\mathrm{i})^2 - 4(3+\mathrm{i}) = 4 + 4\mathrm{i} - 1 - 12 - 4\mathrm{i} = -9$$

a známe hned $\sqrt{D} = \pm 3\mathrm{i}$. Máme (opět podle vzorce)

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(2 + \mathrm{i} \pm 3\mathrm{i}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2+4\mathrm{i}) = 1 + 2\mathrm{i} \\ \frac{1}{2}(2-2\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i} \end{cases}$$

△

1.2 Goniometrický a exponenciální tvar komplexních čísel

Úloha 1.12. Mějme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi}$. Určete z^2, z^3, z^4, $\overline{z}$ a načrtněte body 1, $1+z$, $1+z+z^2$, $1+z+z^2+z^3$, $1+z+z^2+z^3+z^4$ v komplexní rovině.

Řešení. Protože máme číslo z zadáno v exponenciálním tvaru, je jednoduché určit jeho mocniny a k němu komplexně sdružené číslo.

$$z^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{5}\pi} \qquad z^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6}{5}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4}{5}\pi} \qquad z^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8}{5}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi} \qquad \overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi} = z^4$$

Navíc víme, že $z^5 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$. Proto $1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{1-z^5}{1-z} = 0$. Odtud $1+z+z^2+$ $+z^3 = -z^4 = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\left(1-\frac{2}{5}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{5}\pi}$.

Proto $1+z+z^2+z^3 = -z^4$ leží na kružnici se středem v 0, poloměrem $1 = |z^4|$ a svírající s kladnou poloosou $x = \Re(z)$ úhel $\frac{3}{5}\pi = 108°$

Dále víme, že číslo $1+z$ leží na kružnici se středem v 1 a poloměrem $|z| = 1$, přičemž s kladnou poloosou x svírá úhel $\frac{2}{5}\pi = 72°$.

Známe-li polohu čísla $1+z$ v komplexní rovině, můžeme použít stejný postup k určení polohy $1+z+z^2$. Leží na kružnici se středem v bodě $1+z$ a poloměrem $1 = |z^2|$, přičemž s kladnou poloosou x svírá úhel $\frac{4}{5}\pi = 144°$

Všechna čísla si zakreslíme do komplexní roviny na obrázku 1.2. △

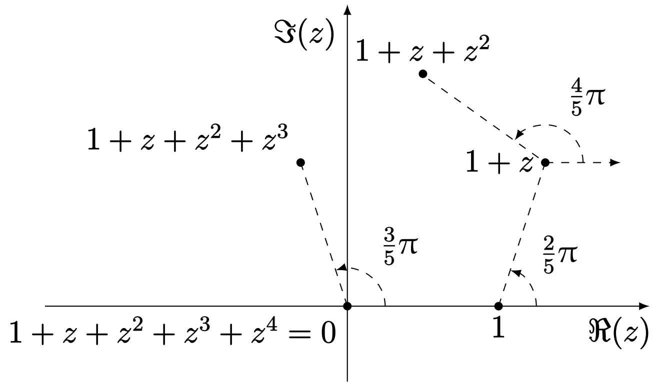
Úloha 1.13. Určete algebraický tvar $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Řešení. Postupujeme přímým výpočtem. Protože $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ a $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, počítáme dále

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

△

Úloha 1.14. Určete velikost a argument (arg i Arg) komplexních čísel:



Obrázek 1.2: Nákres bodů 1, $1+z$, $1+z+z^2$, $1+z+z^2+z^3$, $1+z+z^2+z^3+z^4$ v komplexní rovně.

a) $z = -1 + \mathrm{i}$ b) $z = \mathrm{i}$

Řešení.

a) $z = -1 + \mathrm{i}$

Víme, že $|-1+\mathrm{i}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Následně hledáme $\varphi \in [-\pi, \pi)$ takové, že $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tyto rovnosti splňuje $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Tudíž máme

$$|z| = \sqrt{2} \qquad \arg z = \frac{3\pi}{4} \qquad \operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

a $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{(8k+3)\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{(8k+3)\pi}{4}\right)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

b) $z = \mathrm{i}$

Zřejmě je $|\mathrm{i}| = 1$. Následně hledáme $\varphi \in [-\pi, \pi)$ tak, že $\cos\varphi = 0$ a $\sin\varphi = 1$. To splňuje $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Takže

$$|z| = 1 \qquad \arg z = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \mathbb{R} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

a $z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{(4k+1)\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

$\triangle$

Úloha 1.15. Určete goniometrický tvar následujících komplexních čísel

a) $z = b\mathrm{i}$ pro $b \neq 0$ b) $z = a$ pro $a \neq 0$ c) $z = \pm(2 \pm 5\mathrm{i})$

Řešení.

a) $z = bi$, $b \neq 0$

Rozdělíme si úlohu na dva případy. Je-li $b > 0$, je $|bi| = b$ a $\arg bi = \frac{\pi}{2}$. Naopak pro $b < 0$ je $|bi| = -b$ a $\arg bi = -\frac{\pi}{2}$. Celkem máme

$$bi = \begin{cases} b\left(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}\right) & b > 0 \\ -b\left(\cos -\frac{\pi}{2} + i\sin -\frac{\pi}{2}\right) & b < 0 \end{cases}$$

b) $z = a$, $a \neq 0$

Opět si úlohu rozdělíme na dva případy. Pokud je $a > 0$, je $|a| = a$ a $\arg a = 0$. Pro $a < 0$ je $|a| = -a$ a $\arg a = -\pi$. Dostáváme

$$a = \begin{cases} a\left(\cos 0 + i\sin 0\right) \\ -a\left(\cos -\pi + i\sin -\pi\right) \end{cases}$$

c) $z = \pm(2 \pm 5i)$

Pro každou kombinaci + a − máme $|\pm(2 \pm 5i)| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$. Jednoduše zjistíme, že $\arg(2+5i) = \operatorname{arctg}\frac{5}{2}$. Pro určení zbylých tří hodnot pomocí $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$ si pomůžeme obrázkem 1.3.

Máme tak geometrické tvary čísel

$$\begin{aligned} 2+5i &= \sqrt{29}\left(\cos \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + i\sin \operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right) \\ 2-5i &= \sqrt{29}\left(\cos -\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + i\sin -\operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right) \\ -2-5i &= \sqrt{29}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{2} - \pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{2} - \pi\right)\right) \\ -2+5i &= \sqrt{29}\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

△

Úloha 1.16. Převodem na goniometrický tvar vypočtěte

a) $(1+i)^{10}$

b) $(-2+2i)^6$

c) $\left(\sqrt{3} - i\right)^8$

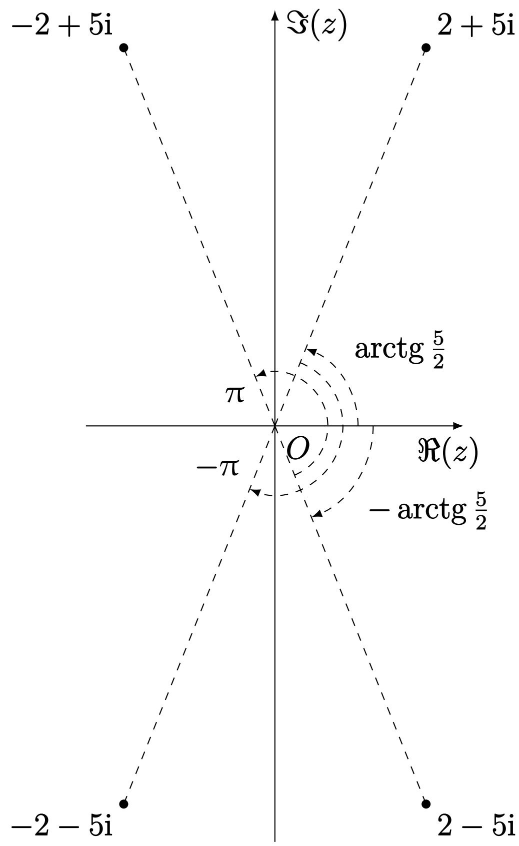
d) $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^5$

e) $\left(\sqrt{3} + i\right)^{10}$

Řešení.

a) $(1+i)^{10} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10} = 2^5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32i$

b) $(-2+2i)^6 = \left[\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^6 = 8^3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 512i$



Obrázek 1.3: Nákres bodů $2+5\mathrm{i}$, $2-5\mathrm{i}$, $-2-5\mathrm{i}$, $-2+5\mathrm{i}$ v komplexní rovině s vyznačenými úhly.

c) $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^8 = \left[2\left(\cos-\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin-\frac{\pi}{6}\right)\right]^8 = 2^8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 256\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -128+$ $+\,128\mathrm{i}\sqrt{3}$

d) $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\right)^5 = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5 = \frac{2^5}{3^2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{32}{9\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) =$ $= -\frac{16}{9}+\mathrm{i}\frac{16\sqrt{3}}{27}$

e) $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{10} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(\cos-\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin-\frac{\pi}{3}\right) = 1024\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512-$ $-\,512\mathrm{i}\sqrt{3}$

$\triangle$

Úloha 1.17. Pomocí geometrického tvaru komplexního čísla nalezněte všechny komplexní hodnoty:

a) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$ b) $\sqrt[4]{-1+\mathrm{i}}$

Řešení.

a) Platí $\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$. Potom

$$\sqrt[3]{\mathrm{i}} = \cos\frac{(1+4k)\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{(1+4k)\pi}{6},\ k \in \{0,1,2\}$$

takže

$$\sqrt[3]{\mathrm{i}} = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2} \\ \cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2} \\ \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i} \end{cases}$$

b) Protože $-1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ je

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-1+\mathrm{i}} &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{(3+8k)\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{(3+8k)\pi}{16}\right),\ k \in \{0,1,2,3\} \\ &= \begin{cases} \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{16}\right) \\ \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{16}\right) \\ \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{16}\right) \\ \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{27\pi}{16}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

$\triangle$

Úloha 1.18. Najděte všechny hodnoty $\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}}$ a vyjádřete je v základním algebraickém tvaru.

Řešení. Protože $-2 + 2\mathrm{i} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, máme

$$\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}} = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right) \end{cases}$$

Zbývá tedy určit základní tvary těchto výrazů. Počítejme postupně

- $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}$.
- Ze součtových vzorců pro sin a cos plynou následující identity

$$\cos(\alpha \pm \pi) = \cos\alpha\underbrace{\cos\pi}_{=-1} \mp \sin\alpha\underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\cos\alpha \tag{1.3}$$

$$\sin(\alpha \pm \pi) = \sin\alpha\underbrace{\cos\pi}_{=-1} \pm \cos\alpha\underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\sin\alpha \tag{1.4}$$

proto $\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12} \overset{(1.3),(1.4)}{=} -\left(\cos -\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{12}\right)$.

Ze stejných vzorců (pro dvojnsobný úhel $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$) plyne

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

takže můžeme dopočítat $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Obdobně dostaneme $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Celkem máme

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\left(-\cos-\frac{\pi}{12} - \mathrm{i}\sin-\frac{\pi}{12}\right) = \\ &= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = \\ &= \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

- Obdobně jako v předchozím bodě máme ze součtových vzorců pro goniometrické funkce následující identity

$$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} \mp \sin\alpha\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = \mp\sin\alpha \tag{1.5}$$

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \pm \sin\alpha\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} = \pm\cos\alpha \tag{1.6}$$

z nichž můžeme určit $\cos\frac{19\pi}{2} = \cos\left(\frac{13\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) \overset{(1.5)}{=} -\sin\frac{13\pi}{12} = -\sin\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) \overset{(1.4)}{=} \sin\frac{\pi}{12}$. Podobně $\sin\frac{19\pi}{12} \overset{(1.6)}{=} \cos\frac{13\pi}{12} \overset{(1.3)}{=} -\cos\frac{\pi}{12}$.

Můžeme vyjádřit výraz v algebraickém tvaru

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right) &= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12} - \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{12}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = \\ &= \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}} = \begin{cases} 1+\mathrm{i} \\ \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$$

△

Úloha 1.19. Najděte všechna řešení rovnice $z^6 = -8$, tj. nalezněte všechny hodnoty $\sqrt[6]{-8}$.

Řešení. Platí $-8 = 8(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$ a současně $-8 = 8(\cos(\pi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi + 2k\pi))$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Tudíž $\sqrt[6]{-8} = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)$, $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$. Přesněji

$$\sqrt[6]{-8} = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

△

1.3 Množiny v komplexní rovině a rozšířený komplexní obor

Úloha 1.20. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = -\mathrm{i}\}$.

Řešení. Takováto množina je prázdná, protože $\Im(z)$ je reálné číslo. △

Úloha 1.21. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 - 5\mathrm{i}| = 3\}$.

Řešení. Jedná se o množinu všech bodů v komplexní rovině, které jsou od $-3+5\mathrm{i}$ vzdáleny o 3, tj. o kružnici se středem v $-3+5\mathrm{i}$ a poloměrem 3. Znázorněna je na obrázku 1.4. Pokud bychom kreslili množiny $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 - 5\mathrm{i}| < 3\}$ respektive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 - 5\mathrm{i}| > 3\}$, vzali bychom vnitřek kruhu (bez hraniční kružnice) respektive jeho vnějšek. △

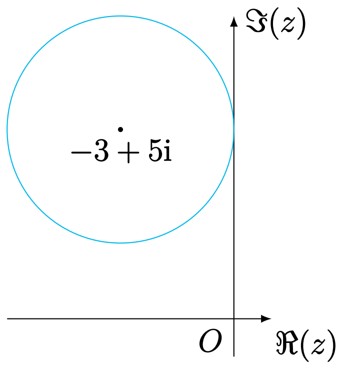
Úloha 1.22. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z + \mathrm{i}| < 3\}$.

Řešení. Jedná se o průnik množin $|z + \mathrm{i}| > 1$ a $|z + \mathrm{i}| < 2$, tj. vnějšku kruhu se středem v bodě $-\mathrm{i}$ a poloměrem 1 a vnitřku kruhu se stejným středem a poloměrem 2 (bez hraničních kružnic). Toto mezikruží je znázorněno na obrázku 1.5. △

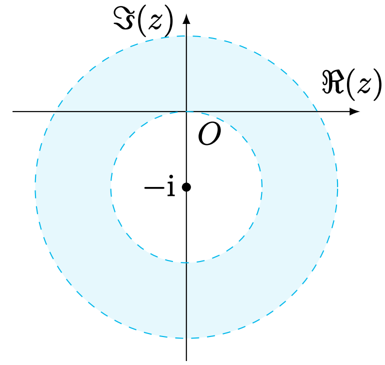
Úloha 1.23. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = \Im(z)\}$.

Řešení. Ztotožníme-li $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ standardním zobrazením $z \mapsto (\Re(z), \Im(z))$, respektive $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$, zjistíme, že se jedná o přímku v $\mathbb{R}^2$ danou rovnicí $x = y$. Její část je znázorněna na obrázku 1.6. △

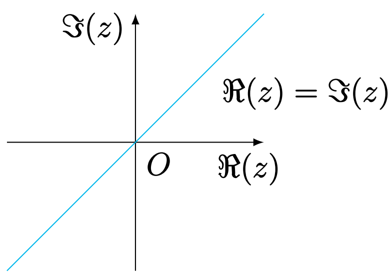
Úloha 1.24. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + z = 0\}$.



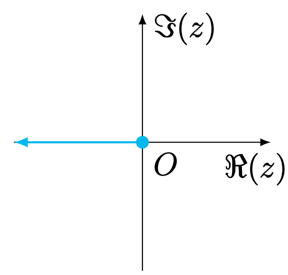
Obrázek 1.4: Kružnice se středem v bodě $-3+5\mathrm{i}$ a poloměrem 3.



Obrázek 1.5: Mezikruží se středem v $-\mathrm{i}$ a poloměry 1 a 2.



Obrázek 1.6: Přímka $\Re(z)=\Im(z)$ v komplexní rovině.



Obrázek 1.7: Nekladná poloosa $\Re(z)$ je množinou z takových, že $|z|=-z$.

Řešení. Uvážíme-li $z=x+\mathrm{i}y$, máme podmínkovou rovnici $\sqrt{x^2+y^2}+x+\mathrm{i}y=0$, odtud $y=0$, poté dostaneme reálnou rovnici $|x|=-x$, kterou splňují právě $x\leq 0$. Jedná se tedy o množinu $\mathbb{R}_0^-$, nekladnou poloosu $\Re(z)$, znázorněnou na obrázku 1.7. △

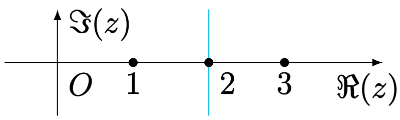
Úloha 1.25. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|=|z-3|\}$.

Řešení. Jedná se o množinu všech bodů v komplexní rovině takových, které mají stejnou vzdálenost od 1 a 3, tj. o osu úsečky $\overline{1,3}$. Touto osou je přímka kolmá na osu $\Re(z)$ protínající ji v bodě 2. Znázorněna je na obrázku 1.8. △

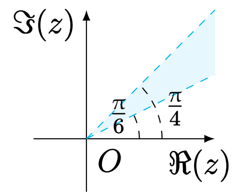
Úloha 1.26. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z\in\mathbb{C} \mid \frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{4}\}$.

Řešení. Jedná se o úhel velikostně menší sevřený polopřímkami $t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ a $s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, t, $s\geq 0$, tj. polopřímkami začínajícími v 0 a svírajícími s kladnou poloosou $\Re(z)$ úhly $\frac{\pi}{6}=30°$ a $\frac{\pi}{4}=45°$. Znázorněn je na obrázku 1.9. △

Úloha 1.27. Načrtněte v komplexní rovině množiny



Obrázek 1.8: Osa úsečky $\overline{1,3}$ v komplexní rovině.



Obrázek 1.9: Úhel mezi polopřímkami svírajícími s kladnou poloosou $\Re(z)$ úhel $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{4}$.

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq C\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < C\}$.

Řešení. V obou případech jde o poloroviny.

a) Zde se jedná o polorovinu v $\mathbb{R}^2$ určenou nerovnicí $x \geq C$.

b) Tady jde naopak o polorovinu určenou nerovností $y < C$.

Obě verze jsou znázorněny na obrázku 1.10. △

(a) $\Re(z) \geq C$ (b) $\Im(z) < C$

Obrázek 1.10: $\Re(z) \geq C$ (1.10a) a $\Im(z) < C$ (1.10b)

Úloha 1.28. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(\mathrm{i}z) \leq 1\}$.

Řešení. Vezměme $z = x + \mathrm{i}y$. Poté $\mathrm{i}z = -y + \mathrm{i}x$. Tudíž $\Re(\mathrm{i}z) = -y$. Poté je hledaná množina v rovině (po ztotožnění s $\mathbb{R}^2$) daná nerovnostmi $0 < -y \leq 1$, neboli $-1 \leq y < 0$. Znázorněna je na obrázku 1.11. △

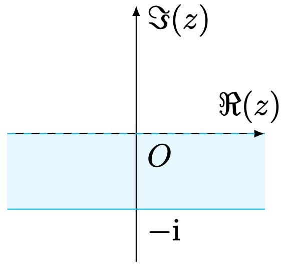
Úloha 1.29. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \Re(z) + 1\}$.

Řešení. Vyjádříme-li si $z = x + \mathrm{i}y$, dostáváme rovnici množiny v $\mathbb{R}^2$

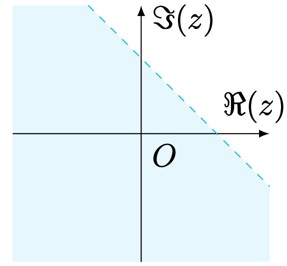
$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$$

kterou dále upravujeme

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$



Obrázek 1.11: Množina $z \in \mathbb{C}$ splňujících nerovnice $0 < \Re(z) \leq 1$



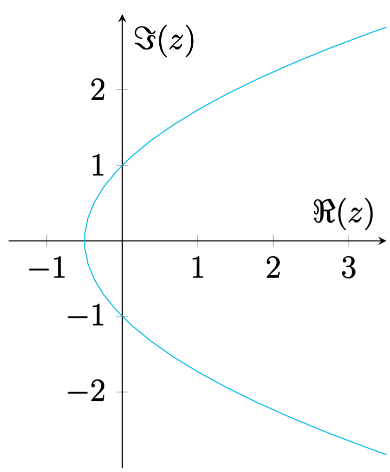
Obrázek 1.12: Polorovina všech bodů takových, že $\Im(z) < 1 - \Re(z)$

$$y^2 = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Jedná se tedy o parabolu, jejíž osa splývá s osou x, má vrchol v bodě $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ a ohnisko v bodě $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0)$. Její graf máme na obrázku 1.13. △

Úloha 1.30. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) + \Im(z) < 1\}$.

Řešení. V $\mathbb{R}^2$ se jedná o polorovinu zadanou nerovnící $x + y < 1$, neboli $y < 1 - x$. Znázorněna je na obrázku 1.12. △



Obrázek 1.13: Nákres paraboly odpovídající rovnici $|z| = \Re(z) + 1$

Úloha 1.31. Načrtněte v komplexní rovině množiny

a) $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \Re\left(\frac{1}{z}\right) = C\right\}$, b) $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \Im\left(\frac{1}{z}\right) = C\right\}$.

Řešení. Pokud $z = x + \mathrm{i}y$, pak $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$.

a) Má-li být $\Re\left(\frac{1}{z}\right) = C$, musí platit rovnice $\frac{x}{x^2+y^2} = C$, neboli $x = C\left(x^2 + x^2\right)$. Pokud $C = 0$, je takovou množinou osa $\Im(z)$ bez počátku. Pokud naopak $C \neq 0$, můžeme dále upravit rovnici až do tvaru

$$\left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4C^2}$$

což je rovnice kružnice se středem v bodě $\left(\frac{1}{2C}, 0\right)$ a poloměrem $\frac{1}{2|C|}$.

b) Obdobně pro $\Im\left(\frac{1}{z}\right) = C$ dostaneme $-\frac{y}{x^2+y^2} = C$, odtud $-y = C\left(x^2 + x^2\right)$. Opět pro $C = 0$ dostaneme osu $\Re(z)$ bez počátku, pro $C \neq 0$ nakonec rovnici

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$$

kružnice se středem v $\left(0, -\frac{1}{2C}\right)$ a poloměrem $\frac{1}{2|C|}$.

Příklady takových množin jsou znázorněny na obrázku 1.14. △

(a) $\Re\left(\frac{1}{z}\right) = C$ (b) $\Im\left(\frac{1}{z}\right) = C$

Obrázek 1.14: Náčrty množin pro různá C. Počátek nepatří do žádné z těchto množin.

Úloha 1.32. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| + |z+2| = 5\}$.

Řešení. Množina je zadaná rovnicí $|z-2| + |z+2| = 5$, tj. jedná se o množinu těch bodů, které mají konstantní (zde roven 5) součet vzdáleností od dvou význačných bodů. Takto je geometricky definována elipsa, množinou tedy bude elipsa. Jejími ohnisky budou $(\pm 2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Najdeme nyní její středovou rovnici pomocí vyjádření $z = x + \mathrm{i}y$

$$|x + \mathrm{i}y - 2| + |x + \mathrm{i}y + 2| = 5$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 5$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 25 - 10\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4y + 4 + y^2$$

$$-8x - 25 = -10\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$64x^2 + 400x + 625 = 100(x^2 + 4x + 4 + y^2)$$

$$\begin{aligned}
36x^2 + 100y^2 &= 225 \\
\frac{x^2}{\frac{225}{36}} + \frac{y^2}{\frac{225}{100}} &= 1 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{15}{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{15}{10}\right)^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

Jak již bylo řečeno, elipsa má ohniska v bodech $(\pm 2, 0)$. Střed má v počátku. Dále má délku hlavní poloosy $\frac{5}{2}$ a vedlejší poloosy $\frac{3}{2}$. Její excentricita je 2. Její graf je na obrázku 1.15. △

Úloha 1.33. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| - |z+2| > 3\}$.

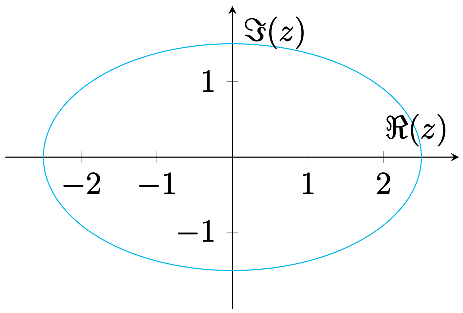
Řešení. Množina má hraniční křivku $|z-2| - |z+2| = 3$, což je hyperbola. Určíme její středovou rovnici pomocí $z = x + \mathrm{i}y$.

$$\begin{aligned}
|x + \mathrm{i}y - 2| - |x + \mathrm{i}y + 2| &= 3 \\
\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} &= 3 \\
x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 9 + 6\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2 \\
-9 - 8x &= 6\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \quad \text{odtud } x \leq -\frac{9}{8} \\
64x^2 + 144x + 81 &= 36\left(x^2 + 4x + 4 + y^2\right) \\
28x^2 - 36y^2 &= 63 \\
\frac{x^2}{\frac{63}{28}} - \frac{y^2}{\frac{63}{36}} &= 1 \\
\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{7}{4}} &= 1 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

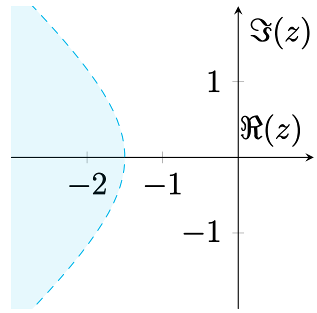
Podmínky $x \leq -\frac{9}{8}$ říká, že „levé“ rameno hyperboly je hranicí hledané množiny, přičemž samo do ní nepatří. Zřejmě bod -2 vyhovuje zadávající nerovnosti. Proto je hledanou množinou část roviny „uvnitř“ ramene hyperboly. Vyznačená je na obrázku 1.16. △

Úloha 1.34. Načrtněte v komplexní rovině množinu $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \arg\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{6}\right\}$.

Řešení. Vezměme $z = x + \mathrm{i}y$. Potom $1 + \frac{1}{z} = \frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$. Úhel $\frac{\pi}{6}$ se nachází v prvním kvadrantu. Proto platí vztah $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{y}{x+x^2+y^2}$ za předpokladu $-y > 0$ tj. $y < 0$ a $x + x^2 +$



Obrázek 1.15: Elipsa mající rovnici $|z-2|+|z+2|=5$.



Obrázek 1.16: Vyznačená množina zadaná nerovnicí $|z-2|-|z+2|>3$.

$+ y^2 > 0$. Kombinací dostáváme rovnost

$$-\frac{y}{x+x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$$

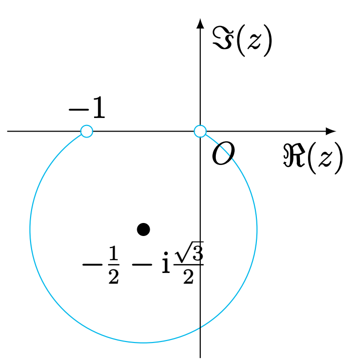
odtud vynásobením

$$x^2+y^2+x+y\sqrt{3}=0$$

kterou upravíme

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$$

Poslední rovnice společně s podmínkou $y<0$ nám říká, že množinu tvoří právě ty body na kružnici se středem $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ a poloměrem 1, které mají y-ovou souřadnici zápornou. Množina je načrtnuta na obrázku 1.17. △



Obrázek 1.17: Náčrt množiny z takových, že $\arg\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Úloha 1.35. Množina $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ komplexních čísel s nekonečnem je v bijekci se sférou v $\mathbb{R}^3$ danou rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

kde bijektivní zobrazení je zadáno předpisem

$$F(z) := \begin{cases} \left(\frac{\Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{\Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right) & z \neq \infty \\ (0,0,1) & z = \infty \end{cases}$$

(stereografická projekce).

Dále na $\tilde{\mathbb{C}}$ zadáváme zobrazení ϱ předpisem

$$\varrho(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 = \infty \\ 0 & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

(metrika stereografické projekce).

a) Ověřte, že ϱ je metrika na $\tilde{\mathbb{C}}$.

b) Dokažte, že $\varrho(z_1, z_2) = \varrho_3(F(z_1), F(z_2))$, kde ϱ_3 je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^3$ (tedy dokažte, že ϱ je zúžením euklidovské metriky na obraz $\tilde{\mathbb{C}}$ ve stereografické projekci).

Řešení. Ověříme, že ϱ je skutečně metrika, tedy že splňuje následující axiomy:

i) $\varrho(z_1, z_2) \geq 0$ a $\varrho(z_1, z_2) = 0$ jedině pro $z_1 = z_2$

ii) $\varrho(z_1, z_2) = \varrho(z_1, z_2)$ (symetrie)

iii) $\varrho(z_1, z_2) + \varrho(z_2, z_3) \geq \varrho(z_1, z_3)$ (trojúhelníková nerovnost)

První dva axiomy jsou zřejmě splněny z definice. Pro ověření třetího axiomu uvážíme několik případů

- $z_1 = z_2 = z_3 = \infty$ zřejmé
- $z_1 = z_1 = \infty$ a $z_3 \in \mathbb{C}$, pak skutečně platí $0 + \frac{1}{\sqrt{1+|z_3|^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+|z_3|^2}}$
- $z_1 \in \mathbb{C}$ a $z_2 = z_3 = \infty$, máme podobně $\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} + 0 \geq \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$
- $z_1 = z_3 = \infty$, $z_2 \in \mathbb{C}$, platí opět $\frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} \geq 0$

- Nakonec uvažme z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$. (dle [4, strana 43], princip od Šizua Kakutaniho)
  Nejprve poznamenejme, že platí

$$\begin{aligned}(a-b)(1+\bar{c}c) &= a + a\bar{c}c - b - b\bar{c}c \\ &= a + a\bar{c}b - c - c\bar{c}b + c + c\bar{c}a - b - b\bar{c}a \\ &= (a-c)(1+\bar{c}b) + (c-b)(1+\bar{c}a)\end{aligned}$$

  z čehož plyne

$$\begin{aligned}|a-b|\left|1+|c|^2\right| &\leq |a-c|\,|1+\bar{c}b| + |c-b|\,|1+\bar{c}a| \leq \\ &\leq |a-c|\sqrt{1+|c|^2}\sqrt{1+|b|^2} + |c-b|\sqrt{1+|c|^2}\sqrt{1+|a|^2}\end{aligned} \tag{1.7}$$

  kde v poslední nerovnosti jsme využili důsledek C-S-B nerovnosti

$$|1+\alpha\beta|^2 \leq \left(1+|\alpha|^2\right)\left(1+|\beta|^2\right)$$

  Volbou $a = z_1$, $b = z_3$ a $c = z_2$ dostaneme z (1.7) nerovnost

$$|z_1 - z_3|\left|1+|z_2|^2\right| \leq |z_1 - z_2|\sqrt{1+|z_2|^2}\sqrt{1+|z_3|^2} + |z_2 - z_3|\sqrt{1+|z_2|^2}\sqrt{1+|z_1|^2}$$

  což po vydělení obou stran kladným výrazem $\left|1+|z_2|^2\right|\sqrt{1+|z_3|^2}\sqrt{1+|z_1|^2}$ dává

$$\frac{|z_1 - z_3|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_3|^2}} \leq \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} + \frac{|z_2 - z_3|}{\sqrt{1+|z_2|^2}\sqrt{1+|z_3|^2}} \tag{1.8}$$

  neboli

$$\varrho(z_1, z_3) \leq \varrho(z_1, z_2) + \varrho(z_2, z_3)$$

- Jelikož

$$\begin{aligned}\lim_{z_2\to\infty} \varrho(z_1, z_2) &= \lim_{z_2\to\infty} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} = \lim_{z_2\to\infty} \frac{|z_2|\left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,|z_2|\sqrt{\frac{1}{|z_2|^2}+1}} = \\ &= \lim_{z_2\to\infty} \frac{\left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{\frac{1}{|z_2|^2}+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} = \varrho(z_1, \infty)\end{aligned}$$

  dostáváme limitním přechodem v (1.8) pro $z_i \to \infty$ požadovanou nerovnost také v případě $z_i = \infty$ a z_j, $z_k \in \mathbb{C}$ pro i, j, $k \in \{1, 2, 3\}$ po dvou různé.

Zobrazení ϱ je skutečně metrika na $\tilde{\mathbb{C}}$.

Nyní dokážeme, že $\varrho(z_1, z_2) = \varrho_3(F(z_1), F(z_2))$. Je-li $z_1 = z_2 = \infty$, tvrzení zřejmě platí. Zbývá ověřit druhé dvě možnosti.

1. Nechť nejprve $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Platí

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= \Re(z_1 - z_2)^2 + \Im(z_1 - z_2)^2 = \\ &= (\Re(z_1) - \Re(z_2))^2 + (\Im(z_1) - \Im(z_2))^2 = \\ &= \Re(z_1)^2 + \Re(z_2)^2 + \Im(z_1)^2 + \Im(z_2)^2 - 2\Re(z_1)\Re(z_2) - 2\Im(z_1)\Im(z_2) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\Re(\overline{z_1} z_2) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Potom počítejme[1]

$$\begin{aligned} &\varrho_3^2(F(z_1), F(z_2)) = \\ &= \left(\frac{\Re(z_1)}{1+|z_1|^2} - \frac{\Re(z_2)}{1+|z_2|^2}\right)^2 + \left(\frac{\Im(z_1)}{1+|z_1|^2} - \frac{\Im(z_2)}{1+|z_2|^2}\right)^2 + \\ &\qquad + \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2 = \\ &= \Re\left(\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right)^2 + \Im\left(\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right)^2 + \\ &\qquad + \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2 = \\ &= \left|\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right|^2 + \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2 \overset{(1.9)}{=} \\ &\overset{(1.9)}{=} \frac{|z_1|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} + \frac{|z_2|^2}{\left(1+|z_2|^2\right)^2} - \frac{2\Re(\overline{z_1} z_2)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} + \\ &\quad + \frac{|z_1|^4}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} + \frac{|z_2|^4}{\left(1+|z_2|^2\right)^2} - \frac{2\,|z_1|^2\,|z_2|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} = \\ &= \frac{|z_1|^2\left(1+|z_1|^2\right)}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} + \frac{|z_2|^2\left(1+|z_2|^2\right)}{\left(1+|z_2|^2\right)^2} - \frac{2\left(\Re(\overline{z_1} z_2) + |z_1|^2\,|z_2|^2\right)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} = \\ &= \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - \frac{2\left(\Re(\overline{z_1} z_2) + |z_1|^2\,|z_2|^2\right)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} = \\ &= \frac{|z_1|^2\left(1+|z_2|^2\right) + |z_2|^2\left(1+|z_1|^2\right) - 2\Re(\overline{z_1} z_2) - 2\,|z_1|^2\,|z_2|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} = \\ &= \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\Re(\overline{z_1} z_2)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} \overset{(1.9)}{=} \frac{|z_1 - z_2|}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} = \varrho^2(z_1, z_2) \end{aligned}$$

[1] Obě metriky mají nezáporné hodnoty. Stačí porovnat jejich druhou mocninu.

2. Nechť $z_1 \neq \infty$ a $z_2 = \infty$. Potom

$$\varrho_3^2(F(z_1), (0,0,1)^T) = \left(\frac{\Re(z_1)}{1+|z_1|^2}\right)^2 + \left(\frac{\Im(z_1)}{1+|z_1|^2}\right)^2 + \left(\frac{|z_1|}{1+|z_1|^2} - 1\right)^2 =$$

$$= \frac{\Re(z_1)^2 + \Re(z_1)^2}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} + \frac{1}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} = \frac{1+|z_1|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} = \frac{1}{1+|z_1|^2} = \varrho^2(z_1, \infty)$$

Důkaz je hotov. △

Kapitola 2

Posloupnosti a řady

Pro a_n, $b_n \in \mathbb{C}$ platí:

prosté srovnávací kritérium Pokud $|a_n| \leq |b_n|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\sum b_n$ konverguje, pak také $\sum a_n$ konverguje. Naopak, pokud $\sum a_n$ diverguje, diverguje také $\sum b_n$.

d'Alambertovo podílové kritérium Nechť $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Pak je-li $L < 1$, $\sum a_n$ absolutně konverguje. a je-li $L > 1$, $\sum a_n$ diverguje.

Cauchyho odmocninové kritérium Nechť $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Pak je-li $L < 1$, $\sum a_n$ absolutně konverguje. a je-li $L > 1$, $\sum a_n$ diverguje.

Úloha 2.1. Rozhodněte o konvergenci řad

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\mathrm{i}(-1)^{n-1}n}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(1+\mathrm{i})^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$

Řešení.

a) Řada konverguje pouze, konvergují-li řady reálných a imaginárních částí. Platí

$$\Re\left(\frac{1+\mathrm{i}(-1)^{n-1}n}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně podle integrálního kritéria. Naopak

$$\Im\left(\frac{1+\mathrm{i}(-1)^{n-1}n}{n^2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje podle Leibnitzova kritéria. Nekonverguje však absolutně, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle integrálního kritéria. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\mathrm{i}(-1)^{n-1}n}{n^2}$ konverguje neabsolutně.

b) Platí $\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně podle integrálního kritéria. Tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^2}$ konverguje absolutně.

c) Ke zjištění konvergence použijeme podílové kritérium. Platí $\left|\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right| = \frac{\sqrt{2}^n}{n!}$. Počítáme

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\sqrt{2}^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$$

takže řada konverguje absolutně.

d) Použijeme odmocninové kritéruim. Platí $\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}\right| = \frac{1}{n2^n}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{n}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

tudíž řada konverguje absolutně.

e) Použijeme podílové kritérium.

$$\left|\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}(1+\mathrm{i})^{n+1}}{\frac{n}{3^n}(1+\mathrm{i})^n}\right| = \left|\frac{1}{3}\frac{n+1}{n}(1+\mathrm{i})\right| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Řada konverguje absolutně.

f) Platí $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\frac{\pi}{n} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{\pi}{n}$. Jenže řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\frac{\pi}{n}$ diverguje. Toto dokážeme pomocí limitního srovnávacího kritéria. Mějme $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Pak platí

- jestliže $L < \infty$ a $\sum b_n$ konverguje, pak $\sum a_n$ konverguje
- jestliže $L > 0$ a $\sum b_n$ diverguje, pak $\sum a_n$ diverguje

Uvažme $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\frac{\pi}{n}$ a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pak

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1 > 0$$

přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle integrálního kritéria. Celkem tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$ diverguje.

$\triangle$

Úloha 2.2. Rozhodněte o konvergenci a určete součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{2^n}$ pro $\varphi \in \mathbb{R}$.

Řešení. Platí $\cos n\varphi = \Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\right) = \Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n$. Máme reálnou část geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ kde $z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2}$. Jelikož $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ a platí stejně jako v $\mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2}} = \frac{2}{2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{2\left(2-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)}{\left(2-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)\left(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)} = \frac{4-2\cos\varphi+2\mathrm{i}\sin\varphi}{5-4\cos\varphi}$$

tudíž

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{2^n} = \Re\left(\frac{4-2\cos\varphi+2\mathrm{i}\sin\varphi}{5-4\cos\varphi}\right) = \frac{4-2\cos\varphi}{5-4\cos\varphi}$$

△

Úloha 2.3. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergují řady:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{n^\alpha}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}}{n^\alpha}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n)}{n!}\mathrm{i}^n$

Řešení.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{n^\alpha}$

Použijeme Dirichletovo kritérium: Nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní nezáporná posloupnost. Je-li posloupnost částečných součtů $\sum a_n$ ohraničená a $b_n \to 0$, řada $\sum a_n b_n$ konverguje. Zde máme posloupnosti $a_n := \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}$ a $b_n := \frac{1}{n^\alpha}$. Posloupnost částečných součtů a_n je ohraničená, neboť

$$\left|\sum_{n=0}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1}\right| \leq \frac{2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1|} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos 1}}$$

a $b_n = \frac{1}{n^\alpha} \to 0$ pro $\alpha > 0$. Pro $\alpha < 0$ je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} n^{-\alpha} = \infty$ (každý člen leží na kružnici se středem v 0 a zvětšujícím se poloměrem) a pro $\alpha = 0$ neexistuje $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}$.

Neboť $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$, můžeme užitím integrálního kritéria ukázat, že řada konverguje absolutně pro $\alpha > 1$. Celkem tedy řada konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, konverguje neabsolutně pro $\alpha \in (0, 1]$ a diverguje pro $\alpha \leq 0$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}}{n^\alpha}$

Pro $\alpha < 0$ je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}} n^{-\alpha} = \infty$, takže součet diverguje. Pro $\alpha = 0$ je limita rovna 1, suma také diverguje. Pro $\alpha \in (0, 1]$ je $\Re(a_n) = \frac{1}{n^\alpha}\cos\frac{\pi}{n} \geq \frac{1}{2n^\alpha}$ pro $n \geq 3$ a řada diverguje podle prostého srovanávacího a integrálního kritéria. Pro $\alpha > 1$ je $|a_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, tudíž řada konverguje (absolutně) opět podle integrálního kritéria.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n)}{n!}\mathrm{i}^n$

Je-li $\alpha \geq 0$, je $\left|\frac{(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n)}{n!}\mathrm{i}^n\right| = \frac{|\alpha+1|\cdot\dots\cdot|\alpha+n|}{n!} \geq 1$. Na okolí nuly s poloměrem $\frac{1}{2}$ se nenacházejí žádné členy posloupnosti. Proto nula není hromadným bodem (a tedy ani limitou) posloupnosti $\frac{(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n)}{n!}\mathrm{i}^n$ a řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Nechť tedy je $\alpha < 0$. Máme $\left|\prod_{k=1}^n \frac{\alpha+k}{k}\mathrm{i}^n\right| = \frac{|\alpha+1|\cdot\dots\cdot|\alpha+n|}{n!}$. Ke zjištění konvergence použijeme Raabeho kritérium: Nechť $a_n > 0$ a nechť existuje limita $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Je-li $L > 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, pro $L < 1$ řada diverguje a pro $L = 1$ nelze rozhodnout.

V našem případě máme $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\alpha+n+1}{n+1}$,[1] takže

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\alpha+n+1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1-\alpha-n-1)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n\alpha}{n+1} = -\alpha$$

přičemž $-\alpha > 1$ pro $\alpha < -1$, pro něž řada konverguje absolutně. Číslo $\alpha = -1$ je kořenem každého z $\prod_{k=1}^n \frac{\alpha+k}{k}$, máme tedy pro $\alpha = -1$ (absolutně konvergentní) nulovou řadu. Řada konverguje absolutně pro $\alpha \le -1$. Navíc víme, že pro $\alpha \in (-1, 0)$ může řada konvergovat jedině neabsolutně.

Pro $\alpha \in (-1, 0)$ použijeme Dirichletovo kritérium. V našem případě máme posloupnosti $a_n := \mathrm{i}^n$ a $b_n := \prod_{k=1}^n \frac{\alpha+k}{k}$. Hodnota $\sum_{n=1}^k \mathrm{i}^n \in \{\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}, -1, 0\}$, takže je posloupnost částečných součtů a_n ohraničená hodnotou $\sqrt{2}$.

Posloupnost b_n lze zadat rekurentně tak, že $b_1 = \frac{\alpha+1}{1}$ a $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{\alpha+n+1}{n+1}$. Protože $\alpha \in (-1, 0)$, je $0 < b_n \le b_{n+1}$ a $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\alpha+n}{n} \in (0, 1)$. Potřebujeme ukázat, že $b_n \to 0$ pro $n \to \infty$, k čemuž využijeme následujícího tvrzení.

Tvrzení. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je neklesající posloupnost s $a_n \in (0, 1)$. Potom $\prod_{n=1}^\infty a_n > 0$ právě tehdy, když $\sum_{n=1}^\infty (1 - a_n) < +\infty$.*

Důkaz. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = L < 1$. Potom $\prod_{n=1}^\infty a_n = 0$ a $\sum_{n=1}^\infty (1 - a_n) \ge \sum_{n=1}^\infty (1 - L) = +\infty$.

Nechť naopak $a_n \to 1$. Pak $\prod_{n=1}^\infty a_n = 0$ tehdy a jen tehdy, když $\ln \prod_{n=1}^\infty a_n = -\infty$, což je ekvivalentní podmínce $\sum_{n=1}^\infty \ln a_n = -\infty$.

Protože $a_n \to 1$, jsou až na konečně mnoho členů všechna a_n větší než $\frac{1}{2}$. Pro ně je zlomek $\frac{\ln a_n}{a_n - 1}$ ohraničený, takže $\sum_{n=1}^\infty \ln a_n = -\infty$ právě tehdy, když $\sum_{n=1}^\infty (a_n - 1) = -\infty$ (limitní srovnávací kritérium), neboli $\sum_{n=1}^\infty (1 - a_n) = +\infty$. (dle `https://qr.ae/pvgk06`) □

V našem případě máme $\frac{\alpha+n}{n} \in (0, 1)$ a $\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{\alpha+n}{n}\right) = \sum_{n=1}^\infty -\frac{\alpha}{n} = +\infty$, takže $\prod_{n=1}^\infty \frac{\alpha+n}{n} = 0$ pro každé $\alpha \in (-1, 0)$.

Celkem řada konverguje absolutně pro $\alpha \le -1$, konverguje neabsolutně pro $\alpha \in (-1, 0)$ a diverguje pro $\alpha \ge 0$.

△

[1] Členy posloupnosti jsou od jistého indexu násobeny vždy kladným číslem. Počítáme-li limitu, stačí uvažovat jen je.

Kapitola 3

Základy kalkulu v $\mathbb{C}$

Komplexní funkce komplexní proměnné odpovídají zobrazením $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ můžeme přiřadit u, $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že

$$f(z) = u(\Re(z), \Im(z)) + \mathrm{i}v(\Re(z), \Im(z))$$

Je vidět, že $u = \Re(f)$ a $v = \Im(f)$.

Obráceně, dvojice funkcí u, $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadává komplexní funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$f(x + \mathrm{i}y) := u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

a vzájemná korespondence je jednoznačná.

Připomeneme si definici limity funkce $f\colon D \to \mathbb{C}$, kde $D \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, má v $z_0 \in D$ limitu $L \in \mathbb{C}$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(|z - z_0| < \delta \wedge z \neq z_0 \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon) \tag{3.1}$$

pak píšeme $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$.

Máme i definici pomocí okolí $\mathscr{O}$. Okolí $\mathscr{O}_\varepsilon(z_0)$ konečného $z_0 \in \mathbb{C}$ definujeme jako množinu $\mathscr{O}_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$. Okolí $\mathscr{O}_\varepsilon(\infty)$ pak definujeme jako $\mathscr{O}_\varepsilon(\infty) := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$. Ještě připomeneme, že $\mathscr{O}_\varepsilon(z_0)$ je vnitřek kruhu se středem z_0 a poloměrem ε, který označujeme $K(z_0, \varepsilon)$. Dále ryzí okolí bodu definujeme $\mathscr{O}^*_\varepsilon(z_0) := \mathscr{O}_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Podmínku (3.1) lze pak psát jako

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(z \in \mathscr{O}_\delta(z_0) \cap D \Rightarrow f(z) \in \mathscr{O}^*_\varepsilon(L)) \tag{3.2}$$

kde již uvažujeme $D \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$ a $L \in \tilde{\mathbb{C}}$ (tedy může být i $z_0 = \infty$).

3.1 Spojitost, limita a definiční obor komplexní funkce

Úloha 3.1. Ukažte, že neexistuje $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$.

Řešení. Počítejme limitu po dvou cestách. Nejprve po reálné ose

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} 1 = 1$$

a následně po imaginární ose

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{\mathrm{i}y}}{\mathrm{i}y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\mathbb{R}}} \frac{-\mathrm{i}y}{\mathrm{i}y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\mathbb{R}}} -1 = -1$$

přičemž hodnoty jsou očividně různé. Hodnota limity závisí na cestě, po které se k 0 blížíme, limita proto neexistuje. △

Úloha 3.2. Uvažujeme $z = x + \mathrm{i}y$. Pouze s pomocí definice dokažte

a) $\lim_{z\to z_0}(az + b) = az_0 + b$,

b) $\lim_{z\to 1-\mathrm{i}} (x + \mathrm{i}(2x + y)) = 1 + \mathrm{i}$,

c) $\lim_{z\to 2} (z^2 + \mathrm{i}z) = 4 + 2\mathrm{i}$,

d) $\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{1}{z} = -\mathrm{i}$.

Řešení. K řešení této úlohy vždy uvážíme $\varepsilon > 0$ a najdeme nějaké $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že platí (3.1).

a) Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $|z - z_0| < \delta$. Pak

- Je-li $a = 0$, je $|b - b| = 0 < \varepsilon$ a při libovolné hodnotě $\delta > 0$ platí (3.1).
- Je-li $a \neq 0$, je $|(az + b) - (az_0 + b)| = |a(z - z_0)| \leq |a|\,|z - z_0| < |a|\,\delta$ a zvolíme-li tedy $\delta := \frac{\varepsilon}{|a|}$, platí (3.1)

b) Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Položme $z = x + \mathrm{i}y$ a $|z - (1 - \mathrm{i})| < \delta$. Pak $|x - 1| < \delta$ a $|y + 1| < \delta$ a

$$\begin{aligned}
&|(x + \mathrm{i}(2x + y)) - (1 + \mathrm{i})| = \\
&\qquad = |(x - 1) + \mathrm{i}(2x + y - 1)| \leq |x - 1| + |2x + y - 1| = \\
&\qquad = |x - 1| + |2x - 2 + y + 1| \leq |x - 1| + 2\,|x - 1| + |y + 1| < \\
&\qquad\qquad < \delta + 2\delta + \delta = 4\delta
\end{aligned}$$

Zvolíme-li tedy $\delta := \frac{\varepsilon}{4}$, platí (3.1).

c) Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $|z - 2| < \delta$. Pak

$$\begin{aligned}
&\left|z^2 + \mathrm{i}z - (4 + 2\mathrm{i})\right| = \left|z^2 - 4 + \mathrm{i}(z - 2)\right| \leq \\
&\qquad \leq \left|z^2 - 4\right| + |z - 2| = |z + 2|\,|z - 2| + |z - 2| = \\
&\qquad = |z - 2 + 4|\,|z - 2| + |z - 2| \leq (|z - 2| + 4)\,|z - 2| + |z - 2| < \\
&\qquad\qquad < (\delta + 4)\delta + \delta = \delta(\delta + 5)
\end{aligned}$$

Pokud je $\delta \leq 1$, je $\delta(\delta + 5) \leq 6\delta$. Zvolíme-li $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$, platí (3.1).

d) Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $|z - (-\mathrm{i})| = |z + \mathrm{i}| < \delta$. Pak

$$\left|\frac{1}{z} - \mathrm{i}\right| = \left|\frac{1 - \mathrm{i}z}{z}\right| = \frac{|-\mathrm{i}(z + \mathrm{i})|}{|z|} = \frac{|z + \mathrm{i}|}{|z|} < \frac{\delta}{|z|}$$

Jelikož $|z + \mathrm{i}| < \delta$, tak je-li $\delta < \frac{1}{2}$, je $|z| > \frac{1}{2}$, a tedy $\frac{1}{|z|} < 2$. Takže

$$\left|\frac{1}{z} - \mathrm{i}\right| < \frac{\delta}{|z|} < 2\delta$$

Zvolíme-li $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, platí (3.1).

△

Úloha 3.3. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0} \frac{\Re(z)}{z}$.

Řešení. Uvažme $z = x + \mathrm{i}y$. Pak $\frac{\Re(z)}{z} = \frac{x}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x^2 - \mathrm{i}xy}{x^2+y^2}$. Předpokládejme, že hledaná limita existuje. Potom

$$\lim_{z\to 0} \frac{\Re(z)}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \mathrm{i} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

a existují obě dvojné limity na pravé straně. Počítáme-li však reálnou limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \overset{y=kx}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1}{1 + k^2}$$

což závisí na k. Proto limita neexistuje. △

Funkce $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast, má v (x_0, y_0) limitu L, jestliže existuje nezáporná finkce $g\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ splňující $\lim_{\varrho\to 0^+} g(\varrho) = 0$ a

$$|f(x_0 + \varrho\cos\varphi, y_0 + \varrho\sin\varphi) - L| < g(\varrho)$$

pro každé $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $\varrho > 0$ dostatečně malá.

Zejména je-li po transformaci do polárních souřadnic $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{\varrho\to 0^+} h(\varrho)g(\varphi)$, $\lim_{\varrho\to 0^+} h(\varrho) = 0$ a $g(\varphi)$ je ohraničená pro $\varphi \in [0, 2\pi)$, je $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0$.

Úloha 3.4. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$.

Řešení. Vezměme $z = x + \mathrm{i}y$. Pak $\frac{z}{|z|} = \frac{x+\mathrm{i}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Máme $u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $v(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \overset{\substack{x=\varrho\cos\varphi\\ y=\varrho\sin\varphi}}{=} \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho\cos\varphi}{\varrho} = \cos\varphi$$

tudíž $\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$ neexistuje. △

Úloha 3.5. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0} \frac{\Re(z^2)}{z}$.

Řešení. Uvažme $z = x + \mathrm{i}y$. Platí $\frac{\Re(z^2)}{z} = \frac{\Re(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x^2-y^2}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x^3-xy^2+\mathrm{i}(-x^2y+y^3)}{x^2+y^2}$. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} &\overset{\substack{x=\varrho\cos\varphi\\ y=\varrho\sin\varphi}}{=} \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho^3(\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin 2\varphi)}{\varrho^2} = \\
&= \lim_{\varrho\to 0^+} \varrho(\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin 2\varphi) = 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y + y^3}{x^2+y^2} &\overset{\substack{x=\varrho\cos\varphi\\ y=\varrho\sin\varphi}}{=} \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho^3(-\cos 2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi)}{\varrho^2} = \\
&= \lim_{\varrho\to 0^+} \varrho(-\cos 2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi) = 0
\end{aligned}$$

Proto $\lim_{z\to 0} \frac{\Re(z^2)}{z} = 0$.

Úlohu lze řešit i elegantněji. Protože $\frac{|\Re(z^2)|}{|z|} \leq \frac{|z|^2}{|z|}$, je

$$0 \leq \lim_{z\to 0} \frac{|\Re(z^2)|}{|z|} \leq \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{|z|} = \lim_{z\to 0} |z| = 0$$

a $\lim_{z\to 0} \frac{\Re(z^2)}{z} = 0$. △

Úloha 3.6. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\Im(z^2)}{z}}$.

Řešení. Protože e^z je spojité zobrazení, platí $\lim_{z\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\Im(z^2)}{z}} = \mathrm{e}^{\lim_{z\to 0} \frac{\Im(z^2)}{z}}$. Určíme podobně jako v úloze 3.5 hodnotu $\lim_{z\to 0} \frac{\Im(z^2)}{z}$. Nechť $z = x + \mathrm{i}y$. Pak $\frac{\Im(z^2)}{z} = \frac{\Im(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)}{x+\mathrm{i}y} = 2\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 2\mathrm{i}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Pak

$$\begin{aligned}
2 \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} &= 2 \lim_{\varrho\to 0^+} \varrho\cos^2\varphi\sin\varphi = 0 \\
-2 \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} &= 2 \lim_{\varrho\to 0^+} \varrho\cos\varphi\sin^2\varphi = 0
\end{aligned}$$

a $\lim_{z\to 0} \frac{\Im(z^2)}{z} = 0$ (nebo bychom mohli použít stejně jako v úloze 3.5 trik s absolutní hodnotou). V každém případě $\lim_{z\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\Im(z^2)}{z}} = \mathrm{e}^0 = 1$. △

Úloha 3.7. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0} \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}\right)$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z}} \overset{z=x+\mathrm{i}y}{=} \\
&\overset{z=x+\mathrm{i}y}{=} \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy - (x^2 - y^2 - 2\mathrm{i}xy)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{4\mathrm{i}xy}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=\varrho\cos\varphi\\ y=\varrho\sin\varphi}}{=}
\end{aligned}$$

$$\overset{\substack{x=\varrho\cos\varphi\\ y=\varrho\sin\varphi}}{=} \frac{2\varrho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi} = \sin 2\varphi$$

proto

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right) \overset{z=x+\mathrm{i}y}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=\varrho\cos\varphi\\ y=\varrho\sin\varphi}}{=} \lim_{\varrho\to 0^+}\sin 2\varphi = \sin 2\varphi$$

tudíž limita neexistuje. △

Úloha 3.8. (neřešené) Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{\Re(z)}$, kde

a) $z_0 = 0$ (výsledek: limita neexistuje), b) $z_0 = \infty$ (výsledek ∞).

Úloha 3.9. Spočítejte limity

a) $\lim_{z\to\infty}\frac{4z^2}{(z-1)^2}$, b) $\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^3}$.

Řešení.

a) $\lim_{z\to\infty}\frac{4z^2}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{4}{z^2}}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{4}{(1-z)^2} = 4$

b) $\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^3} = \infty$ protože $\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^3}{1} = 0$

△

Úloha 3.10. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to\infty} z\Re(z)$.

Řešení. Intuitivní přístup by říkal, že protože $\lim_{z\to\infty} z = \infty$ a $\Re(\infty) = \infty$, mělo by být $\lim_{z\to\infty}\Re(z) = \infty$ a $\lim_{z\to\infty} z\Re(z) = \infty\cdot\infty = \infty$. Jenže není pravda, že $\lim_{z\to\infty}\Re(z) = \infty$. Ukážeme, že $\lim_{z\to\infty}\Re(z)$ neexistuje.

i) Připusťme, že $\lim_{z\to\infty}\Re(z) = \infty$. Poté podle (3.2) pro každé $\mathscr{O}_\varepsilon(\infty)$ existuje $\mathscr{O}^*_\delta(\infty)$ tak, že pro každé $z \in \mathscr{O}^*_\delta(\infty)$ je $\Re(z) \in \mathscr{O}_\varepsilon(\infty)$. Vezmeme-li však $y \in \mathbb{R}$ takové, že $|y| > \frac{1}{\varepsilon}$, je $\mathrm{i}y \in \mathscr{O}^*_\delta(\infty)$, ale $\Re(\mathrm{i}y) = 0 \notin \mathscr{O}_\varepsilon(\infty)$.

ii) Předchozí úvaha nám pomůže dokázat úplnou neexistenci limity. Vezměme x, $y \in \mathbb{R}$ a počítejme

$$\lim_{x\to\infty}\Re(x) = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$
$$\lim_{y\to\infty}\Re(\mathrm{i}y) = \lim_{y\to\infty} 0 = 0$$

tudíž $\lim_{z\to\infty}\Re(z)$ neexistuje.

Dokážeme, že neexistuje ani $\lim_{z\to\infty} z\Re(z)$. Pokud by existovala, byla by rovna $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\Re\left(\frac{1}{z}\right)$. Počítejme tedy

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\Re\left(\frac{1}{z}\right) \overset{z=x+\mathrm{i}y}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x+\mathrm{i}y}\frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-\mathrm{i}xy}{(x^2+y^2)^2}$$

následně

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = \begin{cases} \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \\ \lim_{\substack{x=ky\\ y\to 0\\ k\neq 0}} \frac{k^2y^2}{(k^2y^2+y^2)^2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ k\neq 0}} \frac{k^2}{y^2(k^2+1)^2} = \infty \end{cases}$$

a podobně

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} = \begin{cases} \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \\ \lim_{\substack{x=ky\\ y\to 0\\ k\neq 0}} \frac{ky^2}{(k^2y^2+y^2)^2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ k\neq 0}} \frac{k}{y^2(k^2+1)^2} = \infty \end{cases}$$

tudíž limita $\lim_{z\to\infty} z\Re(z)$ neexistuje. △

Úloha 3.11. Dodefinujte funkci

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\ f\colon z\mapsto \frac{z\Re(z)}{|z|}$$

v 0 (tj. určete $f(0)$) tak, aby byla spojitá v bodě $z=0$.

Řešení. Má-li být f spojitá v 0, musí být $\lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$. Definujeme tedy $f(0) :=$ $= \lim_{z\to 0} f(z)$. Spočítáme její hodnotu. Platí

$$\frac{z\Re(z)}{|z|} \overset{z=x+\mathrm{i}y}{=} \frac{x^2+\mathrm{i}xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\substack{x=\varrho\cos\varphi\\ y=\varrho\sin\varphi}}{=} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi+\mathrm{i}\varrho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi}} =$$
$$= \sqrt{\varrho^2}(\cos^2\varphi+\mathrm{i}\cos\varphi\sin\varphi) \overset{\varrho\geq 0}{=} \varrho(\cos^2\varphi+\mathrm{i}\cos\varphi\sin\varphi)$$

tudíž

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\Re(z)}{|z|} \overset{z=\varrho e^{\mathrm{i}\varphi}}{=} \lim_{\varrho\to 0^+} \varrho(\cos^2\varphi+\mathrm{i}\cos\varphi\sin\varphi) = 0$$

a dodefinujeme $f(0) := 0$. △

Úloha 3.12. Určete definiční obory následujících funkcí (chápaných jako $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$).

a) $f(z) = \frac{3z+2\mathrm{i}}{z^2+4}$

b) $f(z) = \frac{2\mathrm{i}z^2+5}{(z+\mathrm{i})^2(z-1)}$

c) $f(z) = \frac{z^2\Im(z)}{|z|-2\Re(z)}$

d) $f(z) = \frac{3|z|\Re(z)}{5\Re(z)-2\Im(z)}$

Řešení.

a) $f(z) = \frac{3z+2\mathrm{i}}{z^2+4}$ zde $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 2\}$

b) $f(z) = \frac{2\mathrm{i}z^2+5}{(z+\mathrm{i})^2(z-1)}$ zde $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{1, -\mathrm{i}\}$

c) $f(z) = \frac{z^2\Im(z)}{|z|-2\Re(z)}$
Musí platit

$$\begin{aligned} |z| - 2\Re(z) &\neq 0 \\ |z| &\neq 2\Re(z) \\ |z|^2 &\neq 2\Re(z)^2 \\ \Re(z)^2 + \Im(z)^2 &\neq 4\Re(z)^2 \\ \Im(z)^2 &\neq 3\Re(z)^2 \\ \Im(z) &\neq \pm\sqrt{3}\Re(z) \end{aligned}$$

tedy $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = \pm\sqrt{3}\Re(z)\}$.

d) $f(z) = \frac{3|z|\Re(z)}{5\Re(z)-2\Im(z)}$
Musí platit

$$\begin{aligned} 5\Re(z) - 2\Im(z) &\neq 0 \\ 5\Re(z) &\neq 2\Im(z) \end{aligned}$$

takže $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid 2\Im(z) = 5\Re(z)\}$

△

Úloha 3.13. Uvažme následující funkce $f\colon \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$. Určete, kde jsou spojité.

a) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$

b) $f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z^2-\mathrm{i}}$

c) $f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^z-1}$

Řešení.

a) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$
Funkce je spojitá všude na $\mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$. Počítejme limitu v $\pm\mathrm{i}$

$$\lim_{z\to\pm\mathrm{i}} \frac{z}{1+z^2} = \infty = \frac{\pm\mathrm{i}}{0} = f(\pm\mathrm{i})$$

takže je spojitá i v $\pm$i. Spojitost $f(z)$ v nekonečnu odpovídá spojitosti $f\left(\frac{1}{z}\right)$ v 0. Funkce

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z^2}} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z^2+1} = 0 = \frac{0}{0^2+1}$$

je spojitá v 0, tudíž celkem je f spojitá na $\tilde{\mathbb{C}}$.

b) $f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z^2-\mathrm{i}}$

Funkce je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \left\{\pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right\}$. Počítejme limitu

$$\lim_{z\to \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} \frac{z+\mathrm{i}}{z^2-\mathrm{i}} = \infty = \frac{\mathrm{i} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{0} = f\left(\pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)$$

takže je f spojitá i v $\pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Pro spojitost f v nekonečnu počítejme

$$\lim z \to 0 \frac{\frac{1}{z}+\mathrm{i}}{\frac{1}{z^2}-\mathrm{i}} = \lim_{z\to 0} \frac{z+\mathrm{i}z^2}{1-\mathrm{i}z^2} = 0 = \frac{0+\mathrm{i}0^2}{1-\mathrm{i}0^2}$$

tudíž je f spojitá na $\tilde{\mathbb{C}}$.

c) $f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^z-1}$

Funkce je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Počítejme limitu

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^z-1} = \infty = f(0)$$

tudíž je f spojitá na $\mathbb{C}$. Hodnota $\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}-1}$ není definovaná, proto f není spojitá v ∞. Celkem je f spojitá na $\mathbb{C}$.

$\triangle$

Úloha 3.14. Dokažte, že funkce arg je spojitá všude s výjimkou záporné reálné osy (a 0, kde není definovaná), tj. na $\mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}^-$.

Řešení. Připomeňme, že (viz (1.1))

$$\arg z = \arg(x+\mathrm{i}y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & x < 0, y > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & x < 0, y \le 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Jelikož je $\arg z \in \mathbb{R}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ (tj. $\Re(\arg z) = \arg z$ a $\Im(\arg z) = 0$), je spojitost $\arg z$ ekvivalentní se spojitostí v reálném oboru. Je zřejmé, že $\arg z$ je spojitá uvnitř jednotlivých kvadrantů (díky spojitosti $\operatorname{arctg} w$), jakož také na kladné poloose x ($\mathbb{R}^+$). Pro $x = 0$ a $y > 0$ máme hodnotu $\frac{\pi}{2}$ a limitním přechodem dostáváme totéž, neboť

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y>0 \text{ lib.}}} \arg(x+\mathrm{i}y) = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y>0 \text{ lib.}}} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{y}{x}}_{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y>0 \text{ lib.}}} \arg(x+\mathrm{i}y) = \lim_{\substack{x\to 0^-\\ y>0 \text{ lib.}}} \left(\operatorname{arctg} \underbrace{\frac{y}{x}}_{-\infty} + \pi\right) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

přičemž y se může měnit – nechceme se blížit jen po rovnoběžkách s osou $\Re(z)$. Podobně pro $x = 0$ a $y < 0$ máme hodnotu $-\frac{\pi}{2}$ a

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y<0 \text{ lib.}}} \arg(x+\mathrm{i}y) = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y<0 \text{ lib.}}} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{y}{x}}_{-\infty} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y<0 \text{ lib.}}} \arg(x+\mathrm{i}y) = \lim_{\substack{x\to 0^-\\ y<0 \text{ lib.}}} \left(\operatorname{arctg} \underbrace{\frac{y}{x}}_{+\infty} - \pi\right) = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

Na záporné reálné ose máme hodnotu $-\pi$ (z předpisu pro $x < 0$ a $y \le 0$, totéž co limitní hodnota pro $x < 0$ libovolné a $y \to 0^-$), zatímco

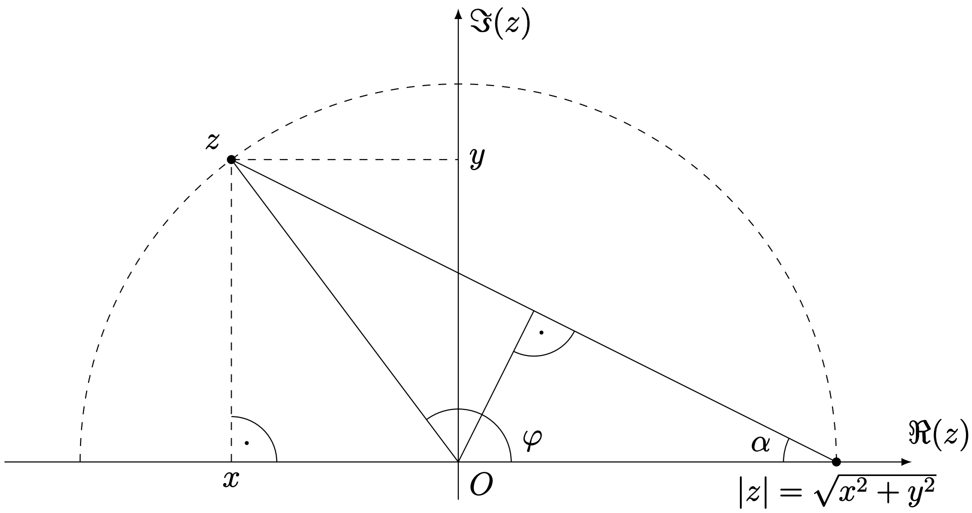
$$\lim_{\substack{y\to 0^+\\ x<0 \text{ lib.}}} \arg(x+\mathrm{i}y) = \lim_{\substack{y\to 0^+\\ x<0 \text{ lib.}}} \left(\operatorname{arctg} \underbrace{\frac{y}{x}}_{0} + \pi\right) = \pi$$

tedy má arg na záporné části reálné osy neodstranitelnou nespojitost prvního druhu se skokem délky 2π, což dokazuje spojitost arg na $\mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}^-$. △

Poznámka. i) Stejného výsledku dosáhneme i s pomocí alternativního vyjádření (1.1), tj.

$$\arg z = \arg(x+\mathrm{i}y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & x \le 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & x \le 0, y < 0 \\ -\pi & x < 0, y = 0 \end{cases}$$

Nicméně v obou případech jsme museli dopočítat $\arg z$ podle jednotlivých kvadrantů v $\mathbb{C}$. To je způsobeno tím, že $\arg z \in [-\pi, \pi)$, zatímco $\operatorname{arctg} w$ nabývá pouze hodnot mezi $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Tuto nevýhodu lze obejít pomocí polovičního argumentu. Pro $y \neq 0$ máme situaci na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Oba trojúhelníky jsou podobné podle pravidla „SSS“. Oba jsou tudíž pravoúhlé a úhel φ je rozpůlen. Úhel α je také nahoře.

Pak z pravoúhlého trojúhelníku s vrcholy (x, y), $(x, 0)$ a $(|z|, 0)$ plyne $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{|z|-x}{y}$, tj. $\alpha = \operatorname{arccotg}\frac{|z|-x}{y}$. Jelikož $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, máme

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg}\frac{|z|-x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$$

neboť platí $\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arccotg}\alpha = \frac{\pi}{2}$, protože $\operatorname{arctg}'\alpha + \operatorname{arccotg}'\alpha = \frac{1}{1+\alpha^2} - \frac{1}{1+\alpha^2} = 0$ a $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Tedy celkem

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0, x > 0 \\ -\pi & y = 0, x < 0 \end{cases}$$

Je-li $x > 0$ a $y \to 0$, pak

$$\lim_{\substack{y\to 0^+\\ x>0}} 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \overset{\operatorname{arctg}\in\mathcal{C}}{=} \operatorname{arctg}\left(\lim_{\substack{y\to 0^+\\ x>0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right) \overset{(3.4)}{=} 2\operatorname{arctg} 0 = 0 \tag{3.3}$$

$$\lim_{\substack{y\to 0^+\\ x>0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\left\|\frac{0}{0}\right\| \overset{\text{l'H. p.}}{=} \lim_{\substack{y\to 0^+\\ x>0}}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y}{1} = \lim_{\substack{y\to 0^+\\ x>0}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{x} = 0 \tag{3.4}$$

$$\lim_{\substack{y\to 0^-\\ x>0}} 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \overset{\text{stejně jako (3.3)}}{=} 0$$

zatímco pro $x < 0$ a $y \to 0$ dostaneme

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x<0}} 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \left\| \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \to \pm\infty \right\| \overset{\operatorname{arctg}\in\mathcal{C}}{=} 2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\pi$$

tedy opět skok o délce 2π.

ii) Analogicky můžeme uvážit i jinou větev funkce Arg. Potom platí:

> Funkce $\arg_\varphi z$ je spojitá v každém bodě $\mathbb{C}^\times$ s výjimkou bodů na polopřímce vycházející z počátku s body o argumentu φ.

přičemž $\arg_\varphi z$ značí větev $\operatorname{Arg} z$ pro kterou platí

$$\arg_\varphi z \in [\varphi - 2\pi, \varphi)$$

Pak zjevně $\arg z = \arg_\pi z$.

iii) Ještě zmíníme alternativní řešení, které se obejde bez dělení na kvadranty i polovičního argumentu. Můžeme se na situaci podívat z více topologického hlediska. Funkce arg je zobrazením mezi topologickými prostory $\mathbb{C}^\times$ a $[-\pi, \pi)$ se standardní topologií.

Pro připomenutí: Spojitost zobrazení mezi topologickými prostory je definována tak, že úplný vzor otevřené množiny je vždy otevřená množina. Ekvivalentní podmínka říká, že úplný vzor okolí libovolného bodu musí být opět okolím jeho vzoru. Zřejmě tyto podmínky stačí ověřit jen na bazických množinách respektive okolích.

Vezměme nejprve libovolné bazické ε-okolí nějakého bodu $t \in (-\pi, \pi)$. Stačí navíc uvažovat jen okolí tak malé, že $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq [-\pi, \pi)$, uvažujme proto okolí dostatečně malé, ale jinak libovolné. Jeho úplným vzorem bude otevřený úhel

$$\left\{ \varrho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^\times \,\middle|\, |\varphi - t| < \varepsilon,\ \varrho > 0 \right\}$$

což je otevřená množina, která je okolím každého svého bodu. Vzor okolí libovolného bodu $t \in (-\pi, \pi)$, které jistě obsahuje nějaké dostatečně malé bazické otevřené okolí, je tedy opět okolím, protože obsahuje příslušný otevřený úhel.

Bazická ε-okolí $-\pi$ (v $[-\pi, \pi)$) jsou množiny tvaru $[-\pi, -\pi + \varepsilon)$, $\varepsilon < 2\pi$. Jejich úplné vzory jsou pak úhly

$$\left\{ \varrho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^\times \,\middle|\, \varphi \in [-\pi, -\pi + \varepsilon), \varrho > 0 \right\}$$

které nejsou otevřené v topologii $\mathbb{C}^\times$. Úplný vzor $\arg^{-1} -\pi = \mathbb{R}^-$ neleží ani v jejich vnitřku, vzorem okolí $-\pi$ tedy není okolí žádného bodu ležícího na $\mathbb{R}^-$.

Celkem je arg spojitý na vzoru $(-\pi, \pi) = \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}^-$, což jsme měli dokázat.

Poznamenejme ještě, že pokud bychom vzali argument jako funkci $\mathbb{C}^\times \to S^1$, byla by spojitá všude kromě nuly, kde ani není definovaná. Ovšem to jest vykoupeno tím, že oborem hodnot není interval, ale kružnice. Takováto funkce je dána předpisem $z \mapsto \frac{z}{|z|}$.

3.2 Derivace funkce

Úloha 3.15. Nechť $z = x+\mathrm{i}y$ a $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. Určete, kde má $f(z)$ derivaci:

*a) $f(z) = \Re(z)$

**a) $f(z) = z - \overline{z}$

a) $f(z) = z\Re(z) = (x+\mathrm{i}y)x$

b) $f(z) = |z|^2$

*b) $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}y^2$

c) $f(z) = \frac{1}{z}$

d) $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$

e) $f(z) = \overline{z}\Im(z) = (x-\mathrm{i}y)y$

f) $f(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos -y + \mathrm{i}\sin -y)$

Řešení.

*a) $f(z) = \Re(z)$

Z definice:

$$(\Re(z))' = \lim_{z\to z_0} \frac{\Re(z)-\Re(z_0)}{z-z_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x-x_0}{x+\mathrm{i}y-x_0-\mathrm{i}y_0}$$

neexistuje, protože

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0+k(x-x_0)}} \frac{x-x_0}{x+\mathrm{i}(y_0+k(x-x_0))-x_0-\mathrm{i}y_0} = \\ = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x+\mathrm{i}k(x-x_0)-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(1+\mathrm{i}k)(x-x_0)} = \frac{1}{1+\mathrm{i}k}$$

Úlohu můžeme vyřešit i přes Cauchyho-Riemannovy (C-R) podmínky. Zde $u(x,y) = x$ a $v(x,y) = 0$. Pak

$$\begin{aligned} u_x &= 1 & v_x &= 0 \\ u_y &= 0 & v_y &= 0 \end{aligned}$$

přičemž $u_x = 1 \neq 0 = v_y$ pro žádné $x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, tudíž $f(z)$ není diferencovatelná pro žádné $z \in \mathbb{C}$.

**a) $f(z) = z - \overline{z}$

Nejprve ověříme C-R podmínky: $u(x,y) = x - x = 0$, $v(x,y) = y + y = 2y$,

$$\begin{aligned} u_x &= 0 & v_x &= 0 \\ u_y &= 2 & v_y &= 0 \end{aligned}$$

přičemž $u_y = 2 \neq 0 = -v_x$ pro žádné $x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, takže $f(z)$ není diferencovatelná nikde na $\mathbb{C}$.

a) $f(z) = z\Re(z) = (x+\mathrm{i}y)x$

Ověříme C-R podmínky. $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = xy$,

$$\begin{aligned} u_x &= 2x & v_x &= y \\ u_y &= 0 & v_y &= x \end{aligned}$$

Musí platit $u_x = 2x = x = v_y$ a $u_y = 0 = -y = -v_x$. To nastane jen pro $x = y = 0$. Funkce může být diferencovatelná jen v bodě $(0,0)$. Pak

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{z\Re(z) - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \Re(z) = 0$$

tj. $f(z)$ je v 0 diferencovatelná. Poznamenejme, že dokázat existenci $f'(z)$ pouze v 0 by bylo složitější.

b) $f(z) = |z|^2$ odtud $f(x+\mathrm{i}y) = x^2+y^2$, $u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$.

Ověříme C-R podmínky

$$\begin{aligned} u_x &= 2x & v_x &= 0 \\ u_y &= 2y & v_y &= 0 \end{aligned}$$

a musí platit $u_x = 2x = 0 = v_y$ a $u_y = 2y = 0 = -v_x$, což je jen pro $x = y = 0$. Pak platí

$$f'(0) = u_x(0,0) + \mathrm{i}v_x(0,0) = 0$$

přičemž přímým výpočtem dostaneme totéž.

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}z}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0$$

Poznamenejme, že $|\cdot|^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$, zatímco $|\cdot|^2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je diferencovatelná pouze pro $z = 0$.

*b) $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}y^2$

Přes C-R podmínky jsou $u = x^2$, $v = y^2$,

$$\begin{aligned} u_x &= 2x & v_x &= 0 \\ u_y &= 0 & v_y &= 2y \end{aligned}$$

a $u_x = v_y$ pro $x = y$ ($v_x = -u_y$ kdekoli). Funkce $f(z)$ je tedy diferencovatlená pouze na přímce $\{x + \mathrm{i}x \mid x \in \mathbb{R}\}$ a platí $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = 2x$.

c) $f(z) = \frac{1}{z}$, $f(x+\mathrm{i}y) = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}$, $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$u_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad v_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

přičemž $u, v \in \mathcal{C}^1$ a zjevně $u_x = v_y$, $v_x = -u_x$, tudíž f je komplexně diferencovatelná na $D(f) = \mathbb{C}^\times$ a platí

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \mathrm{i}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} =$$
$$= -\frac{(x-\mathrm{i}y)^2}{(x+\mathrm{i}y)^2(x-\mathrm{i}y)^2} = -\frac{1}{(x+\mathrm{i}y)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

Stejného výsledku zde dosáhneme dosazením $x = z$ a $y = 0$

$$\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \overset{\substack{x=z\\y=0}}{=} \frac{-z^2}{z^4} = -\frac{1}{z^2}$$

d) $f(z) = \frac{1}{\bar{\bar{z}}}$, $f(x+\mathrm{i}y) = \frac{1}{x-\mathrm{i}y} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$, $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$,

$$u_x = 1 - \frac{2x^2}{x^2+y^2} \qquad v_x = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$
$$u_y = \frac{2xy}{x^2+y^2} \qquad v_y = 1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

a C-R podmínky neplatí nikde, f není komplexně diferencovatelná nikde na $\mathbb{C}$.

e) $f(z) = \bar{z}\Im(z) = (x-\mathrm{i}y)y$, $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = -y^2$,

$$u_x = y \qquad v_x = 0$$
$$u_y = x \qquad v_y = -2y$$

a C-R podmínky platí pouze pro $x = y = 0$. Počítejme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \mathrm{i}y^2}{x+\mathrm{i}y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy-\mathrm{i}y^2)(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - y^3 - 2\mathrm{i}y^2x}{x^2+y^2}$$

poté polární substitucí $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $\varrho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ reálnou a imaginární část

$$\lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho^3\cos^2\varphi\sin\varphi - \varrho^3\sin^3\varphi}{\varrho^2} = 0$$
$$\lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{\varrho^2} = 0$$

tj. $f'(0) = 0 - 2\mathrm{i}0 = 0$.

f) $f(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos -y + \mathrm{i}\sin -y)$, takže $u = \mathrm{e}^x \cos y$, $v = -\mathrm{e}^x \sin y$,

$$\begin{aligned} u_x &= \ \ \mathrm{e}^x \cos y & v_x &= -\mathrm{e}^x \sin y \\ u_y &= -\mathrm{e}^x \sin y & v_y &= -\mathrm{e}^x \cos y \end{aligned}$$

odtud $u_x = v_y$ právě tehdy, když $\mathrm{e}^x = 0$ nebo $\cos y = 0$; $u_y = -v_x$ právě tehdy, když $\mathrm{e}^x = 0$ nebo $\sin y = 0$. Musí být tedy $\cos y = \sin y = 0$. Toto nenastane nikdy současně. Tudíž f není nikde na $\mathbb{C}$ diferencovatelná.

△

Úloha 3.16. Je-li funkce f komplexně diferencovatelná v bodě z_0, pak platí

$$f'(z_0) = u_x + \mathrm{i}v_x$$

Určete $f'(z_0)$, je-li z vyjádřena v polárních souřadnicích, tj. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.

Řešení. Pomocí pravidla pro derivování složené funkce $u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ dostaneme

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi$$

podobně

$$v_r = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi$$

Chceme u_r, v_r vyjádřir s pomocí u_x, u_y. S využitím C-R podmínek máme

$$u_r = u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi \text{ odtud } u_r\cos\varphi = u_x\cos^2\varphi + u_y\cos\varphi\sin\varphi$$
$$v_r = v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi = -u_y\cos\varphi + u_x\sin\varphi \text{ odtud } v_r\sin\varphi = -u_y\cos\varphi\sin\varphi + u_x\sin^2\varphi$$

celkem

$$u_r\cos\varphi + u_r\sin\varphi = u_x(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = u_x$$

Podobně

$$\left.\begin{aligned} u_r\sin\varphi &= u_x\sin\varphi\cos\varphi + u_y\sin^2\varphi \\ v_r\cos\varphi &= -u_y\cos^2\varphi + u_x\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}\right\} \text{ odtud } u_r\sin\varphi - v_r\cos\varphi = u_y$$

Takže

$$\begin{aligned} f'(z_0) = u_x + \mathrm{i}v_x = u_x - \mathrm{i}u_y &= u_r\cos\varphi + v_r\sin\varphi - \mathrm{i}u_r\sin\varphi + \mathrm{i}v_r\cos\varphi = \\ &= u_r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) + v_r(\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi) = \\ &= u_r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{i}v_r(-\mathrm{i}\sin\varphi + \cos\varphi) = (u_r + \mathrm{i}v_r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{aligned}$$

△

Úloha 3.17. Funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lze kromě tvaru $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ vyjádřit také pomocí polárních souřadnic jako

$$f(z) = U(r, \varphi) + \mathrm{i}V(r, \varphi)$$

Ukažte, že pro komplexně diferencovatelnou funkci f v bodě $z \neq 0$ platí

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

(toto jsou vlastně C-R podmínky pro z v polárních souřadnicích). A jak vypadá Laplaceova rovnice v polárních souřadnicích?

Řešení. Platí (využívá se, že $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$)

$$U_r + \mathrm{i}V_r = \frac{\partial f}{\partial r} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial r} = f'(z)(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$
$$U_\varphi + \mathrm{i}V_\varphi = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial \varphi} = f'(z)r(-\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi)$$

Proto

$$\mathrm{i}r\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \mathrm{i}r(U_r + \mathrm{i}V_r) - U_\varphi - \mathrm{i}V_\varphi =$$
$$= f'(z)r(\mathrm{i}\cos\varphi - \sin\varphi) + f'(z)r(-\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi) = 0$$

oddělením reálné a imaginární části dostaneme

$$rU_r - V_\varphi = 0 \qquad\qquad -rV_r - U_\varphi = 0$$

z čehož plynou požadované rovnosti.

Podobně jako v Důsledku 3.7 skriptech [1, strana 20] bychom mohli ukázat, že splnění těchto C-R podmínek je spolu s $U, V \in \mathcal{C}^1$ je postačující pro (komplexní) diferencovatelnost funkce f v bodě $z \neq 0$.

Popíšeme Laplaceovu rovnici. Máme rovnosti

$$rU_r = V_\varphi \quad \Big| \frac{\partial}{\partial r} \qquad\qquad -rV_r = U_\varphi \quad \Big| \frac{\partial}{\partial \varphi}$$
$$U_r + rU_{rr} = V_{r\varphi} \qquad\qquad -rV_{r\varphi} = U_{\varphi\varphi}$$

Kombinací máme

$$-r(U_r + rU_{rr}) = U_{\varphi\varphi}$$

kde převodem na pravou stranu dostaneme Laplaceovu rovnici v polárních souřadnicích

$$r^2U_{rr} + rU_r + U_{\varphi\varphi} = 0$$

Podobně máme

$$r^2V_{rr} + rV_r + V_{\varphi\varphi} = 0$$

△

Úloha 3.18. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ splňuje C-R podmínky v $K(0,R)$ a položme $g(z) := \overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus K(0,R)$. Ukažte, že g splňuje také C-R podmínky (v polárních souřadnicích). (Bod $\frac{R^2}{\bar{z}}$ je symetrický k z vzhledem ke kružnici $|z| = R$; s tímto se ještě potkáme v případě $R = 1$, což je kruhová inverze, viz úlohu 5.1.)

Řešení. Využijeme předchozí cvičení 3.17. Položme $f = U(r,\varphi) + \mathrm{i}V(r,\varphi)$. Protože $\arg \frac{1}{\bar{z}} = \arg z$, máme $g(z) = U\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) - \mathrm{i}V\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right)$. Položením $g(z) = P(r,\varphi) + \mathrm{i}Q(r,\varphi)$ pak s využitím řetězového pravidla dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{R^2}{r^2}U_1\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) \qquad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = U_2\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{R^2}{r^2}V_1\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) \qquad \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = -\frac{R^2}{r^2}V_2\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right)$$

kde U_i, V_i pro $i \in \{1,2\}$ značí příslušné parciální derivace funkcí U, V vzhledem k i-té proměnné. Jelikož ale f splňuje C-R podmínky, musí podle předchozího cvičení 3.17 platit

$$U_1(r,\varphi) = \frac{1}{r}V_2(r,\varphi) \qquad V_1(r,\varphi) = -\frac{1}{r}U_2(r,\varphi)$$

Nahrazením r za $\frac{R^2}{r}$ dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{R^2}{r^2}U_1\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) = -\frac{R^2}{r^2}\frac{r}{R^2}V_2\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) = -\frac{1}{r}V_2\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{R^2}{r^2}V_1\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) = -\frac{R^2}{r^2}\frac{r}{R^2}U_2\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) = -\frac{1}{r}U_2\left(\frac{R^2}{r},\varphi\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}$$

tj. funkce g také splňuje C-R podmínky pro z v polárním tvaru. △

Úloha 3.19. Uvažme funkci $f(z) = w = R(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ pro $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Ukažte, že pro $z \neq 0$ a $w \neq 0$ a diferencovatelnou funkci f platí

$$\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \qquad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

(toto jsou C-R podmínky pro z a f v polárních souřadnicích).

Řešení. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r}(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) + R(-\sin\psi + \mathrm{i}\cos\psi)\frac{\partial \psi}{\partial r}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial R}{\partial \varphi}(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) + R(-\sin\psi + \mathrm{i}\cos\psi)\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

Proto

$$\mathrm{i}r\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = r\frac{\partial R}{\partial r}(\mathrm{i}\cos\psi - \sin\psi) + rR(-\mathrm{i}\sin\psi - \cos\psi)\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\partial R}{\partial \varphi}(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) + R(-\sin\psi + \mathrm{i}\cos\psi)\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\
&= \mathrm{i}r\frac{\partial R}{\partial r}(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) - rR(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)\frac{\partial \psi}{\partial r} \\
&- \frac{\partial R}{\partial \varphi}(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) - \mathrm{i}R(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\
&= \underbrace{(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)}_{\neq 0}\left(\mathrm{i}r\frac{\partial R}{\partial r} - rR\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \mathrm{i}R\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)
\end{aligned}
$$

Z předchozího cvičení 3.18 ale víme, že $\mathrm{i}r\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$. Proto díky $w \neq 0$ máme

$$\mathrm{i}r\frac{\partial R}{\partial r} - rR\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \mathrm{i}R\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$$

z čehož po oddělení reálné a imaginární části získáme požadované rovnosti. △

3.3 Holomorfní funkce

Úloha 3.20. Nalezněte množinu, na které je funkce f holomorfrní.

a) $f(z) = 2|z| + 3\mathrm{i}$

b) $f(z) = \sin\overline{z}$

Řešení.

a) $f(z) = 2|z| + 3\mathrm{i} = 2\sqrt{x^2+y^2} + 3\mathrm{i}$, $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = 3$,

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & v_x &= 0 \\
u_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & v_y &= 0
\end{aligned}
$$

tj. C-R podmínky platí pouze v $z = 0$. Již odtud vidíme, že f není holomorfní v žádném bodě $\mathbb{C}$. Navíc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sqrt{x^2+y^2} + 3\mathrm{i} - 3\mathrm{i}}{x + \mathrm{i}y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2(x - \mathrm{i}y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ale po polární substituci $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $\varrho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ vidíme, že neexistuje limita reálné části

$$\lim_{\varrho\to 0^+} \frac{2\varrho\cos\varphi}{\varrho} = 2\cos\varphi$$

takže není f ani diferencovatelná nikde na $\mathbb{C}$.

b) $f(z) = \sin \overline{z}$ pak

$$\begin{aligned} f(x+\mathrm{i}y) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{y+\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-(y+\mathrm{i}x)}}{2\mathrm{i}} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) - \mathrm{e}^{-y}(\cos -x + \mathrm{i}\sin -x)}{2\mathrm{i}} = \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y})\cos x + \mathrm{i}(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y})\sin x}{2\mathrm{i}} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}\sin x - \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2}\cos x = \cosh y \sin x - \mathrm{i}\sinh y \cos x \end{aligned}$$

tedy $u(x,y) = \cosh y \sin x$, $v(x,y) = -\sinh y \cos x$ a

$$\begin{aligned} u_x &= \cosh y \cos x & v_x &= \sinh y \sin x \\ u_y &= \sinh y \sin x & v_y &= -\cosh y \cos x \end{aligned}$$

tedy musí platit $\cosh y = 0$ nebo $\cos x = 0$; a zároveň $\sinh y = 0$ nebo $\sin x = 0$. Toto nastane pouze pro $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, což jsou izolované body (v nichž je dervace nulová). Funkce f není holomorfní nikde.

$\triangle$

Úloha 3.21. Ukažte, že vztah mezi funkcí u a funkcí harmonicky sdruženou je antisymetrický, tj. v je harmonicky sdružená s u právě tehdy, když $-u$ je harmonicky sdružená s v.

Řešení. Nechť v je harmonicky sdružená s u na nějaké otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$, tj. $f := u + \mathrm{i}v$ je holomorfní na D. Pak ale $-\mathrm{i}f$ je holomorfní na D, tj. $-\mathrm{i}u + v = v - \mathrm{i}u$, což znamená, že $-u$ je harmonicky sdružená s v. $\triangle$

Úloha 3.22. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Ukažte, že totéž platí i o funkci $\overline{f(\overline{z})}$.

Řešení. Jelikož f je holomorfní, mají u a v spojité parciální derivace (libovolného řádu) a platí $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Položíme-li $g(z) := \overline{f(\overline{z})} = \tau(x,y) + \mathrm{i}\omega(x,y)$, pak

$$\overline{f(\overline{z})} = \overline{u(x,-y) + \mathrm{i}v(x,-y)} = u(x,-y) - \mathrm{i}v(x,-y)$$

tudíž

$$\tau(x,y) = u(x,-y) \qquad \omega(x,y) = -v(x,-y)$$

Zjevně mají τ i ω parciální derivace a platí

$$\begin{aligned} \tau_x(x,y) = u_x(x,-y) = v_y(x,-y) &= \frac{\partial}{\partial y}(-v(x,-y)) = \omega_y(x,y) \\ \tau_y(x,y) = -u_y(x,-y) = v_x(x,-y) &= -\omega_x(x,y) \end{aligned}$$

tudíž g splňuje C-R podmínky a je spojitá, takže je holomorfní. $\triangle$

Úloha 3.23. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že $u(x,y) = \Re(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + x$.

Řešení. Nejdříve ověříme „harmoničnost“ funkce u. Platí $u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$. Funkce f musí splňovat C-R podmínky

$$u_x = 2x + 1 = v_y$$

odtud $v = y(2x+1) + C(x)$. Poté

$$v_x = 2y + C'(x) = 2y = -u_y$$

takže $C'(x) = 0$ a $C(x) = C$ konstanta.

Druhá možnost ke zjištění v je počítat

$$v = \int 2y \,\mathrm{d}y + C(y) = 2xy + C(y)$$

a kombinací rovností pro v dostaneme

$$\begin{aligned} y(2x+1) + C(x) &= 2xy + C(y) \\ C(x) &= C(y) - y \\ C(x) &= C \text{ konst.} \end{aligned}$$

Může se však stát, že výpočet jednoho z integrálů je komplikovaný. Tento postup pak nelze použít.

Nalezněme pak funkci $f(z)$

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + x + \mathrm{i}(2xy + y + C)$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Vezměme $z = x$ a $y = 0$. Pak $f(z) = z^2 + z + \mathrm{i}C$. Musíme ověřit to, že $f(z)$ je skutečně hledaná funkce. Jediný vždy korektní postup je $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ a $y = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$. △

Úloha 3.24. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že

$$v(x,y) = x + y - 3 \qquad\qquad f(0) = -3\mathrm{i}$$

Řešení. Platí $v_y = 1 = u_x$, odtud $u = x + C(y)$, pak $C'(y) = -1$ a $C(y) = -y + C$, $C \in \mathbb{R}$. Pak

$$f(x + \mathrm{i}y) = x - y + C + \mathrm{i}(x + y - 3) = z + C + \mathrm{i}(z - 3)$$

a pak $f(0) = -3\mathrm{i} + C = -3\mathrm{i}$, tedy $C = 0$. Tudíž $f(z) = z + \mathrm{i}z - 3\mathrm{i}$. △

Úloha 3.25. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2$.

Řešení. Nejprve ověříme, že v je harmonická.

$$v_{xx} + v_{yy} = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2 + \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2 = 0$$

Takže máme

$$v_y = \frac{2y}{x^2+y^2} + 2y = u_x$$

odtud

$$u = \int \frac{2y}{x^2+y^2} + 2y \,\mathrm{d}x = 2y\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2xy + C(y) = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2xy + C(y)$$

takže

$$\begin{aligned} u_y = 2\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + 2x + C'(y) &= \frac{-2x}{x^2+y^2} + 2x \\ \frac{-2x}{x^2+y^2} + 2x + C'(y) &= \frac{-2x}{x^2+y^2} + 2x \\ C'(y) &= 0 \\ C(y) &= C \text{ konst.} \end{aligned}$$

Pak $f(x+\mathrm{i}y) = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2xy + C + \mathrm{i}(\ln(x^2+y^2) - x^2 + y^2)$, $y \neq 0$. Uvažme $x = 0$. Pak $f(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}(\ln y^2 + y^2) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Odtud $y = -\mathrm{i}z$ a $f(z) = \mathrm{i}\log(-z^2) - \mathrm{i}z^2 + C$. △

Úloha 3.26. Najděte holomorfní funkci f takovou, že $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Řešení. Funkce u je diferencovatelná na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a platí

$$u_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = v_y \qquad\qquad u_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$$

neboli $v_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Pak

$$v = \int v_y \,\mathrm{d}y = -\int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \left|\begin{matrix} s = x^2+y^2 \\ \mathrm{d}s = 2y\,\mathrm{d}y \end{matrix}\right| + C(x) = x\int \frac{-1}{s^2}\,\mathrm{d}s + C(x) = \frac{x}{x^2+y^2} + C(x)$$

a dále

$$\begin{aligned} v_x = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ C'(x) &= 0 \\ C(x) &= C \text{ konst.} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

tudíž $v = \frac{x}{x^2+y^2} + C$. Celkem

$$f(x+\mathrm{i}y) = \frac{y}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}C$$

dosazením $y = -\mathrm{i}z$, $x = 0$ máme

$$f(z) = \frac{-\mathrm{i}z}{-z^2} + \mathrm{i}C = \frac{\mathrm{i}}{z} + \mathrm{i}C$$

a platí

$$f'(x+\mathrm{i}y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \mathrm{i}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\mathrm{i}x^2-\mathrm{i}y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} = \\ -\mathrm{i}\frac{x^2-2\mathrm{i}xy-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\mathrm{i}\frac{(x-\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2} = -\mathrm{i}\frac{\overline{z}^2}{\overline{z}^2 z^2} = -\frac{\mathrm{i}}{z^2}$$

△

Úloha 3.27. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že $u(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y)$.

Řešení. Funkce u je diferencovatelná a harmonická

$$u_{xx} + u_{yy} = \mathrm{e}^x(x+2)\cos y - \mathrm{e}^x y\sin y + \mathrm{e}^x(-x-2)\cos y + \mathrm{e}^x y\sin y = 0$$

takže

$$u_x = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + \mathrm{e}^x\cos y = \mathrm{e}^x((1+x)\cos y - y\sin y) = v_y$$

tedy

$$\begin{aligned} v = \int \mathrm{e}^x((1+x)\cos y - y\sin y)\,\mathrm{d}y + C(x) &= \mathrm{e}^x((1+x)\sin y - \sin y + y\cos y) + C(x) \\ &= \mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y) + C(x) \end{aligned}$$

a odtud

$$\begin{aligned} v_x = \mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y) + \mathrm{e}^x\sin y + C'(x) &= -\mathrm{e}^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) = -u_y \\ C'(x) &= 0 \\ C(x) &= C \text{ konst.} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

tudíž

$$\begin{aligned} f(x+\mathrm{i}y) &= \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + \mathrm{i}\mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y) + \mathrm{i}C \\ &= \mathrm{e}^x((x+\mathrm{i}y)\cos y + (\mathrm{i}x - y)\sin y) + \mathrm{i}C \\ &= \mathrm{e}^x((x+\mathrm{i}y)\cos y + (x+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\sin y) + \mathrm{i}C \\ &= (x+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) + \mathrm{i}C \\ &= (x+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} + \mathrm{i}C = z\mathrm{e}^z + \mathrm{i}C \end{aligned}$$

△

Úloha 3.28. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že

a) $u(x,y) = x^2 + y^2$

b) $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ na množině $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Řešení.

a) Takováto funkce neexistuje. Funkce u není harmonická:

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2 = 4 \neq 0$$

Ukážeme, že skutečně neexistuje holomorfní funkce f taková, že $\Re(f) = u$. Pokud by taková funkce existovala, existovala by funkce $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonicky sdružená s u, tedy

$$u_x = 2x = v_y \qquad\qquad u_y = 2y = -v_x$$

pak

$$v = \int 2x \,\mathrm{d}y = 2xy + C(x)$$

a

$$v_x = 2y + C'(x) = -2y = -u_y \qquad\qquad C'(x) = -4y$$

což není možné, protože $C(x)$ je funkcí pouze x. Toto je přímý důsledek toho, že funkce u není harmonická.

b) Připomeneme, že máme-li harmonické funkce u, v na $D \subseteq \mathbb{R}^2$, pak je-li $u + \mathrm{i}v$ holomorfní funkce na otevřené množině D, je v harmonicky sdružená s u. Vztah je antisymetrický, tj. je-li v harmonicky sdružená s u, je u harmonicky sdružená s $-v$ (viz cvičení 3.21).

Naše otázka tedy v obecnosti pátrá po existenci harmonicky sdružené funkce na otevřené množině D. Jenže obecně je odpověď záporná. Např. přímo naše funkce $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ je harmonická na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

a je reálnou částí funkce $f(z) = \log z = u(x, y) + \mathrm{i}\arg z$ (viz přednáška, Kapitola 5.6) která je holomorfní například v kruhu $K(1, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$. Jenže poloměr kruhu K nelze zvětšit, proto funkci f nelze holomorfně rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Neexistuje však jiná funkce?

Připusťme, že ano, tj. že existuje v taková, že $f = u + \mathrm{i}v$ a f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak z C-R podmínek máme

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y \qquad\qquad u_x = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x$$

pak

$$v = \int \frac{x}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C(x)$$

a

$$v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} + C'(x) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -u_y$$

$$\begin{aligned} C'(x) &= 0 \\ C(x) &= C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

tedy $f(x+\mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{i}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \mathrm{i}C$. Jenže má-li být f holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, musí zde být také spojitá. Pak musí v být spojitá i na jednotkové sféře $|z| = 1$. Při pohybu z $(1,0)$ do $(0,1)$ proti směru hodinových ručiček, je $\frac{y}{x} \to \infty$, takže ze spojitosti plyne $v(0,1) = \frac{\pi}{2} + C$. Současně při pohybu z $(-1,0)$ do $(0,1)$ po směru hodinových ručiček je $\frac{y}{x} \to -\infty$, takže ze spojitosti plyne $v(0,1) = -\frac{\pi}{2} + C$, což je spor.

Tento příklad ukazuje, že k dané funkci u harmonické na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$ obecně nemusí na G existovat harmonicky sdružená funkce (uvedený příklad je asi tím nejčastěji uváděným v této souvislosti).

Nicméně situace naštěstí není tak tragická. Následující věta (Věta 3.15 z přednášky) ukazuje, že každá funkce harmonická na otevřené množině je lokálně reálnou (imaginární) částí nějaké holomorfní funkce, tj. pro každý bod existuje okolí, na kterém pro ni existuje harmonicky sdružená funkce (kde se okolím rozumí jednoduše souvislá oblast). Důkaz věty sice nedává přesný návod, jak takovou funkci zkonstruovat, ale to jsme již vlastně učinili v předchozím příkladu a známe ho z řešení exaktních diferenciálních rovnic – jde o kmenovou funkci k totálnímu diferenciálu $-u_y(x,y)\,\mathrm{d}x + u_x(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Věta. *Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a funkce u je harmonická na G. Pak na G existuje harmonicky sdružená funkce v, přičemž tato funkce je určena jednoznačně až na aditivní konstantu.*

Důkaz. Viz skripta, Věta 3.15. □

Všimněte si, že množina $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ v předchozím příkladu není jednoduše souvislá, takže tato věta nemůže zaručit úspěch (a my jsme ukázali, že to ani nelze).

Ukázali jsme, že pro funkci

$$f(x+\mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{i}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C\right)$$

by byl problém s osou $\Im(z)$, tj. $x = 0$. Funkce v není na této ose ani definovaná. Pak tedy pro body na této ose neexistuje harmonicky sdružená funkce? Podle Věty 3.15 existovat musí. „Problém“ je totiž v postupu. Vypočetli jsme $v(x,y)$ pomocí $\int u_x\,\mathrm{d}y$. Lze samozřejmě použít i druhou možnost, tj.

$$\begin{aligned} v(x,y) = \int -u_y\,\mathrm{d}x = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \\ -\frac{y}{y^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\left|\begin{matrix} t=\frac{x}{y} \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x \end{matrix}\right| = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + D(y) \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} v_y = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + D'(y) &= \frac{x}{x^2+y^2} = u_x \\ \frac{x}{x^2+y^2} + D'(y) &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ D'(y) &= 0 \\ D(y) &= D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Funkce $v = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + D$ pak má „problém“ při přechodu přes osu $y = 0$, tj. $\Re(z)$ (což ukážeme analogickými argumenty jako pro $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$). Nicméně pro okolí bodů na $\Im(z)$ (vyjma počátku) tato funkce funguje prefektně, tj. celkově

- na $\Im(z)$ je $v(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + D$,
- na $\Re(z)$ je $v(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$,
- uvnitř jednotlivých kvadrantů si můžeme vybrat z obou variant (ale vždy pak v existuje jen na okolí, do nějž nepatří příslušná osa),
- v počátku taková funkce neexistuje, libovolné jeho okolí obsahuje body obou os (také zde není definovaná funkce u).

$\triangle$

Poznámka. Toto cvičení také ukazue další možnou[1] komplikaci ve výpočtu v pomocí postupu

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \int u_x \,\mathrm{d}y + \varphi(x) \\ v_2 &= -\int u_y \,\mathrm{d}x + \psi(y) \end{aligned}\right\} \text{porovnáním získáme } \varphi(x) \text{ nebo } \psi(y).$$

V našem případě máme

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \varphi(x) &= -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \psi(y) \\ \psi(y) - \varphi(x) &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\frac{y}{x} \end{aligned}$$

tudíž $\psi(y) - \varphi(x) = \text{konst.}$ a $\varphi = C$, ale budeme to vědět vždy?

[1]Kromě náročnosti výpočtu obou integrálů.

Kapitola 4

Funkční a mocninné řady

Mocninnou řadou v $\mathbb{C}$ rozumíme součet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Číslo z_0 se nazývá středem konvergence řady. Pro každou mocninnou řadu v $\mathbb{C}$ existují čísla $0 \leq R < R'$ taková, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje na $K(z_0, R)$ a diverguje na $\mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, R')}$. Označme

$$r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Pak $R = \frac{1}{r}$. Existují-li příslušné limity, pak navíc platí

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad\qquad r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Obecně platí vztah

$$\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}|\, a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Dále pro konvergenci (funkčních a) mocninných řad platí stejná kritéria jako u řad číselných.

Úloha 4.1. Určete poloměr konvergence R následujících mocninných řad.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$, $a \geq 0$

Řešení.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ a $R = 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ a $R = \infty$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

$a_n = n^n$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ a $R = 0$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$

$a_n = \frac{n}{2^n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ a $R = 2$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

$a_n = \frac{n!}{n^n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ a $R = \mathrm{e}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

Platí

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \neq k! \\ 1 & n = k! \end{cases}$$

odtud

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & n \neq k! \\ 1 & n = k! \end{cases}$$

a $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pak $R = 1$.

g) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$

Platí

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \neq k! \\ 2^k & n = k! \end{cases}$$

odtud

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & n \neq k! \\ \sqrt[k!]{2^k} = \sqrt[(k-1)!]{2} & n = k! \end{cases}$$

pak $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[(k-1)!]{2} = 1$ a $R = 1$.

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n z^n$

$a_n = \left(3 + (-1)^n\right)^n$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 3 + (-1)^n = \begin{cases} 4 & 2 \text{ dělí } n \\ 2 & 2 \text{ nedělí } n \end{cases}$$

pak $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 4$ a $R = \frac{1}{4}$

i) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$, $a \geq 0$

Zjevně $a_n = n + a^n$. Úlohu si rozdělíme na dva případy

- $a \leq 1$, pak $n \leq n + a^n \leq n + 1$ a platí

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+a^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$$

  tudíž $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+a^n} = 1$ a $R = 1$.

- $a > 1$ pak $a^n > n$ pro dostatečně velká n, pro něž pak platí $a^n < a^n + n < 2a^n$ a tudíž

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+a^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2a^n} = a$$

  a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+a^n} = a$ a $R = \frac{1}{a}$.

Celkem $R = \min\left\{1, \frac{1}{a}\right\}$

△

Úloha 4.2. Určete poloměr konvergence pro řadu

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

Řešení. Platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}$$

takže $R = 4$. △

Úloha 4.3. Určete poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1-e^{i\alpha}\right)^n}\left(z - e^{i\alpha}\right)^n$$

pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)\left(1-e^{i\alpha}\right)^{n+1}} n\left(1-e^{i\alpha}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\frac{1}{1-e^{i\alpha}}\right| = \\ &= \left|\frac{1}{1-e^{i\alpha}}\right| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \left|\frac{1}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha+i\sin\alpha}\right| = \\ &= \left|\frac{1-\cos\alpha+i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}\right| = \left|\frac{1-\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\right| = \end{aligned}$$

$$= \left|\frac{1-\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha}{2-2\cos\alpha}\right| = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{4(1-\cos\alpha)^2} + \frac{\sin^2\alpha}{4(1-\cos\alpha)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-2\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}} = \frac{1}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

takže $R = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$. △

Úloha 4.4. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ konverguje pro $|z|<1$.

Řešení. Pro $|z|<1$ a pro každé $n\in\mathbb{N}$ dostaneme

$$\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \le \frac{1}{n(n+1)} \le \frac{1}{n^2}$$

přičemž řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje (integrální kritérium), takže

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ konverguje na $|z|<1$ absolutně. △

Úloha 4.5. Určete obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$$

Řešení. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^{n+1}}$$

Určíme nejprve poloměr konvergence. Počítáme hned

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3 4^{n+2}}{(n+2)^3 4^{n+1}} = 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^3 = 4$$

tj. řada konverguje absolutně na $K(-2,4)$. Na množině $|z+2|=4$ máme

$$\left|\frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^{n+1}}\right| = \frac{1}{4(n+2)^3} \le \frac{1}{n^3}$$

přičemž $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ konverguje podle integrálního kritéria. Tudíž naše řada konverguje na $\overline{K(-2,4)}$. △

Úloha 4.6. Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$$

Řešení. Z cvičení 4.1 d) máme $R = 2$ a na $K(0,2)$ řada konverguje absolutně. Zbývá vyřešit kružnici $|z| = 2$. Zde platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{2^n} z^n \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} 2^n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

tudíž zde řada diverguje. Oborem konvergence je tak pouze $K(0,2)$. △

Připomeneme dvě význačná kritéria konvergence číselných, funkčních i mocninných řad, kritérium

Abelovo Nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní nezáporná posloupnost. Je-li $\sum a_n$ konvergentní řada a $\{b_n\}$ ohraničená posloupnost, řada $\sum a_n b_n$ konverguje.

Dirichletovo Nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní nezáporná posloupnost. Je-li posloupnost částečných součtů $\sum a_n$ ohraničená a $b_n \to 0$, řada $\sum a_n b_n$ konverguje.

Úloha 4.7. Určete obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n} = 0z + 0z^2 + z^3 + 0z^4 + 0z^5 + \frac{z^6}{2} + \cdots$$

Řešení. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{3n+3}}{n+1} \cdot \frac{n}{z^{3n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^3 n}{n+1} \right| = \left| z^3 \right| = |z|^3$$

tedy řada konverguje absolutně pro $|z| < 1$ a diverguje pro $|z| > 1$.Určíme, jak se řada chová na $|z| = 1$. Nekonverguje zde absolutně, protože zde v absolutní hodnotě přechází na harmonickou řadu. Na jednotkové sféře můžeme její prvky vyjádřit ve tvaru $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 3n\varphi + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 3n\varphi$$

Pro $\varphi = \frac{2}{3}k\pi$ dostáváme harmonickou řadu, která diverguje. Pro jiná φ řada konverguje podle Dirichletova kritéria. Platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ukážeme ohraničenost posloupností částečných součtů $\cos 3n\varphi$ a $\sin 3n\varphi$, respektive obecněji $\cos n\varphi$ a $\sin n\varphi$. Označme

$$c_n := \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$$
$$s_n := \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi$$

Vezměme pak

$$q := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

pak podle Eulerova vztahu

$$q^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi$$

Kombinací předchozích dostáváme

$$c_n + \mathrm{i}s_n = q + q^2 + \cdots + q^n = q\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Odtud porovnáním reálné a imaginární části dostaneme

$$c_n = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\varphi \sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad |c_n| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}$$

$$s_n = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi \sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad |s_n| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}$$

čímž je dokázána ohraničenost částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos 3n\varphi$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 3n\varphi$.

Celkem řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{n}$ konverguje na $\overline{K(0,1)} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, přičemž absolutně konverguje na $K(0,1)$. △

Úloha 4.8. Nechť $p \in \{\pm 1, -2\}$. Vyšetřeme konvergenci pro

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n$$

Řešení. Platí $a_n = n^p$. Potom

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^p = 1^p = 1$$

a $R = 1$. Řada pro všechny p konverguje na $K(0,1)$. Určíme konvergenci na hranici.

a) $p = 1$ máme $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. Pro $|z| = 1$ platí $|nz^n| \to \infty$, tudíž řada není absolutně konvergentní.

Pro $z \in \{\pm 1, \pm\mathrm{i}\}$ řada očividně diverguje. Pro $z \neq \pm 1, \pm\mathrm{i}$ je pro každé $n \in \mathbb{N}$ $|\Re(nz^n)| > 1$ nebo $|\Im(nz^n)| > 1$, tudíž vždy $\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^n\right)$ nebo $\mathrm{i}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^n\right)$ diverguje. Celkem tedy řada diverguje.

Jiný možný důkaz divergence řady na $|z| = 1$ je přímo spočítat limitu $\lim_{n\to\infty} nz^n$. Vždy n-tý člen posloupnosti leží na (právě jedné) kružnici se středem v 0 a poloměrem n. Proto v každém okolí nekonečna leží nekonečně mnoho členů posloupnosti a není těžké si rozmyslet, že ∞ je (jediným) hromadným bodem, tj. limitou, této posloupnosti. Řada tedy nesplňuje ani nutnou podmínku konvergence.

Oborem konvergence je $K(0,1)$.

b) $p=-2$ máme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. Pro $|z|=1$ je

$$\left|\frac{1}{n^2}z^n\right|=\frac{1}{n^2}$$

přičemž $\sum\frac{1}{n^2}<+\infty$. Řada konverguje na $\overline{K(0,1)}$.

c) $p=-1$ máme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ na $|z|=1$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}}{n}$$

pro $\varphi\in[-\pi,\pi)$. Je-li $\varphi=0$, máme harmonickou řadu, o které víme, že diverguje. Pro $\varphi\neq 0$ řada konverguje podle Dirichletova kritéria pro posloupnosti $\frac{1}{n}$ a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$ (viz cvičení 4.7). Platí $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ a posloupnost částečných součtů $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$ je ohraničená:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}i\varphi}\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\right|\leq\frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|}=\frac{2}{\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2}}=\frac{2}{\sqrt{2-2\cos\varphi}}=\left|\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|$$

tudíž řada konverguje na $\overline{K(0,1)}\setminus\{1\}$.

△

Úloha 4.9. Určete obor konvergence pro řadu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}z^{3n}$$

Řešení. Máme

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}n\ln n\right|\overset{\text{l'H. p.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+1}{\ln(n+1)+1}\overset{\text{l'H. p.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$$

a $R=1$. Řada konverguje absolutně na $K(0,1)$.

Vyšetříme chování řady na $|z|=1$. Pro $z=1$ dostáváme alternující řadu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$, která konverguje podle Leibnitzova kritéria ($\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=0$). Pro z taková, že $z^3=-1$ naopak máme $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ která diverguje podle integrálního kritéria, neboť

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln|\ln x|\Big]_2^{\infty}=\infty-\ln\ln 2=\infty$$

Nyní pro $|z|=1$ ostatní máme $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi\neq-\pi,-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3}$ a dostaneme řadu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}n\varphi}$$

na kterou aplikujeme Dirichletovo kritérium pro posloupnosti $\frac{1}{n \ln n}$ ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$) a $(-1)^n \mathrm{e}^{3\mathrm{i}n\varphi}$, která má ohraničenou posloupnost částečných součtů

$$\left|\sum_{i=2}^{n}(-1)^i \mathrm{e}^{3\mathrm{i}i\varphi}\right| = \left|\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\varphi}\frac{1+(-1)^n\mathrm{e}^{3\mathrm{i}n\varphi}}{1+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}}\right| \leq \frac{2}{|1+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}|} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(1+\cos 3\varphi)^2+\sin^2 3\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 3\varphi}} = \frac{1}{\left|\cos\frac{3\varphi}{2}\right|}$$

tudíž řada zde konverguje. Všimněme si, že zlomek na konci je definován jen pro $\frac{3\varphi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tedy přesně pro $\varphi \neq -\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$, tedy $z^3 = -1$.

Celkem řada konverguje na $\overline{K(0,1)} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Absolutně konverguje pouze na $K(0,1)$. △

Úloha 4.10. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$

Řešení. Platí $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Odtud derivováním

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$
$$z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{z}{(1-z)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

△

Úloha 4.11. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^n$.

Řešení. Platí $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \frac{1}{1+z}$. Odtud derivováním

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1} = -\frac{1}{(1+z)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n} = -\frac{z}{(1+z)^2}$$

△

Úloha 4.12. Ukažte, že funkční (nikoli mocninná) řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2+z^n+z^{5n}}$$

konverguje na $K(0,1)$.

Řešení. Protože $|z| \leq 1$, platí

$$\begin{aligned} \left|z^n + z^{5n}\right| &\leq |z|^n + |z|^{5n} \leq 2\,|z| \\ -\left|z^n + z^{5n}\right| &\geq -2\,|z| \end{aligned} \tag{4.1}$$

a odtud

$$\left|2 + z^n + z^{5n}\right| \geq \left|2 - \left|z^n + z^{5n}\right|\right| = 2 - \left|z^n + z^{5n}\right| \overset{(4.1)}{\geq} 2 - 2\,|z| \tag{4.2}$$

pak

$$\left|\frac{z^{2n}}{2 + z^n + z^{5n}}\right| \overset{(4.2)}{\leq} \frac{|z|^{2n}}{2(1 - |z|)}$$

takže

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^{2n}}{2 + z^n + z^{5n}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{2(1 - |z|)} = \frac{|z|^2}{2(1 - |z|)^2(1 + |z|)} < \infty$$

a řada na $K(0,1)$ skutečně (absolutně) konverguje. △

Úloha 4.13. Ukažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n}\right)$$

konverguje pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Ukažte, že konvergence je stejnoměrná na libovolné kompaktní množině v $\mathbb{C}$ neobsahující žádné $z \in \mathbb{N}$.

Řešení. Pro $z = 0$ je úloha triviální, máme pouze nulovou řadu. Dále

$$\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} = -\frac{z}{n^2\left(1 - \frac{z}{n}\right)}$$

Pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\left|\frac{z}{n}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Pro libovolné $n \geq n_0$ máme

$$\left|\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{z}{n^2\left(1 - \frac{z}{n}\right)}\right| \leq \frac{|z|}{n^2\left(1 - \frac{|z|}{n}\right)} < \frac{2\,|z|}{n^2} \tag{4.3}$$

Proto řada konverguje absolutně. Nechť K je kompaktní množina bez bodů z $\mathbb{N}$. Tu lze vložit do uzavřené množiny

$$K_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\} \setminus \bigcup_{j=1}^{\lfloor R \rfloor}\{z \in \mathbb{C} \mid |z - n_j| < \varepsilon_j\}$$

kde bereme $R \notin \mathbb{N}$ a n_j jsou taková, že $|n_j| < R$ a $\varepsilon_j > 0$ jsou dostatečně malá. Vezměme N_0 takové, že $\frac{R}{N_0} \leq \frac{1}{2}$ a napišme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

pro nějaké $N \geq N_0$. První suma je konečná a má konečný součet, neboť v K nejsou přirozená čísla menší než R. Z (4.3) vidíme, že členy druhé strany jsou ohraničeny výrazem $\frac{2R}{n^2}$, a tedy tato řada konverguje stejnoměrně na K_0, tudíž i na K. △

Úloha 4.14. Najděte řadu takovou, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$$

konverguje pro každé $k \in \mathbb{N}$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^k$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$ diverguje.

Řešení. Takovou řadou je například řada s $z_n = \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\varphi n}}{\ln(n+1)}$. △

Úloha 4.15. Nechť $z_n \in \mathbb{C}$ takové, že $\Re(z_n) \geq 0$, $\sum z_n$ konverguje, $\sum z_n^2$ konverguje. Ukažte, že pak i $\sum |z_n|^2$ konverguje. Dejte protipříklad, pokud z_n může mít i zápornou reálnou část.

Řešení. Nechť $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$. Pak $x_n \geq 0$, a tedy

$$\sum x_n \text{konverguje, pak} \sum x_n^2 < \infty \tag{4.4}$$

neboť $x_n^2 \leq x_n < 1$ pro dostatečně velká n (konvergence implikuje $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$). Protože $\sum z_n^2$ konverguje konverguje i

$$\sum \Re(z_n^2) = \sum (x_n^2 - y_n^2) < \infty$$

a tedy také řada

$$-\sum (x_n^2 - y_n^2) + 2\sum x_n^2 = \sum (x_n^2 + y_n^2) = \sum |z_n|^2$$

konverguje.

Kdyby $\Re(z_n)$ byla libovolná, pak by (4.4) nemusela platit. Např. pro $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\sum x_n$ konverguje (Leibnitzovo kritérium), ale $\sum x_n^2$ je harmonická řada, která diverguje.

Obecněji, pro $z_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ pro $\varphi \in \mathbb{R}$ takové, že ani φ ani 2φ nejsou násobky 2π (např. $\varphi = \frac{\pi}{4}$), pak opět $\sum z_n$ konverguje a

$$\sum z_n^2 = \sum \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\varphi}}{n}$$

konverguje. Ovšem $|z_n| = \frac{1}{n}$ a $\sum |z_n|$ diverguje. △

Kapitola 5

Elementární funkce

5.1 Lineární a lineární lomená funkce

Úloha 5.1. Geometricky interpretujte lineární a lineární lomenou funkci (zejména kruhové inverze) jako zobrazení komplexní roviny na sebe.

Řešení. Lineární funkcí rozumíme zobrazení $f\colon \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ dané vztahem

$$f(z) = az + b \tag{5.1}$$

kde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{C}$ jsou daná čísla. Pak zřejmě $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ a $f(\infty) = \infty$ a f je holomorfní na $\mathbb{C}$. Můžeme psát $az + b = |a| \frac{a}{|a|} z + b$ neboli $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde

$$f_1(z) := \frac{a}{|a|} z \qquad f_2(z) := |a|\, z \qquad f_3(z) := b + z$$

tj. můžeme psát f jako složení tří „jednodušších“ zobrazení. Jaký je tedy jejich geometrický význam?

i) Zřejmě $|f_1(z)| = |z|$ a $\arg \frac{a}{|a|} = \arg a$. Je-li $\alpha \in \operatorname{Arg} a$ a $\beta \in \operatorname{Arg} z$, pak $\alpha + \beta \in \operatorname{Arg} f_1(z)$, takže f_1 je *rotace* v $\mathbb{C}$ o úhel α. Navíc $f_1(\infty) = \infty$.

ii) Zobrazení f_2 přiřazuje bodu $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ bod $|a|\, x + \mathrm{i}\, |a|\, y$, tj. f_2 je *homotetií* (stejnolehlostí) se středem v počátku a koeficientem $|a|$. Kromě toho opět $f_2(\infty) = \infty$.

iii) Zobrazení f_3 přiřazuje bodu $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ bod $x + \Re(b) + \mathrm{i}\,(y + \Im(b))$, tedy je to *translace* (posunutí) v $\mathbb{C}$ určená vektorem $b = (\Re(b), \Im(b))^T$. A zase $f_3(\infty) = \infty$.

Tedy lineární zobrazení $f\colon \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ vyjádřené vztahem (5.1) se skládá z rotace o úhel $\alpha \in \operatorname{Arg} a$, homotetie s koeficientem $|a|$ a translace o vektor b.

Lineární lomená funkce $f\colon \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ je určena vztahem

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

pro $z \in \mathbb{C}$, kde a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ jsou daná čísla splňující $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ (jinak máme konstantní funkci). Pro $c = 0$ máme lineární zobrazení. Pro $c \neq 0$ definujeme $f\left(-\frac{d}{c}\right) := = \lim_{z \to -\frac{d}{c}} f(z) = \infty$ a zároveň $f(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$. Funkce f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Snadno (přímým výpočtem) se můžeme přesvědčit, že složení dvou lineárně lomených funkcí je opět lineárně lomená funkce, tj. máme-li

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad\qquad g(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$$

je

$$f(g(z)) = \frac{a\frac{Az+B}{Cz+D} + b}{c\frac{Az+B}{Cz+D} + d} = \frac{a(Az+B) + b(Cz+D)}{c(Az+B) + d(Cz+D)} = \frac{(aA+bC)z + aB + bD}{(cA+dC)z + cB + dD}$$

Podobně je f^{-1} opět lineární lomená funkce.

$$\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{cz+d} \\ (cz+d)w &= az+b \\ z(cw-a) &= -dw+b \\ z &= -\frac{dw+b}{cw-a} \end{aligned}$$

Lineární lomená funkce je homeomorfismem $\tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ (tj. spojitou otevřenou bijekcí). Je-li $c \neq 0$, pak

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$$

a $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde

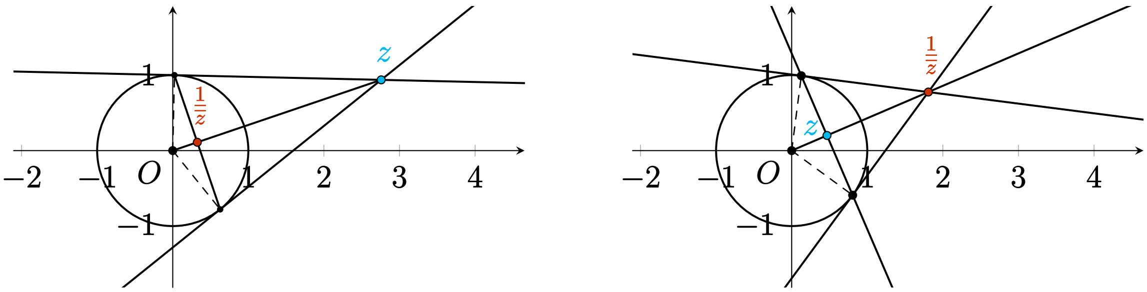
$$f_1(z) = cz+d \qquad\qquad f_2(z) = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$f_3(z) = \overline{z} \qquad\qquad f_4(z) = \left(b - \frac{ad}{c}\right) z + \frac{a}{c}$$

Zobrazení f_1 a f_4 jsou lineární, f_3 je symetrie vzhledem k reálné ose a f_4 je tzv. *kruhová inverze*. Jaký je geometrický význam kruhové inverze?

Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je $|f_2(z)|\,|z| = 1$, pro $\alpha \in \operatorname{Arg} z$ je $-\alpha \in \operatorname{Arg} \frac{1}{z}$, takže $\alpha \in \operatorname{Arg} f_2(z)$. Kromě toho $f_2(0) := \infty$ a $f_2(\infty) := 0$. Pro body $z \in \partial K(0,1)$ (tj. na jednotkové kružnici) máme $f_2(z) = z$. Odtud tedy již snadno vidíme, že body z a $f_2(z)$ jsou symetrické vzhledem k jednotkové kružnici $\partial K(0,1)$. Jak $f_2(z)$ získat pouze pomocí pravítka a kružítka? Návod je na obrázku 5.1.

Zobrazení zprostředkované lineární lomenou funkcí se nazývá *homografická* (též Möbiova) *transformace* (nebo jen homografie). Platí např., že obrazem zobecněné kružnice



(a) Bod z leží vně kružnice.

Postup konstrukce:

1) polopřímka z počátku procházející bodem z
2) tečny k $\partial K(0,1)$ procházející bodem z
3) určení bodů dotyku – to je průnik tečny a kolmice k tečně procházející počátkem
4) bod $\frac{1}{\bar{z}}$ leží v průniku spojnice bodů dotyku 3) a 1)

(b) Bod z leží uvnitř kružnice.

Postup konstrukce:

1) polopřímka z počátku procházející bodem z
2) kolmice na 1) z bodu z
3) spojnice průsečíků 2) a $\partial K(0,1)$ (tj. nalezení bodů dotyku) s počátkem
4) kolmice na 3) (tj. tečny)
5) bod $\frac{1}{\bar{z}}$ je průsečík přímek 4)

Jedná se vlastně o zpětný postup k 5.1a, protože $f_2(f_2(z)) = z$.

Obrázek 5.1: Konstrukce kruhové inverze bodu z pomocí pravítka a kružítka.

skrze f je opět zobecněná kružnice (a zejména je to přímka tehdy, a jen tehdy, obsahuje-li výchozí zobecněná kružnice bod $-\frac{d}{c}$). $\triangle$

Úloha 5.2. Určete obraz

a) kružnice, na níž leží body $-\mathrm{i}$, i a 1, v zobrazení $f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$;

b) množiny $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 1\}$ v zobrazení $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

Řešení.

a) Hledáme obraz jednotkové kružnice, což bude opět zobecněná kružnice. Stačí určit, kam se zobrazí body, které určují původní kružnici. Máme $f(-\mathrm{i}) = 0$, $f(\mathrm{i}) = \infty$ a $f(1) = \mathrm{i}$. Obrazem tedy bude přímka obsahující body 0, i a ∞, což je imaginární osa.

b) Uvádíme dva postupy řešení.

i) Hledáme obraz zobecněné kružnice v lineární lomené funkci $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, bude jím zobecněná kružnice. Na její určení zobrazíme tři body:

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathrm{i} &\mapsto \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1} &&= \mathrm{i} \\ f\colon \quad 1+\mathrm{i} &\mapsto \frac{1+\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}+1} &&= \frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i} \\ f\colon -1+\mathrm{i} &\mapsto \frac{-1+\mathrm{i}-1}{-1+\mathrm{i}+1} &&= \frac{\mathrm{i}-2}{\mathrm{i}} = 1+2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Tudíž obrazem přímky $\Im(z) = 1$ bude kružnice. Nalezneme její střed $x_0 + \mathrm{i}y_0$ a poloměr r pomocí řešení soustavy rovnic pro středový tvar kružnice

$$\left.\begin{aligned} x_0^2 + (1-y_0)^2 &= r^2 \\ \left(\frac{1}{5} - x_0\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y_0\right)^2 &= r^2 \\ (1-x_0)^2 + (2-y_0)^2 &= r^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1 &= r^2 \\ x_0^2 - \frac{2}{5}x_0 + \frac{1}{25} + y_0^2 - \frac{4}{5}y_0 + \frac{4}{25} &= r^2 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 4y_0 + 4 &= r^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0^2 - \frac{2}{5}x_0 + \frac{1}{25} - x_0^2 + y_0^2 - \frac{4}{5}y_0 + \frac{4}{25} - y_0^2 + 2y_0 - 1 &= 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 - x_0^2 + y_0^2 - 4y_0 + 4 - y_0^2 + 2y_0 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{2}{5}x_0 + \frac{6}{5}y_0 - \frac{4}{5} &= 0 \\ -2x_0 - 2y_0 + 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -2x_0 + 6y_0 &= 4 \\ -2x_0 - 2y_0 &= -4 \end{aligned}\right\}$$

$$8y_0 = 8 \quad \}$$

a odtud zpětným dosazováním $x_0 = 1$ a $r = 1$. Obrazem je tedy kružnice $|z - 1 - \mathrm{i}| = 1$.

ii) Převedeme si f do kanonického tvaru

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1} = \frac{z+1-2}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

a vyjádříme si ji jako složené zobrazení. Postupně zobrazujeme množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 1\}$

$$\{\Im(z) = 1\} \overset{z+1}{\mapsto} \{\Im(z) = 1\} \overset{\frac{2}{z}}{\mapsto} \{|z+\mathrm{i}| = 1\} \overset{-z}{\mapsto} \{|z-\mathrm{i}| = 1\} \overset{z+1}{\mapsto} \{|z-1-\mathrm{i}| = 1\}$$

kde při zobrazování v $\frac{2}{z}$ jsme zobrazili body $\mathrm{i} \mapsto -2\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i} \mapsto 1-\mathrm{i}$ a $-1+\mathrm{i} \mapsto -1-\mathrm{i}$ a odtud je vidět, že obrazem je kružnice se středem v $-\mathrm{i}$ a poloměrem 1.

Množina $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 1\}$ se tedy zobrazí na $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - \mathrm{i}| = 1\}$.

△

5.2 Exponenciální funkce

Úloha 5.3. Vypočtěte hodnotu $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}\pi}$.

Řešení. $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^1(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = \mathrm{e}(-1+0\mathrm{i}) = -\mathrm{e}$ △

Úloha 5.4. Zobrazte ve funkci e^z množiny všech $z \in \mathbb{C}$ takových, že

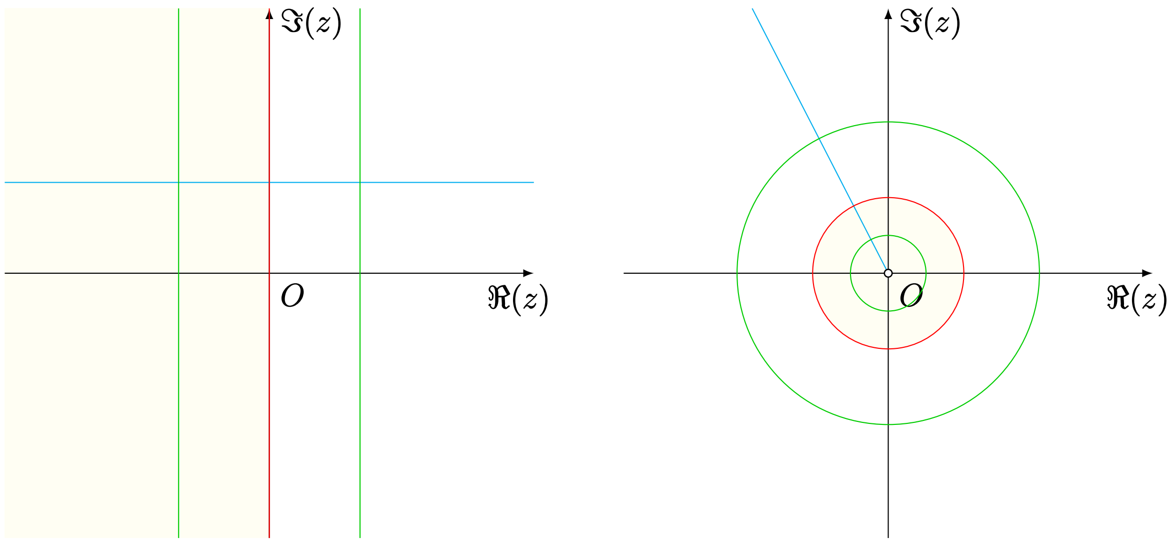
1. $\Im(z) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$
2. $\Re(z) = 0$ (tj. osu $\Im(z)$)
3. $\Re(z) = C$, kde
   (a) $C > 0$
   (b) $C < 0$
4. $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\alpha < 0$ a $\beta \in \mathbb{R}$

Řešení. Připomínáme, že $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$, tj. funkce e^z přiřadí číslu $x + \mathrm{i}y$ číslo w, kde $|w| = \mathrm{e}^x$ a $y \in \operatorname{Arg} w$.

1. Prvky $\Im(z) = C$, $C \in \mathbb{R}$, mají tvar $x + \mathrm{i}C$, $x \in \mathbb{R}$. Tudíž absolutní hodnota obrazu bude libovolná kladná e^x, argument bude vždy stejný C. Obrazem bude polopřímka z počátku, která s kladnou poloosou x svírá úhel C, množina $\mathbb{R}^+(\cos C + \mathrm{i}\sin C)$.
2. $\Re(z) = 0$ (tj. osu $\Im(z)$) tvoří $\mathrm{i}y$, $y \in \mathbb{R}$. Tyto body se zobrazí na $\mathrm{e}^0(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$, jednotkovou kružnici.
3. $\Re(z) = C$, kde
   (a) $C > 0$
   (b) $C < 0$

   Tyto body se zobrazí na kružnice s poloměrem e^C, který bude v 3a větší než 1 a v 3b menší než 1.
4. $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\alpha < 0$ a $\beta \in \mathbb{R}$ se zobrazí na $K(0,1) \setminus \{0\}$.

Náčrty množin se nacházejí na obrázku 5.2. △



(a) Vzorové množiny (b) Obrazy množin

Obrázek 5.2: Náčrt množin vzorových (5.2a) a jejich obrazů (5.2b) v zobrazení e^z. Množina a její obraz jsou zaznačeny stejnou barvou (ve cvičení 5.4: 1. modře, 2. červeně, 3. zeleně a 4. vyplněné žlutě).

5.3 Goniometrické a hyperbolické funkce

Úloha 5.5. Vypočtěte

a) $\cos(2+\mathrm{i})$

b) $\sin 2\mathrm{i}$

c) $\sinh(1-\mathrm{i})$

d) $\cosh(-1-\mathrm{i})$

Řešení.

a)

$$\begin{aligned}\cos(2+\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-1+2\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{1-2\mathrm{i}}}{2} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-1}(\cos 2+\mathrm{i}\sin 2)+\mathrm{e}(\cos 2-\mathrm{i}\sin 2)}{2} = \\ &= \frac{\cos 2+\mathrm{i}\sin 2+\mathrm{e}^2\cos 2-\mathrm{e}^2\mathrm{i}\sin 2}{2\mathrm{e}} = \frac{1+\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}}\cos 2+\mathrm{i}\frac{1-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}}\sin 2\end{aligned}$$

b)

$$\sin 2\mathrm{i} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\frac{1-\mathrm{e}^4}{2\mathrm{e}^2} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^4-1}{2\mathrm{e}^2}$$

c)

$$\begin{aligned}\sinh(1-\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})}}{2} = \frac{\mathrm{e}(\cos 1-\mathrm{i}\sin 1)-\mathrm{e}^{-1}(\cos 1-\mathrm{i}\sin 1)}{2} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^2(\cos 1-\mathrm{i}\sin 1)-(\cos 1+\mathrm{i}\sin 1)}{2\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}\cos 1-\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}}\sin 1\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\cosh(-1-\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{e}^{-1-\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-1}(\cos 1-\mathrm{i}\sin 1)+\mathrm{e}(\cos 1+\mathrm{i}\sin 1)}{2} = \\ &= \frac{\cos 1-\mathrm{i}\sin 1+\mathrm{e}^2(\cos 1+\mathrm{i}\sin 1)}{2\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}\cos 1+\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}\sin 1\end{aligned}$$

△

Úloha 5.6. Vyřešte $\sin z = 2$.

Řešení. Uvažme $z = x + \mathrm{i}y$. Řešíme rovnici pro x a y

$$\sin(x+\mathrm{i}y) = \sin(x)\cos(\mathrm{i}y)+\cos(x)\sin(\mathrm{i}y) = \sin x\cosh y+\mathrm{i}\cos x\sinh y = 2+0\mathrm{i}$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sin x\cosh y &= 2\\ \cos x\sinh y &= 0\end{aligned}$$

Nejprve řešíme $\cos x\sinh y = 0$ právě tehdy, když $\cos x = 0$ nebo $\sinh y = 0$.

- Pokud $\sinh y = 0$, pak $y = 0$ a $\cosh y = 1$ a $\sin x = 2$, což není možné.
- Pokud $\cos x = 0$, pak $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pak $\sin x = (-1)^k$ a $(-1)^k\cosh y = 2$ řešíme rovnici

  $$\begin{aligned}\cosh y &= (-1)^k 2\\ \frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2} &= (-1)^k 2\\ 0 \le \mathrm{e}^y+\frac{1}{\mathrm{e}^y} &= (-1)^k 4\end{aligned}$$

  odtud k musí být sudé, tj. $x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$

  $$\mathrm{e}^{2y}-4\mathrm{e}^y+1 = 0$$

  substituce $p = \mathrm{e}^y$

  $$p^2-4p+1 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

zpětná substituce

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^y &= 2 \pm \sqrt{3} \\ y &= \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Dohromady máme $z = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. △

Úloha 5.7. Vyřešte $\sinh z = \mathrm{i}$.

Řešení. Vezměme $z = x + \mathrm{i}y$. Pak

$$\begin{aligned} \sin z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) - \mathrm{e}^{-x}(\cos y - \mathrm{i}\sin y)\Big) = \\ = \sinh x \cos y + \mathrm{i}\cosh x \sin y = 0 + 1\mathrm{i} \end{aligned}$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sinh x \cos y &= 0 \\ \cosh x \sin y &= 1 \end{aligned}$$

Řešíme $\sinh x \cos y = 0$, tedy musí nastat jedna z možností

- $\sinh x = 0$, pak $\cosh x = 1$, tudíž musí být $\sin y = 1$ a $y \in \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos y = 0$, pak $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ a $\sin y = (-1)^k$. Musí platit $\cosh x = (-1)^k$, což může být jedině pro k sudé. Řešíme

$$\begin{aligned} \cosh x &= 1 \\ \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} &= 1 \\ \mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x} &= 2 \end{aligned}$$

substituce $p = \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} p + \frac{1}{p} &= 2 \\ p^2 - 2p + 1 &= 0 \\ (p-1)^2 &= 0 \\ p_{1,2} &= 1 \end{aligned}$$

zpětnou substitucí $x = \ln p$

$$x = \ln 1 = 0$$

Dohromady máme $(x, y) = \left(0, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, tj. $z = \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. △

Úloha 5.8. S využitím komplexní funkce e^z dokažte

$$\frac{1}{2} + \cos z + \cdots + \cos nz = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{1}{2}z}$$

Řešení. Platí $\cos jz = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}jz}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jz}}{2}$, takže

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n}\cos jz = \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jz} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nz}\sum_{j=0}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jz} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nz}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)z}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)z}}{2\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}z}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}z}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{1}{2}z}$$

△

Úloha 5.9 (Putnamova soutěž, 46. ročník, 1985, úloha A5)**.** Nechť

$$I_m := \int_0^{2\pi}\cos(x)\cdot\cos(2x)\cdot\cdots\cdot\cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

Pro která $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ je $I_m \neq 0$?

Řešení. Jelikož $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, máme dle Moivrovy věty

$$I_m = \int_0^{2\pi}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2}\right)\mathrm{d}x = 2^{-m}\sum_{\varepsilon_k=\pm1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\cdots+m\varepsilon_m)x}\,\mathrm{d}x$$

kde suma probíhá přes 2^m m-tic $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ pro $\varepsilon_k = \pm1$. Pro $t \in \mathbb{Z}$ je

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & t = 0 \\ \frac{1}{\mathrm{i}t}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right]_0^{2\pi} = 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Tudíž $I_m \neq 0$ právě tehdy, když pro nějaká $\varepsilon_k = \pm1$ máme

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + m\varepsilon_m = 0$$

V takovém případě potom

$$0 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + m\varepsilon_m \equiv 1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2} \pmod 2$$

a tedy $m(m+1) \equiv 0 \pmod 4$, z čehož máme $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 3 \pmod 4$. Konkrétně, je-li $m \equiv 0 \pmod 4$, pak

$$0 = (1-2-3+4) + (5-6-7+8) + \cdots + ((m-3)-(m-2)-(m-1)+m)$$

a je-li $m \equiv 3 \pmod 4$, pak

$$0 = (1+2-3)+(4-5-6+7)+(8-9-10+11)+\cdots+((m-3)-(m-2)-(m-1)+m)$$

Proto $I_m \neq 0$ právě tehdy, když $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 3 \pmod 4$. Toto je splněno pouze pro $m \in \{3,4,7,8\}$.

Alternativně lze úlohu řešit (zde pouze naznačíme) přes Fourierovy řady. Funkce

$$f(x) := \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cdots \cdot \cos(mx)$$

je spojitá a 2π-periodická, takže

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Pak tedy hledáme m tak, aby $a_0 \neq 0$. Podobným způsobem jako výše můžeme ukázat, že

i) $b_k = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a

ii) $a_j = \frac{p}{2^{m-1}}$, kde p je počet způsobů, kolika lze j vyjádřit jako součet

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + m\varepsilon_m = 0$$

kde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1$,

proto pouze konečně mnoho a_j je nenulových a platí

$$a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$$

△

Úloha 5.10. Zobrazte funkcí $\sin z$ množiny všech $z \in \mathbb{C}$ takových, že

1. $\Re(z) = \frac{\pi}{2}$, $\Im(z) \geq 0$
2. $\Re(z) = -\frac{\pi}{2}$, $\Im(z) \leq 0$
3. $\Re(z) = 0$ (tj. osu $\Im(z)$)
4. $\Re(z) = C$, kde
   (a) $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
   (b) $C \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$
5. $\Im(z) = C$, kde
   (a) $C > 0$ a $\Re(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(b) $C < 0$ a $\Re(z) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

6. $\Im(z) = 0$ a $\Re(z) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (tj. interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

Řešení.

1. $\Re(z) = \frac{\pi}{2}$, $\Im(z) \geq 0$

   Platí $\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y$. Zde máme $z = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}y$, $y \geq 0$. Proto $\Im(\sin z) = 0$ ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$) a $\Re(\sin(z)) = \sin \frac{\pi}{2} \cosh y = \cosh y$. Obrazem bude reálný interval $[1, \infty)$ (obor hodnot reálného hyperbolického kosinu).

2. $\Re(z) = -\frac{\pi}{2}$, $\Im(z) \leq 0$

   Obdobně jako v 1 máme $z = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}y$, $y \leq 0$, takže $\sin z = \sin -\frac{\pi}{2} \cosh y + \mathrm{i} \cos -$ $-\frac{\pi}{2} \sin y = -\cosh y$. Obrazem bude reálný interval $(-\infty, -1]$.

3. $\Re(z) = 0$ (tj. osu $\Im(z)$)

   Máme čísla tvaru $z = \mathrm{i}y$, $y \in \mathbb{R}$, tj. $\sin \mathrm{i}y = \sin 0 \cosh y + \mathrm{i} \cos 0 \sinh y = \mathrm{i} \sinh y$. Obrazem bude $\mathrm{i}\mathbb{R}$ (kde $\mathbb{R}$ je obor hodnot reálného hyperbolického sinu), tedy imaginární osa $\Im(z)$.

4. $\Re(z) = C$, kde

   (a) $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

   (b) $C \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

   V obou případech dostaneme $\sin(C+\mathrm{i}t) = \sin C \cosh t + \mathrm{i} \cos C \sinh t$, v $\mathbb{R}^2$ pak dvojici $(\sin C \cosh t, \cos C \sinh t)$. Toto je parametrizace hyperboly

   $$\frac{x^2}{\sin^2 C} - \frac{y^2}{\cos^2 C} = 1$$

   se středem v $(0, 0)$ a hlavní poloosou $|\sin C|$, přičemž v 4a máme $\sin C < 0$ a v 4b $\sin C > 0$ (vždy $\cos C > 0$). V 4a máme tedy rameno hyperboly s $x < 0$, v 4b pak to druhé. Pokud se konstanty C v 4a a 4b liší i v absolutní hodnotě, dostaneme dvě ramena různých hyperbol, ale vždy bude to v 4a „nalevo“ od $\Im(z)$ a naopak.

5. $\Im(z) = C$, kde

   (a) $C > 0$ a $\Re(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

   (b) $C < 0$ a $\Re(z) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

V obou případech máme $\sin(t + iC) = \cosh C \sin t + i \sinh C \cos t$, ekvivalentem v $\mathbb{R}^2$ budou body $(\cosh C \sin t, \sinh C \cos t)$, tj. parametrizaci elipsy

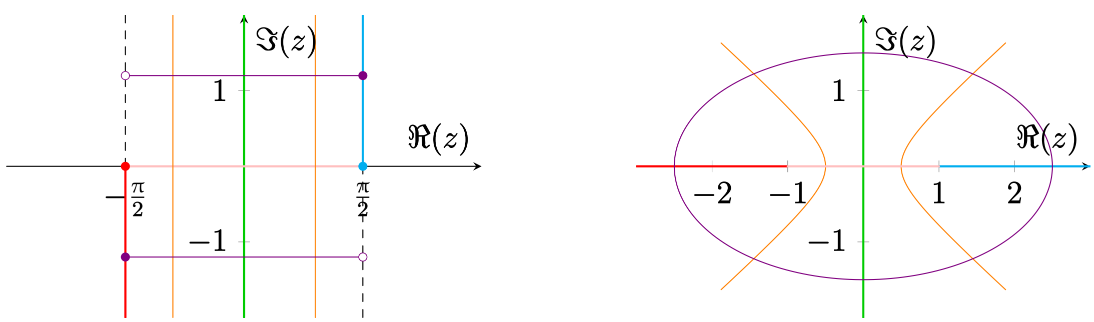
$$\frac{x^2}{\cosh^2 C} + \frac{y^2}{\sinh^2 C} = 1$$

se středem v $(0, 0)$ a hlavní poloosou $\cosh C$ (ten (reálný) je vždy absolutně větší než hyperbolický sinus). Celá elipsa však bude obrazem obou množin (pokud se jejich konstanty C liší pouze znaménkem, jinak dostaneme „horní" a „dolní" části dvou elips). V 5a máme ty body elipsy, které mají y-ovou souřadnici kladnou společně s bodem $(\cosh C, 0)$, naopak v 5b máme body se zápoornou y-ovou souřadnicí a bod $(-\cosh C, 0)$.

6. $\Im(z) = 0$ a $\Re(z) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (tj. interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)

   Komplexní sinus se na reálné ose shoduje se sinem reálným, tudíž obrazem bude $[-1, 1]$.

Náčrty zobrazovaných množin jsou podobně jako v cvičení 5.4 zobrazeny na obrázku 5.3. △



(a) Vzorové množiny (b) Obrazy množin

Obrázek 5.3: Náčrt množin vzorových 5.3a a jejich obrazů 5.3b v zobrazení $\sin z$. Množina a její obraz jsou značeny vždy stejnou barvou (ve cvičení 5.10: 1. modře, 2. červeně, 3. zeleně, 4. oranžově, 5. fialově a 6. růžově)

5.4 Logaritmus

Připomínáme definici komplexního logaritmu jako (úplné) inverze exponenciální funkce. Pro něj platí

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

a jeho hlavní větev určujeme vztahem

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

Úloha 5.11. Vypočtěte hlavní hodnoty (tj. s $\arg z \in [-\pi, \pi)$)

a) $\log \mathrm{i}$ d) $\log(-2+3\mathrm{i})$ g) $\log(2+3\mathrm{i})$

b) $\log \frac{1\pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ e) $\log(1+\mathrm{i})$ h) $\log\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$

c) $\log(2-3\mathrm{i})$ f) $\log(-2)$ *h) $\operatorname{Log}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$

Řešení.

a) $\log \mathrm{i} = \ln 1 + \mathrm{i} \arg \mathrm{i} = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$

b) $\log \frac{1\pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \ln 1 + \mathrm{i} \arg \frac{1\pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \pm \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$

c) $\log(2-3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{3} + \mathrm{i}\arg(2-3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{3} - \mathrm{i}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$

d) $\log(-2+3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{3} + \mathrm{i}\arg(-2+3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)$

e) $\log(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$

f) $\log(-2) = \ln 2 - \mathrm{i}\pi$

g) $\log(2+3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{3} + \mathrm{i}\arg(2+3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{3} + \mathrm{i}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$

h) $\log\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \ln 1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{3} = \mathrm{i}\frac{\pi}{3}$

*h) $\operatorname{Log}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \mathrm{i}\frac{\pi}{3} + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}$

△

Úloha 5.12. Ukažte následující identity pro funkci Log:

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \qquad \operatorname{Log}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2$$

$$\operatorname{Log}\frac{1}{z} = -\operatorname{Log} z \qquad \operatorname{Log} z^n = \underbrace{\operatorname{Log} z + \cdots + \operatorname{Log} z}_{n} \neq n \operatorname{Log} z$$

kde operace na pravé straně bereme množinové, tj. např. $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

Řešení. Uvažme $\operatorname{Log} \mathrm{e}^{\operatorname{Log} z} = I$. Protože platí $\operatorname{Log} \mathrm{e}^z = z + 2k\pi\mathrm{i}$, máme $\operatorname{Log} \mathrm{e}^{\operatorname{Log} z} = \log z + 2k\pi\mathrm{i}$ a tedy $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} z + 2k\pi\mathrm{i}$ a pak $I = \operatorname{Log} z$ ve smyslu množinové rovnosti.

V $\mathbb{R}$ platí $\ln \mathrm{e}^a = a$. Jaká je situace v $\mathbb{C}$? Již víme, že $\operatorname{Log} \mathrm{e}^z = z + 2k\pi\mathrm{i}$. Co pro jednoznačnou větev? Počítejme

$$\log \mathrm{e}^z = \ln|\mathrm{e}^z| + \mathrm{i}\arg \mathrm{e}^z \overset{z=x+\mathrm{i}y}{=} \ln \mathrm{e}^x + \mathrm{i}\arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}\arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} =$$

$$= x + \mathrm{i}\operatorname{Arg}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + 2\pi\mathrm{i}\left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{Arg}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}{2\pi}\right\rceil = x + \mathrm{i}y + 2\pi\mathrm{i}\left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{y}{2\pi}\right\rceil =$$

$$= z + 2\pi\mathrm{i}\left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\Im(z)}{2\pi}\right\rceil$$

protože $\operatorname{Arg} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ je číslo tvaru $A + 2k\pi$ pro $A \in [-\pi, \pi)$. Pak

$$-\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{Arg} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}{2\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{A}{2\pi} - \frac{2k\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{A}{2\pi} - k$$

a protože $A \in [-\pi, \pi)$, pak $\frac{A}{2\pi} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a $-\frac{1}{2} - \frac{A}{2\pi} \in (-1, 0]$ a tak $\left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{A}{2\pi} - k\right\rceil = -k$.

Tedy stejná idenitita jako v $\mathbb{R}$ platí pouze v případě, že $\Im(z) \in [-\pi, \pi)$. V opačném případě je třeba použít „jistý“ opravný výraz. Pro ověření uvažme např. $\log \mathrm{e}^{\log z}$. Pak $\log \mathrm{e}^{\log z} = \log z$ a současně (dle předchozího výpočtu)

$$\log \mathrm{e}^{\log z} = \log z + 2\pi\mathrm{i}\left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\Im(\log z)}{2\pi}\right\rceil = \log z + 2\pi\mathrm{i}\left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\arg z}{2\pi}\right\rceil = \log z$$

neboť $\Im(\log z) = \arg z \in [-\pi, \pi)$ a současně $-\frac{1}{2} - \frac{\arg z}{2\pi} \in (-1, 0]$, takže $\left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\arg z}{2\pi}\right\rceil = 0$.

Dále máme (díky identitám pro $\arg z$)

$$\begin{aligned}
\log(z_1 z_2) &= \log z_1 + \log z_2 + 2\pi\mathrm{i}N_+ \\
\log \frac{z_1}{z_2} &= \log z_1 - \log z_2 + 2\pi\mathrm{i}N_- \\
\log z^n &= n \log z + 2\pi\mathrm{i}N_n
\end{aligned}$$

kde

$$N_\pm := \begin{cases} -1 & \pi \le \arg z_1 \pm \arg z_2 \\ 0 & -\pi \le \arg z_1 \pm \arg z_2 < \pi \\ 1 & \arg z_1 \pm \arg z_2 < -\pi \end{cases} \qquad N_n := \left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{n}{2\pi}\arg z\right\rceil$$

zejména vezmeme-li poslední rovnost pro $n = -1$, máme $N_{-1} := \left\lceil -\frac{1}{2} + \frac{\arg z}{2\pi}\right\rceil$, což je -1 pro $\arg z = -\pi$ a 0 jinak, tudíž máme

$$\log \frac{1}{z} = \begin{cases} -\log z - 2\pi\mathrm{i} & z \in \mathbb{R}^- \\ -\log z & \text{jinak} \end{cases}$$

V $\mathbb{C}$ tedy již obecně neplatí známé $\ln x^p = p \ln x$, $x \ge 0$, $p \in \mathbb{R}$. Kdyby to platilo, bylo by $\log z^2 = \log(-z)^2$, $2\log z = 2\log -z$ a $\log z = \log -z$, což není pravda.

Tedy máme (stejně jako v $\mathbb{R}$)

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$$

pouze pokud $N_+ = 0$, tj. $\arg z_1 + \arg z_2 \in [-\pi, \pi)$, zejména toto platí pro z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$. Uvažme např. $1 + \mathrm{i}$ a $\frac{\mathrm{i}}{2}$. Pak

$$\log\left((1+\mathrm{i})\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \log\left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}$$

$$\log(1+\mathrm{i})+\log\frac{\mathrm{i}}{2}=\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\ln\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\ln 2-\ln 2+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}$$

ovšem pro $z_1=z_2=\frac{\mathrm{i}}{2}$ je $\arg z_1+\arg z_2=\pi$ a

$$\log\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\log-\frac{1}{4}=\ln\frac{1}{4}-\mathrm{i}\pi=-2\ln 2-\mathrm{i}\pi$$
$$\log\frac{\mathrm{i}}{2}+\log\frac{\mathrm{i}}{2}=-2\ln 2+\mathrm{i}\pi$$

takže se výsledky liší o $2\mathrm{i}\pi$. Ještě jedna (snad zajímavá) rovnost ilustrující vztah pro $\log\frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\pi=\mathrm{i}(-\pi)=\ln|1|+\mathrm{i}\arg(-1)=\log(-1)=\log(-1)^{-1}&=\\ =-\log(-1)-2\pi\mathrm{i}=-(-\mathrm{i}\pi)-2\pi\mathrm{i}=\mathrm{i}\pi-2\pi\mathrm{i}&=-\mathrm{i}\pi\end{aligned}$$

△

Úloha 5.13. Určeme všechna z taková, že

a) $\mathrm{e}^z=2+3\mathrm{i}$

b) $\mathrm{e}^{\overline{z}}=-3\mathrm{i}$

Řešení.

a) $\mathrm{e}^z=2+3\mathrm{i}$ pak $z=\mathrm{Log}(2+3\mathrm{i})=\ln\sqrt{3}+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(2+3\mathrm{i})=\frac{1}{2}\ln 3+\mathrm{i}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

b) $\mathrm{e}^{\overline{z}}=-3\mathrm{i}$ pak $\overline{z}=\mathrm{Log}-3\mathrm{i}=\ln 3+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-3\mathrm{i})=\ln 3+\mathrm{i}\frac{4k-1}{2}\pi$ a $z=\ln 3-\mathrm{i}\frac{4k-1}{2}\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

△

5.5 Obecná mocnina

Úloha 5.14. Za použití definičního vzorce $z^\alpha:=\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z}$ vypočtěte

a) 2^{i}

b) $1^{-\mathrm{i}}$

c) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathrm{i}}$

d) $\mathrm{i}^{\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}}$

e) i^{π}

f) i^{i}

g) $(-1)^{\mathrm{i}}$

h) $(3-4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$

i) $\mathrm{i}^{\frac{1}{\mathrm{i}}}$

Řešení.

a)
$$2^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln 2+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-2k\pi}(\cos\ln 2+\mathrm{i}\sin\ln 2)$$

b)
$$1^{-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}2k\pi)}=\mathrm{e}^{2k\pi}$$

c)

$$\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\,\mathrm{Log}\,\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+2k\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{8k-1}{4}+\frac{\pi}{4}-2k\pi} =$$
$$= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\left(\cos\frac{8k-1}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{8k-1}{4}\pi\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

d)

$$\mathrm{i}^{\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\right)\mathrm{Log}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\right)\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+2k\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi\sqrt{3}}{4}+\pi\mathrm{i}k\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}+2k\pi} =$$
$$= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\left(\cos\frac{(4k+1)\pi\sqrt{3}}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{(4k+1)\pi\sqrt{3}}{4}\right)$$

e)

$$\mathrm{i}^{\pi} = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{Log}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\pi\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+2k\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{4k+1}{2}\mathrm{i}\pi^2} = \cos\frac{4k+1}{2}\pi^2 + \mathrm{i}\sin\frac{4k+1}{2}\pi^2$$

f)

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+2k\mathrm{i}\pi\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{4k+1}{2}\pi}$$

g)

$$(-1)^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\mathrm{i}\pi+2k\mathrm{i}\pi)} = \mathrm{e}^{\pi-2k\pi}$$

h)

$$(3-4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\,\mathrm{Log}(3-4\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\left(\ln 5-\mathrm{i}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+2k\pi\mathrm{i}\right)} =$$
$$= \mathrm{e}^{\ln 5+\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}-2k\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} + 2k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\ln 5 - \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} + 2k\pi\right)\right) =$$
$$= 5\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}-2k\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\ln 5 - \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}\right)\right)$$

i)

$$\mathrm{i}^{\frac{1}{\mathrm{i}}} = \mathrm{i}^{-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+2k\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-2k\pi}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. △

Úloha 5.15. Vyšetřete vlastnosti obecných mocnin

a) z^{i} b) z^{π} c) $z^{\frac{2}{3}}$

Řešení.

a) z^{i}

Při pevném $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je z^{i} spočetná množina

$$z^{\mathrm{i}} = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln r + \mathrm{i}(\alpha + 2k\pi))} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

kde $r := |z|$ a $\alpha := \arg z$, tedy

$$z^{\mathrm{i}} = \left\{ \mathrm{e}^{-\alpha - 2k\pi - \mathrm{i} \ln r} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

takže $|z^{\mathrm{i}}| = \mathrm{e}^{-\alpha} \mathrm{e}^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\ln r \in \operatorname{Arg} z^{\mathrm{i}}$.

Při pevném $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ leží všechny hodnoty na polopřímce $\operatorname{Arg} w = \ln r$ a jejich absolutní hodnoty tvoří dvě geometrické posloupnosti s kvocienty $\mathrm{e}^{2\pi}$ a $\mathrm{e}^{-2\pi}$, takže konvergují k $+\infty$, respektive k nule. Při $r = 1$ jsou všechny tyto hodnoty reálné.

b) z^{π}

Množina z^{π} je spočetná pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pro $|z| = r$ a $\arg z = \alpha$ je

$$z^{\pi} = \left\{ \mathrm{e}^{\pi(\ln r + \mathrm{i}(\alpha + 2k\pi))} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ r^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha\pi + 2k\pi^2)} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Všechny hodnoty mocniny z^{π} leží při pevném $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ na kružnici $|w| = r^{\pi}$, kde $r = |z|$.

c) $z^{\frac{2}{3}}$

Množina $z^{\frac{2}{3}}$ je tříprvková. Je-li $|z| = r$, $\arg z = \alpha$, pak

$$z^{\frac{2}{3}} \left\{ r^{\frac{2}{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}(\alpha + 2k\pi)} \;\middle|\; k \in \{0, 1, 2\} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{r^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}(\alpha + 2k\pi)} \;\middle|\; k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

$\triangle$

Současně snadno nahlédneme, že platí

$$z^c = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p} = (\sqrt[q]{p})^p \tag{5.2}$$

Poznámka. Rovnost (5.2) již nemusí být splněna ve chvíli, kdy c není vyjádřeno pomocí nesoudělných čísel, tj. je-li $c = \frac{r}{s}$ pro nějaká (ne nutně nesoudělná) $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $s \in \mathbb{N}$, pak vždy platí

$$z^c = z^{\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[s]{z} \right)^r$$

zatímco již nemusí platit $z^c = \sqrt[s]{z^r}$, neboť výraz napravo může obsahovat více hodnot než q hodnot z^c (je jich až s).

Například počítejme

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2} \operatorname{Log} -4} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln 4 + \mathrm{i}\pi + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\ln 2 + \mathrm{i}(2k+1)\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{cases}$$

$$(-4)^{\frac{2}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{4}\operatorname{Log} -4} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln 4 + \mathrm{i}\pi + 2k\pi\mathrm{i})} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{cases}$$

Současně máme

$$\left(\sqrt[4]{-4}\right)^2 = \left((-4)^{\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\operatorname{Log} -4}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\ln 4 + \mathrm{i}\pi + 2k\pi\mathrm{i})}\right)^2 =$$
$$= \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}(4k+1)}\right)^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(4k+1)} = \begin{cases} 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{cases}$$

a tedy skutečně platí

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{2}{4}} = \left(\sqrt[4]{-4}\right)^2$$

Jenže

$$\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\operatorname{Log} 16} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\ln 16 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\ln 16}\mathrm{e}^{\frac{k\pi\mathrm{i}}{2}} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^0 = 2 \\ 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -2 \\ 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -2\mathrm{i} \end{cases}$$

tedy platí pouze $\left(\sqrt[4]{-4}\right)^2 \subset \sqrt[4]{(-4)^2}$.

Úloha 5.16. Jak je to s platností různých identit pro obecnou mocninnou funkci, které známe z $\mathbb{R}$? Nechť a, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Platí následující (množinové) rovnosti?

a) složení logaritmu a obecné mocniny $\operatorname{Log} z^c \stackrel{?}{=} c \operatorname{Log} z$

b) součin $z^a z^b \stackrel{?}{=} z^{a+b}$

c) roznásobení $(z_1 z_2)^a \stackrel{?}{=} z_1^a z_2^a$

d) skládání mocnin $(z^a)^b \stackrel{?}{=} z^{ab}$

Řešení.

a) Případ $c = n \in \mathbb{Z}$ jsme vyřešili u logaritmu ve cvičení 5.12. Dále máme

$$\operatorname{Log} z^c = \operatorname{Log} \mathrm{e}^{c \operatorname{Log} z} = \operatorname{Log} \mathrm{e}^{c(\log z + 2k\pi\mathrm{i})} = \operatorname{Log}\left(\mathrm{e}^{c\log z}\mathrm{e}^{2ck\pi\mathrm{i}}\right) \stackrel{\text{cvičení 5.12}}{=}$$
$$= \operatorname{Log} \mathrm{e}^{c\log z} + \operatorname{Log} \mathrm{e}^{2ck\pi\mathrm{i}} = c\log z + 2m\pi\mathrm{i} + 2ck\pi\mathrm{i} =$$
$$= c(\log z + 2k\pi\mathrm{i}) + 2m\pi\mathrm{i} = c\operatorname{Log} z + 2m\pi\mathrm{i} = c\left(\operatorname{Log} z + \frac{2m\pi\mathrm{i}}{c}\right)$$

pro libovolná k, $m \in \mathbb{Z}$. Tedy $\operatorname{Log} z^c = c \operatorname{Log} z$ právě tehdy, když $\frac{m}{c} \in \mathbb{Z}$ pro každé $m \in \mathbb{Z}$, tedy nutně musí být $c = \frac{1}{n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Jak dopadne úloha pro hlavní větev? Platí

$$\log z^c = \log \mathrm{e}^{c \log z} \overset{\text{cvičení 5.12}}{=} c \log z + 2\pi \mathrm{i} N_c$$

kde

$$N_c := \left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\Im(c \log z)}{2\pi} \right\rceil$$

protože

$$\Im(c \log z) = \Im(c \ln |z| + \mathrm{i} c \arg z) = \Re(c \arg z) + \Im(c \ln |z|)$$

a potřebujeme zajistit, aby imaginární část výrazu napravo byla v $[-\pi, \pi)$. Každopádně obecně již neplatí vztah známý z $\mathbb{R}$: $\ln x^p = p \ln x$ pro $x > 0$, $p \in \mathbb{R}$ (a to ani pro hlavní větev obecné mocniny), což již víme z cvičení 5.12.

b) Uvažme např. a, $b \in \mathbb{R}$ taková, že $a + b \in \mathbb{Z}$. Potom vlastně chceme, aby se více hodnot (konečně, spočetně mnoho) rovnalo jedné hodnotě. Obecně máme

$$\begin{aligned} z^a z^b &= \mathrm{e}^{a \operatorname{Log} z} \mathrm{e}^{b \operatorname{Log} z} = \mathrm{e}^{a(\log z + 2k\pi \mathrm{i})} \mathrm{e}^{b(\log z + 2m\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{(a+b) \log z} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(ka + mb)} \\ z^{a+b} &= \mathrm{e}^{(a+b) \operatorname{Log} z} = \mathrm{e}^{(a+b)(\log z + 2k\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{(a+b) \log z} \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}(a+b)} \end{aligned}$$

pro libovolná k, $m \in \mathbb{Z}$. Tedy

$$z^{a+b} \subseteq z^a z^b$$

přičemž tyto hodnoty mohou, ale nemusí, splývat v závislosti na číslech a, b. Tedy obecně neplatí $z^{a+b} = z^a z^b$.

Podobně

$$\begin{aligned} \frac{z^a}{z^b} &= \frac{\mathrm{e}^{a \operatorname{Log} z}}{\mathrm{e}^{b \operatorname{Log} z}} = \frac{\mathrm{e}^{a(\log z + 2k\pi \mathrm{i})}}{\mathrm{e}^{b(\log z + 2m\pi \mathrm{i})}} = \mathrm{e}^{(a-b) \log z} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(ka - mb)} \\ z^{a-b} &= \mathrm{e}^{(a-b) \operatorname{Log} z} = \mathrm{e}^{(a-b)(\log z + 2k\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{(a-b) \log z} \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}(a-b)} \end{aligned}$$

Tedy máme opět pouze

$$z^{a-b} \subseteq \frac{z^a}{z^b}$$

přičemž tyto hodnoty mohou, ale nemusejí, splývat. Tudíž obecně zase neplatí $z^{a-b} = \frac{z^a}{z^b}$. Je-li $a = b$, máme $z^0 = \mathrm{e}^{0 \operatorname{Log} z} = \mathrm{e}^0 = 1$ pro libovolné $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Požadovaná (množinová) rovnost nastane jistě pro $a = 0$, tj.

$$z^{-b} = \frac{1}{z^b} \tag{5.3}$$

Ovšem pozor

$$z^a z^{-a} = \mathrm{e}^{a \operatorname{Log} z} \mathrm{e}^{-a \operatorname{Log} z} = \mathrm{e}^{a(\operatorname{Log} z - \operatorname{Log} z)} = \mathrm{e}^{a \operatorname{Log} 1} = \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i} a}$$

pro $k \in \mathbb{Z}$. Tedy pokud $a \notin \mathbb{Z}$, pak $z^a z^{-a} \neq 1$, což ale není v rozporu s rovností (5.3), protože existuje alespoň jedna hodnota k (konkrétně $k = 0$) taková, že $z^a z^{-a} = 1$.

Uvážíme-li hlavní větev z^c, pak již platí

$$z^a z^b = \mathrm{e}^{a \log z} \mathrm{e}^{b \log z} = \mathrm{e}^{(a+b) \log z} = z^{a+b}$$
$$\frac{z^a}{z^b} = \frac{\mathrm{e}^{a \log z}}{\mathrm{e}^{b \log z}} = \mathrm{e}^{(a-b) \log z} = z^{a-b}$$
$$z^a z^{-a} = \mathrm{e}^{a \log z} \mathrm{e}^{-a \log z} = 1 z^0 = 1$$

pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pro splnění těchto identit stačí brát stejné větve logaritmu (tj. argumentu) na obou stranách. Např. uvážíme-li reálné exponenty (konkrétně $\frac{1}{2}$) a větve $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \\ 0 & z = 0 \end{cases} \qquad \sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & r > 0, \varphi \in [2\pi, 4\pi) \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

potom máme pro stejné větve

$$(-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

rovnost platnou, ovšem pro různé větve

$$(-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1 \neq -1 = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

již rovnost neplatí.

c) Množinově platí (díky cvičení 5.12)

$$(z_1 z_2)^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Log}(z_1 z_2)} = \mathrm{e}^{a(\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2)} = \mathrm{e}^{a \operatorname{Log} z_1} \mathrm{e}^{a \operatorname{Log} z_2} = z_1^a z_2^a$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Log} \frac{z_1}{z_2}} = \mathrm{e}^{a(\operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2)} = \mathrm{e}^{a \operatorname{Log} z_1} \mathrm{e}^{-a \operatorname{Log} z_2} = z_1^a z_2^{-a}$$

Pro hlavní větev máme

$$(z_1 z_2)^a = \mathrm{e}^{a \log(z_1 z_2)} = \mathrm{e}^{a(\log z_1 + \log z_2 + 2\pi\mathrm{i}aN_+)} = z_1^a z_2^a \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}aN_+}$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^a = \mathrm{e}^{a \log \frac{z_1}{z_2}} = \mathrm{e}^{a(\log z_1 - \log z_2 + 2\pi\mathrm{i}aN_-)} = z_1^a z_2^{-a} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}aN_-}$$

tedy požadovaná rovnost platí i bodově, je-li ovšem $N_\pm = 0$.

Uvažme nyní reálné exponenty. Potom platí $(z_1 z_2)^a = z_1^a z_2^a$, jestliže bereme takové hodnoty a-tých mocnin $z_1^a = |z_1|^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\psi_1}$, $z_2^a = |z_2|^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\psi_2}$ a $(z_1 z_2)^a = |z_1 z_2|^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\psi}$. kde $\psi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, $\psi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, $\psi \in \operatorname{Arg} z_1 z_2$, taková, že pro ψ_1, ψ_2 a ψ platí $\psi_1 + \psi_2 = \psi$. (to je přímý důsledek rovnosti $\mathrm{e}^u \mathrm{e}^v = \mathrm{e}^{u+v}$). Uvažme např. větev $\arg_0 z \in [0, 2\pi)$, tj. $\psi \in \operatorname{Arg} z_1 \cap [0, 2\pi)$ atd… Pak jistě $\psi_1 + \psi_2 = \psi$ obecně nemusí být splněno, a tedy ani požadovaná rovnost nemusí platit. Např. je-li $z_1 = z_2 = -\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{i}\pi}$, $\psi_1 = \psi_2 = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi)$, $\psi_1 + \psi_2 = 3\pi \notin [0, 2\pi)$, $\psi = 3\pi - 2\pi = \pi$. Zvolíme-li třeba $a = \frac{1}{3}$, pak

$$(-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}(-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \tag{5.4}$$

ovšem současně $(-\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, a tedy

$$((-\mathrm{i})(-\mathrm{i}))^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \neq -1$$

Všimněte si také, že rovnost (5.4) je v souladu s částí b), neboť

$$-1 = (-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}(-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = (-\mathrm{i})^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\frac{3}{2}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

d) Obecně platí

$$(z^a)^b = \left(\mathrm{e}^{a\,\mathrm{Log}\,z}\right)^b = \mathrm{e}^{b\,\mathrm{Log}\,\mathrm{e}^{a\,\mathrm{Log}\,z}} = \mathrm{e}^{b(a\,\mathrm{Log}\,z + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{ab\,\mathrm{Log}\,z}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}bk} = z^{ab}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}bk}$$

pro $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné. Tedy $z^{ab} \subseteq (z^a)^b$. Prvky z^{ab} a $(z^a)^b$ splývají právě tehdy, když $b \in \mathbb{Z}$, pak totiž $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}bk} = 1$. Např.

$$\left(\mathrm{i}^{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}} = \mathrm{i}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2k\pi} = \mathrm{i}^{-1}\mathrm{e}^{-2k\pi} = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2k\pi}$$

pro $k \in \mathbb{Z}$. Pro hlavní větev máme

$$(z^c)^b = \left(\mathrm{e}^{c\log z}\right)^b = \mathrm{e}^{b\log\mathrm{e}^{c\log z}} = \mathrm{e}^{b(c\log z + 2\pi\mathrm{i}N_c)} = \mathrm{e}^{bc\log z}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}bN_c} = z^{bc}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}bN_c}$$

Např. pro $z = b = c = \mathrm{i}$

$$N_c = \left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\Im(c\log z)}{2\pi}\right\rceil = \left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\Im(\mathrm{i}\log\mathrm{i})}{2\pi}\right\rceil = \left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\Im\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi}\right\rceil = \left\lceil -\frac{1}{2}\right\rceil = 0$$

a tedy

$$\left(\mathrm{i}^{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}} = \mathrm{i}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} = \mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$$

ovšem obecně již nemusí být $N_c = 0$ a vzorec tudíž nemusí platit.

Dále, je-li exponent z $\mathbb{R}$, pak např. pro první větev máme

$$\left((-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1$$

zatímco

$$\left((-\mathrm{i})^2\right)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \neq -1$$

takže už ani neplatí $(z^a)^b = \left(z^b\right)^a$. Dá se ukázat, že v tomto případě lze každou hodnotu z^{ab} zapsat jako nějakou hodnotu (mnohoznačné verze) $(z^a)^b$ a nějakou hodnotu $\left(z^b\right)^a$. Ovšem současně pro $z = 1$, $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, tj.

$$\begin{aligned}\left(1^2\right)^{\frac{1}{2}} &= 1^{\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}} = \pm 1\\ \left(1^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(\mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}}\right)^2 = \mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = 1\end{aligned}$$

tedy vidíme, že ne každá hodnota $(z^a)^b$(zde $(1^2)^{\frac{1}{2}} = \pm 1$) je hodnota z^{ab} (zde $1^{2\cdot\frac{1}{2}} = 1$).

△

Kapitola 6

Křivkový integrál a Cauchyho teorie

Připomínáme, že máme-li křivku

$$\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \ t \in [\alpha, \beta]$$

kde $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, definujeme integrál z funkce f podél křivky γ předpisem

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

Připomeneme ještě dvě význačně křivky

- přímka (úsečka) zadaná body z_1 a z_2 má parametrizaci $\gamma(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t$, $t \in \mathbb{R}$ (pro úsečku $t \in [0, 1]$),
- kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem r má parametrizaci $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

6.1 Výpočty integrálů přímo z definice

V následujících cvičeních počítejte integrály přímo podle definice (6.1), tj. nepoužívejte Cauchyho teorii.

Úloha 6.1. Vypočtěte

$$\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$$

kde γ je úsečka z -1 do 3.

Řešení. Máme parametrizaci $\gamma(t) = t$, $t \in [-1, 3]$. Pak $\overline{\gamma(t)} = t$ a $\gamma'(t) = 1$. Pak

$$\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^3 = 4$$

△

Úloha 6.2. Vypočtěte

$$\int_\gamma |z| \, \mathrm{d}z$$

kde γ je horní (jednotková) půlkružnice z 1 do -1 (viz obrázek 6.1).

Řešení. Máme parametrizaci $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 1]$. Pak $|\gamma(t)| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| \equiv 1$ a $\gamma'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ a

$$\int_\gamma |z| \, \mathrm{d}z = \int_0^\pi 1\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]_0^\pi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} - 1 = -2$$

△

Úloha 6.3. Vypočtěte

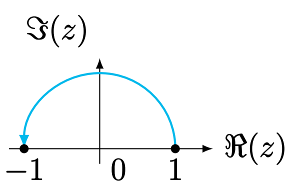
$$\int_\gamma |z| \, \overline{z} \, \mathrm{d}z$$

kde γ je horní půlkružnice od -1 do 1.

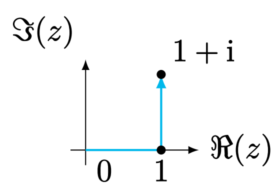
Řešení. Máme stejnou parametrizaci jako v úloze 6.2, přičemž parametrizace je opačně orientovaná a $|\gamma(t)| \, \overline{\gamma(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$. Pak

$$\int_\gamma |z| \, \overline{z} \, \mathrm{d}z = -\int_0^\pi 1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int_0^\pi \mathrm{d}t = -\mathrm{i}\pi$$

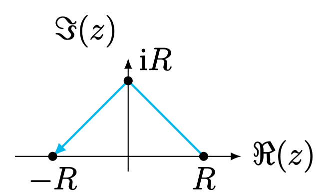
△



Obrázek 6.1: Horní půlružnice z 1 do -1



Obrázek 6.2: Lomená čára spojující body 0, 1, $1 + \mathrm{i}$.



Obrázek 6.3: Lomená čára mezi body R, $\mathrm{i}R$, $-R$ pro $R > 0$.

Úloha 6.4. Vypočtěte

$$\int_\gamma \Re(z) \, \mathrm{d}z$$

kde γ je lomená čára spojující body 0, 1, $1 + \mathrm{i}$ (viz obrázek 6.2).

Řešení. Křivka γ je složením γ_1 a γ_2, kde $\gamma_1(t) = t$ pro $t \in [0, 1]$ a $\gamma_2(t) = 1 + \mathrm{i}t$ pro $t \in [0, 1]$. Pak

$$\int_\gamma \Re(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \Re(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \Re(z) \, \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 t \cdot 1 \, \mathrm{d}t + \int_0^1 1 \cdot \mathrm{i} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + [\mathrm{i}t]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 + \mathrm{i} - 0 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}$$

△

Úloha 6.5. Vypočtěte

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

kde γ je kružnice se středem v z_0 a poloměrem r podle (6.1) a také jako křivkový integrál.

Řešení. Platí $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma'(t) = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Podle (6.1) máme

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}$$

Vypočtěme nyní hodnotu jako křivkový integrál, tj.

$$\int_{\gamma^*} (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_{\gamma^*} (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$$

kde $x = \Re(z)$, $y = \Im(z)$, $u = \Re(f)$, $v = \Im(f)$ a $\gamma^*(t) = \big(\Re(\gamma(t)), \Im(\gamma(t))\big)$. Pro jednoduchost uvažme $z_0 = 0$. Potom $\gamma(t) = r\cos t + r\mathrm{i}\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(z) = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$, $\gamma^*(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Tudíž $u = \frac{\cos t}{r}$ a $v = \frac{\sin t}{r}$. Pak

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{r}(-r\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} -\frac{\sin t}{r} r\cos t\,\mathrm{d}t + \\ + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{r} r\cos t\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} -\frac{\sin t}{r}(-r\sin t)\,\mathrm{d}t = 0 + 0 + \mathrm{i}\pi + \mathrm{i}\pi = 2\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

△

Úloha 6.6. Vypočtěte jako křivkový integrál v $\mathbb{R}^2$.

$$\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z$$

kde γ je

a) kružnice se středem v 2 a poloměrem 1 (viz obrázek 6.4a),

b) čtverec se středem v 0 a délkou strany $2a > 0$ (viz obrázek 6.4b).

Řešení.

a) Zde $\gamma(t) = 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Takže $x(t) = 2 + \cos t$ a $y(t) = \sin t$ a

$$z + \frac{1}{z} = x + \mathrm{i}y + \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y + \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \underbrace{x + \frac{x}{x^2 + y^2}}_{u} + \mathrm{i}\,\underbrace{y - \frac{y}{x^2 + y^2}}_{v}$$

a počítáme

(a) Kružnice se středem v 2 a poloměrem 1 (b) Čtverec se středem v 0 a délkou strany $2a$

Obrázek 6.4: Obrázky ilustrující křivky γ v úloze 6.6

$$\int_\gamma = \int_0^{2\pi} \left(2+\cos t + \frac{2+\cos t}{(2+\cos t)^2+\sin^2 t}\right)(-\sin t) - \left(\sin t - \frac{\sin t}{5+4\cos t}\right) \mathrm{d}t +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \left(\sin t - \frac{\sin t}{5+4\cos t}\right)(-\sin t) + \left(2+\cos t + \frac{2+\cos t}{5+4\cos t}\right)\cos t \,\mathrm{d}t =$$
$$= \cdots = 0+0+\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

což samozřejmě víme i z Cauchyho teorie, protože $0 \notin \operatorname{Int}\gamma$.

b) Zde již nemusí být výsledek nulový ($0 \in \operatorname{Int}\gamma$) a máme parametrizace čtverce (jakožto složení úseček) $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3 \dot{-} \gamma_4$, kde

$$\gamma_1(t) = a(1+\mathrm{i}t) \qquad \gamma_2(t) = a(1+\mathrm{i}t)$$
$$\gamma_3(t) = a(\mathrm{i}-t) \qquad \gamma_4(t) = -a(1+\mathrm{i}t)$$

pro $t \in [-1,1]$ a

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z$$

protože

$$\int_{-1}^{1} \left(a(t-\mathrm{i}) + \frac{1}{a(t-\mathrm{i})}\right) a\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(a(-t+\mathrm{i}) + \frac{1}{a(-t+\mathrm{i})}\right)(-a)\,\mathrm{d}t$$

a tak máme

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z =$$
$$= 2\int_{-1}^{1} \left(a^2(t-\mathrm{i}) + \frac{a}{a(t-\mathrm{i})} + a^2(1+\mathrm{i}t)\mathrm{i} + \frac{a\mathrm{i}}{a(1+\mathrm{i}t)}\right) \mathrm{d}t =$$
$$= 2\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t-\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t = 4\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t-\mathrm{i}} \cdot \frac{t+\mathrm{i}}{t+\mathrm{i}} = 4\int_{-1}^{1} \frac{t+\mathrm{i}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right) = 4\left(\left[\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|\right]_{-1}^{1} + \mathrm{i}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-1}^{1}\right) =$$
$$= 4\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \frac{4\mathrm{i}\pi}{2} = 2\pi\mathrm{i}$$

△

Úloha 6.7. Vypočtěte
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$$
pro γ lomenou čáru mezi body R, $\mathrm{i}R$, $-R$ (viz obrázek 6.3, strana 96).

Řešení. Křivka γ je složením úseček γ_1 od R do $\mathrm{i}R$ a γ_2 od $\mathrm{i}R$ do $-R$. Máme $\gamma_1(t) = (1 - t)R + \mathrm{i}tR$, $t \in [0,1]$ a $\gamma_2(s) = -sR + \mathrm{i}(1-s)R$, $s \in [0,1]$. Platí
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$
takže počítejme
$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \frac{-R+\mathrm{i}R}{R+t(-R+\mathrm{i}R)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-1+\mathrm{i}}{1-t+\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 \frac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}-\mathrm{i}t)}{(1-t)^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2t-1}{1-2t+2t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 \frac{1}{1-2t+t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|1-2t+2t^2\right|\right]_0^1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\left[2\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 0 + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2}$$
a podobně
$$\int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \frac{-R-\mathrm{i}R}{\mathrm{i}R+s(-R-\mathrm{i}R)}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{-1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}+s(-1-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}s = \cdots = \frac{\mathrm{i}\pi}{2}$$
a celkem
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + \frac{\mathrm{i}\pi}{2} = \mathrm{i}\pi$$

△

Úloha 6.8. Vypočtěte $\int_\gamma \Re(z)\,\mathrm{d}z$, kde

i) γ je kružnice se středem v 0 a poloměrem $R > 0$ (viz obrázek 6.4a),

ii) γ je horní půlkružnice se středem v 0 a poloměrem $R > 0$ (podobně jako obrázek 6.1),

iii) γ je lomená čára od $R > 0$ přes $\mathrm{i}R$ do $-R$ (stejná křivka jako v úloze 6.7).

Řešení.

i)
$$\int_\gamma \Re(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} R\cos t(-R\sin t + \mathrm{i}R\cos t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\pi R^2$$

ii)
$$\int_\gamma \Re(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} R\cos t(-R\sin t + \mathrm{i}R\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{i}\pi R^2$$

iii)
$$\int_\gamma \Re(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1-t)R(-R+\mathrm{i}R)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (-sR)(-R-\mathrm{i}R)\,\mathrm{d}s = \\ = \frac{1}{2}R^2(-1+\mathrm{i}) + \frac{1}{2}R^2(1+\mathrm{i}) = \mathrm{i}R^2$$

△

Úloha 6.9. Vypočtěte $\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$ pro γ složením úsečky 0 do 1, části jednotkové kružnice z 1 do $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ a úsečky z $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ do 0 (viz obrázek 6.5).

Řešení. Křivka γ je složením $\gamma = \gamma_1 \dotplus \gamma_2 \dotplus \gamma_3$, kde křivky γ_i jsou parametrizovány

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t, && t\in[0,1] \\ \gamma_2(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, && t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\ \dot{-}\gamma_3(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}t(1+\mathrm{i}), && t\in[0,1] \end{aligned}$$

a máme

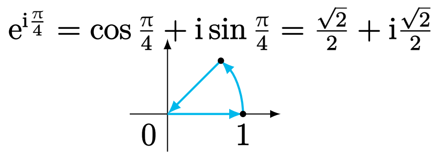
$$\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z = \\ = \int_0^1 t\cdot t\cdot 1\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{4}t^2+\frac{2}{4}t^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}t(1-\mathrm{i})\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}t = \\ = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \mathrm{i}\,[t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi\mathrm{i}}{4} - \frac{1}{3} = \frac{\pi\mathrm{i}}{4}$$

protože

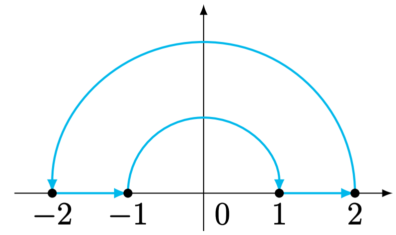
$$\sqrt{\frac{2}{4}t^2+\frac{2}{4}t^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}t(1-\mathrm{i})\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) = t\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})t\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) = t^2\frac{1}{2}(1+1) = t^2$$

△

Úloha 6.10. Vypočtěte $\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$ pro křivku γ vzniklou složením dvou úseček a dvou půlkružnic dle obrázku 6.6.



Obrázek 6.5: Křivka z úlohy 6.9



Obrázek 6.6: Křivka z úlohy 6.10

Řešení. Máme $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3 \dot{+} \gamma_4$, kde

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= t, && t \in [\ \ 1,\ \ 2]\\
\gamma_2(t) &= 2e^{it}, && t \in [\ \ 0,\ \ \pi]\\
\gamma_3(t) &= t, && t \in [-2, -1]\\
\gamma_4(t) &= \ \ e^{it}, && t \in [\ \ 0,\ \ \pi]
\end{aligned}
$$

a počítáme

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,dz &= \int_1^2 t^2\,dt + \int_0^\pi 2\cdot 2e^{-it}2ie^{it}\,dt - \int_{-2}^{-1} t^2\,dt - \int_0^\pi 1e^{-it}ie^{it}\,dt =\\
&= \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 + 8i[t]_0^\pi - \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{-1} - i[t]_0^\pi = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 8i\pi + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} - i\pi = 7\pi i
\end{aligned}
$$

△

6.2 Příklady na Cauchyho teorii

Nyní již není nutné počítat integrály přímo z definice, můžeme použít Cauchyho teorii. K tomu se nám bude hodit připomenout si několik vět, které známe z přednášky.

Věta (o nezávislosti). *Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f\colon D \to \mathbb{C}$ je spojitá. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní*

(i) f má v D primitivní funkci, tj. existuje funkce F holomorfní na D a $F' = f$ pro každé $z \in D$.

(ii) pro každá $z, w \in D$ a libovolnou cestu $z \mapsto w$ platí $\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = F(w) - F(z)$ (zejména $\oint_\gamma f(\xi)\,d\xi = 0$ pro $z = w$).

Důkaz. Skripta, Věta 6.18. □

Věta (Cauchyho). *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a f je holomorfní v Ω. Pak $\oint_\gamma f(\xi)\,d\xi = 0$ pro každou uzavřenou cestu v Ω.*

Důkaz. Skripta, Věta 7.1. □

Věta (Cauchyho-Goursatova). *Nechť γ je Jordanova cesta v $\mathbb{C}$, funkce f je holomorfní v* $\operatorname{Int}\gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$. *Pak* $\oint_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$.

Důkaz. Skripta, Věta 7.3A. □

Úloha 6.11. Vypočtěte hodnotu $I = \int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z$ pro $\gamma\colon\ |z-3+5\mathrm{i}| = \frac{1}{2}$ kladně orientovanou.

Řešení. Pomocí věty o nezávislosti (kde $F(z) = \frac{z^3}{3}$) nebo Cauchyho věty máme $I = 0$. Přímo z definice máme

$$\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(2-5\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^2 \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \left|\begin{matrix} u=3-5\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int_{3-5\mathrm{i}}^{\frac{5}{2}-5\mathrm{i}} u^2\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{5}{2}-5\mathrm{i}}^{3-5\mathrm{i}} u^2\,\mathrm{d}u = 0$$

△

Úloha 6.12. Vypočítejte $I = \int_\gamma \sin \mathrm{i}z\,\mathrm{d}z$, kde γ je libovolná křivka $0 \mapsto \pi\mathrm{i}$.

Řešení. Dle věty o nezávislosti (s $F(z) = -\frac{1}{\mathrm{i}}\cos \mathrm{i}z = \mathrm{i}\cos\mathrm{i}z$) máme

$$I = \mathrm{i}\,[\cos \mathrm{i}z]_0^{\pi\mathrm{i}} = \mathrm{i}(-1-1) = -2\mathrm{i}$$

△

Úloha 6.13. Vypočítejte $I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+1)^2}$ a $\Gamma\colon\ |z| = \frac{1}{2}$ bez použití Cauchyho vzorce.

Řešení. Rozdělíme si zlomek na parciální zlomky.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z^2+1)^2} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z+\mathrm{i}} + \frac{C}{(z+\mathrm{i})^2} + \frac{D}{z-\mathrm{i}} + \frac{E}{(z-\mathrm{i})^2}\\ 1 &= A(z^2+1)^2 + Bz(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i}) + Cz(z-\mathrm{i})^2 + Dz(z+\mathrm{i})^2(z-\mathrm{i}) + Ez(z+\mathrm{i})^2\end{aligned}$$

zajímá nás pouze koeficient A, protože ostatní singulární body nejsou uvnitř kružnice Γ, takže integrál přes ostatní zlomky bude nulový. Dosazením 0 získáme

$$1 = A$$

Odtud

$$I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i}$$

jako ve cvičení 6.5. △

Úloha 6.14. Vypočítejte $\int_\Gamma \frac{z+1}{(z^2+1)(z-2)^2(z+3\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}z$, $\Gamma\colon\ \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right| = 1$.

Řešení. Platí

$$\frac{z+1}{(z^2+1)(z-2)^2(z+3\mathrm{i})^2} = \frac{A}{z+\mathrm{i}} + \frac{B}{z-\mathrm{i}} + \frac{C}{z-2} + \frac{D}{(z-2)^2} + \frac{E}{z+3\mathrm{i}} + \frac{F}{(z+3\mathrm{i})^2}$$

$$\begin{aligned} z+1 = \quad & A(z-\mathrm{i})(z-2)^2(z+3\mathrm{i})^2+ \\ & + B(z+\mathrm{i})(z-2)^2(z+3\mathrm{i})^2+ \\ & + C(z^2+1)(z-2)(z+3\mathrm{i})^2+ \\ & + D(z^2+1)(z+3\mathrm{i})^2+ \\ & + E(z^2+1)(z-2)^2(z+3\mathrm{i})+ \\ & + F(z^2+1)(z-2)^2 \end{aligned}$$

Zajímá nás pouze koeficient B. Dosazením i získáme

$$B = -\frac{\mathrm{i}+1}{32\mathrm{i}(\mathrm{i}-2)^2} = -\frac{\mathrm{i}+1}{32\mathrm{i}(3-4\mathrm{i})} = -\frac{(1-\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{32\cdot 25} = -\frac{5+\mathrm{i}}{850}$$

a máme

$$I = -\frac{5+\mathrm{i}}{850}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}} = -\frac{5+\mathrm{i}}{850}2\pi\mathrm{i} = -\frac{-\pi+5\pi\mathrm{i}}{425} = \frac{\pi}{425} - \frac{\pi\mathrm{i}}{85}$$

△

Úloha 6.15. Vypočítejte $\int_\gamma \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^3+z^2+z+1}$ kde γ je kladně orientovaná po částech lineární křivka, pro niž je $[\gamma]$ obvod obdelníka s vrcholy $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+2\mathrm{i}$, $-\frac{1}{2}+2\mathrm{i}$.

Řešení. Platí $z^3+z^2+z+1 = z^2(z+1)+z+1 = (z^2+1)(z+1) = (z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+1)$. Potom

$$\frac{z}{z^3+z^2+z+1} = \frac{a}{z+\mathrm{i}} + \frac{b}{z-\mathrm{i}} + \frac{c}{z+1}$$
$$z = a(z-\mathrm{i})(z+1) + b(z+\mathrm{i})(z+1) + c(z^2+1)$$

Z bodů $\pm\mathrm{i}$, -1 leží uvnitř obdelníka pouze $\mathrm{i} \in \operatorname{Int}\gamma$, zajímá nás pouze b. Proto dosazením i dostaneme

$$\mathrm{i} = b(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}+\mathrm{i}) \text{ odtud} \qquad b = \frac{1}{2+2\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{4}$$

pak

$$\int_\gamma \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^3+z^2+z+1} = \frac{1-\mathrm{i}}{4}2\pi\mathrm{i} = \frac{\pi}{2}(1+\mathrm{i})$$

△

Připomeneme si důležitý nástroj na počítání integrálů, Cauchyho vzorec.

Věta (Cauchyho vzorec pro Jordanovu cestu)**.** *Nechť γ je kladně orientovaná Jordanova cesta, $\Omega := \operatorname{Int}\gamma$ a $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$, pak*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} f(z_0) & z_0 \in \Omega \\ 0 & z_0 \notin \Omega \end{cases}$$

Důkaz. Skripta, Věta 7.4. □

Úloha 6.16. Spočítejte $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$, $\gamma\colon\ |z-1| = 1$ je kladně orientovaná.

Řešení. Podle Cauchyho vzorce máme $I = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}$. △

Úloha 6.17. Spočítejte $\int_\gamma \frac{z^2}{z+5-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$, $\gamma\colon\ |z+\mathrm{i}| = 1$ je kladně orientovaná.

Řešení. Podle Cauchyho vzorce je $I = 0$, protože $-5 + 2\mathrm{i} \notin \overline{\operatorname{Int}\gamma}$. △

Úloha 6.18. Spočítejte $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-z_0)}$, $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$.

Řešení. Úlohu si rozdělíme na dva případy podle toho, zda $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$, a použijeme Cauchyho vzorec.

- $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$
$$I = \frac{1}{z_0}\int_\gamma \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z - z_0}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{z_0}\left(-2\pi\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i}\right) = 0$$
- $z_0 \in \operatorname{Ext}\gamma$
$$I = \int_\gamma \frac{\frac{1}{z-z_0}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{z_0}\right) = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{z_0}$$

△

Úloha 6.19. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+4)}$, kde $\gamma\colon\ |z| = 1$ je kladně orientovaná.

Řešení. Funkce $\frac{1}{z^2+4}$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2\mathrm{i}\} \supseteq \overline{\operatorname{Int}\gamma}$. Takže

$$I = \int_\gamma \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z^2+4}\right]_{z=0} = \frac{\pi\mathrm{i}}{2}$$

△

Úloha 6.20. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$, kde $\gamma\colon\ |z - \mathrm{i}| = 1$ je kladně orientovaná.

Řešení. Obdobně jako v úloze 6.19 máme

$$I = \int_\gamma \frac{\frac{1}{z+\mathrm{i}}}{z - \mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right]_{z=\mathrm{i}} = \pi$$

△

Úloha 6.21. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$, kde $\gamma\colon\ |z-\mathrm{i}| = 3$ je kladně orientovaná.

Řešení. Zde $\pm\mathrm{i} \in \operatorname{Int}\gamma$, tudíž nelze použít Cauchyho vzorec. Platí

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{z+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}$$

takže máme

$$I = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2}2\pi\mathrm{i}\cdot 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}2\pi\mathrm{i}\cdot 1 = 0$$

△

Úloha 6.22. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$, kde $\gamma(t) = \frac{\mathrm{i}}{2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení. Z bodů nespojitosti je pouze $\mathrm{i} \in \operatorname{Int}\gamma$, tj. $\frac{\cos z}{z+\mathrm{i}}$ je holomorfní v $\operatorname{Int}\gamma$, takže použijeme Cauchyho vzorec.

$$I = \int_\gamma \frac{\frac{\cos z}{z+\mathrm{i}}}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{\cos\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \pi\cos\mathrm{i} = \pi\frac{1+\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}}$$

Stejného výsledku bychom samozřejmě dosáhli i pomocí rozkladu na parciální zlomky (jmenovatel je stejný jako v cvičení 6.21). △

Úloha 6.23. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$, kde $\gamma(t) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení. Máme (podobně jako v úloze 6.22)

$$I = \int_\gamma \frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{i}$$

△

Úloha 6.24 (Doplnění úloh 6.20 a 6.21)**.** Vypočítejte $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$ pro

- $\gamma\colon\ |z-\mathrm{i}| = 1$
- $\gamma\colon\ |z| = 3$

Řešení.

- Případ $\gamma\colon\ |z-\mathrm{i}| = 1$ lze počítat bez rozkladu na parciální zlomky a $I = \pi$.
- Pro případ $\gamma\colon\ |z| = 3$ je nutný rozklad na parciální zlomky a $I = 0$.

△

Úloha 6.25. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-1)^3}$ pro $\gamma\colon\ |z+1| = 1$.

Řešení.

$$I = \int_\gamma \frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{(z-1)^3}\right]_{z=-1} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(-2)^3} = -\frac{\pi\mathrm{i}}{4}$$

△

Existuje i verze Cauchyho vzorce pro vícenásobný singulární bod.

Věta (Cauchyho vzorec pro n-tou derivaci)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a nechť γ je kladně orientovaná Jordanova cesta splňující $[\gamma] \subset \Omega$. Jestliže f je holomorfní funkce v Ω, pak pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$ a libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje derivace $f^{(n)}(z_0)$ a platí*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

Důkaz. Skripta, Věta 7.6. □

Úloha 6.26. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{z\mathrm{e}^z}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}z$, kde γ je libovolná kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ taková, že $a \in \operatorname{Int}\gamma$.

Řešení. Využijeme Cauchyho vzorec pro n-tou derivaci, v našem případě pro druhou derivaci.

$$I = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(z\mathrm{e}^z\right)''_{z=a} = \pi\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^z\right)'_{z=a} = \pi\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^z\right]_{z=a} =$$
$$= \pi\mathrm{i}(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a) = \pi\mathrm{i}(2+a)\mathrm{e}^a$$

△

Úloha 6.27. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z$, kde

a) $\gamma\colon\ |z| = \frac{1}{2}$

b) $\gamma\colon\ |z-1| = \frac{1}{2}$

Řešení.

a) Použijeme Cauchyho vzorec.

$$I = \int_\gamma \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}\right]_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}$$

b) Použijeme Cauchyho vzorec pro druhou derivaci.

$$I = -\int_\gamma \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z}}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)''_{z=1} = -\pi\mathrm{i}\left(\frac{z\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^z}{z^2}\right)'_{z=1} =$$
$$= -\pi\mathrm{i}\left[\frac{(z\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^z - \mathrm{e}^z)z^2 - (z\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^z)2z}{z^4}\right]_{z=1} =$$
$$= -\pi\mathrm{i}\frac{(1\mathrm{e} + \mathrm{e} - \mathrm{e})\cdot 1 - (1\mathrm{e} - \mathrm{e})\cdot 2}{1} = -\mathrm{i}\pi\mathrm{e}$$

△

Úloha 6.28. Vypočítejte $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z$, $\gamma(t) = 1 + \cos t + \frac{\mathrm{i}}{2}\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení. Křivka γ je elipsa se středem v bodě $1+0\mathrm{i}$ a poloosami délek 1 a $\frac{1}{2}$. Platí $1 \in \operatorname{Int}\gamma$ a $-1 \in \operatorname{Ext}\gamma$. Takže máme podle Cauchyho vzorce pro první derivaci

$$I = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{\big((z+1)(z-1)\big)^2}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z =$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{1!}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{(z+1)^2}\right)'_{z=1} = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\pi\mathrm{e}^{\pi z}(z+1)^2 - \mathrm{e}^{\pi z}2(z+1)}{(z+1)^4}\right]_{z=1} =$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\frac{4\pi\mathrm{e}^{\pi} - 4\mathrm{e}^{\pi}}{16} = \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\pi}(\pi - 1)$$

△

Dále se nám bude hodit znát také vzorec pro vícenásobně souvislou oblast, použitelný pokud více singulárních bodů leží v $\operatorname{Int}\gamma$.

Věta (Cauchyho pro vícenásobně souvislou oblast)**.** *Nechť G je $(n+1)$-násobně souvislá oblast s kladně orientovanou hranicí tvořenou Jordanovými cestami. Je-li f holomorfní na G a spojitá a konečná na jejím uzávěru, tj. na množině $\overline{G} = G \cup [\gamma] \cup [\gamma_1] \cup \dots \cup [\gamma_n]$, pak platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\dot{-}\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \textit{neboli} \quad \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Důkaz. Skripta, Věta 7.3B. □

Úloha 6.29. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z$, kde $\gamma(t) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení. Oba nulové body jmenovatele leží uvnitř $\operatorname{Int}\gamma$. Úlohu můžeme řešit rozkladem na parciální zlomky, nebo můžeme použít Cauchyho větu pro vícenásobně souvislou oblast kombinovanou s Cauchyho vzorcem pro n-tou derivaci. Máme

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z$$

kde $\gamma_1(t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ a $\gamma_2(t) = 1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, (obojí) pro $t \in [0, 2\pi]$. Můžeme aplikovat Cauchyho vzorec (pro druhou derivaci), pak

$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}\right]_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}$$
$$\int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_2} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z}}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left[\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)''\right]_{z=1} = -\mathrm{e}\pi\mathrm{i}$$

a odtud

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}(2 - \mathrm{e})$$

△

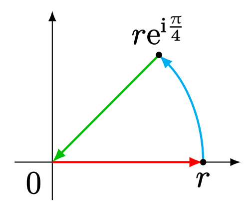
6.3 Reálné integrály

Pomocí Cauchyho věty lze určit i některé integrály reálných funkcí, které jsme nebyli schopni „vypočítat“ (pomocí Newtonova-Leibnitzova vzorce).

Úloha 6.30. Spočítejte tzv. Fresnelovy integrály

$$\int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t$$

Řešení. Funkce $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$. Pro každou uzavřenou křivku φ, $[\varphi] \subset \mathbb{C}$, konečné délky tedy platí $\int_\varphi \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \,\mathrm{d}z = 0$. Zvolme speciálně $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_3$, kde $\varphi_1(t) = t$, $t \in [0, r]$, $\varphi_2(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ a $\varphi_3(t) = (r-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, r]$ (viz obrázek 6.7).



Obrázek 6.7: Křivka φ je složením tří segmentů, φ_1 (červená), φ_2 (modrá) a φ_3 (zelená).

Pak

$$0 = \int_\varphi \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \,\mathrm{d}z = \int_0^r \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} \,\mathrm{d}t + \mathrm{i}r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) \int_0^r \mathrm{e}^{-s^2} \,\mathrm{d}s$$

kde $s = t - r$, protože $\varphi_3' = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$ a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(r-t)^2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}^2(r-t)^2} = \mathrm{e}^{-(r-t)^2}$. Přejděme k limitě $r \to \infty$. Ovšem platí

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r \mathrm{e}^{-s^2} \,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(tzv. Eulerův-Poissonův nebo Gaussův-Poissonův integrál, viz [3]), takže stačí ukázat, že existuje limita prostředního integrálu pro $r \to \infty$. Dokážeme, že je rovna 0. Skutečně

$$0 \le \left| \mathrm{i}r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t \right| \le r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2 \cos 2t - r^2 \sin 2t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \right| \,\mathrm{d}t = r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-r^2 \sin 2t} \,\mathrm{d}t \le$$

$$\le r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-r^2 \frac{4t}{\pi}} \,\mathrm{d}t = -r \frac{\pi}{4\pi^2} \left[\mathrm{e}^{-r^2 \frac{4t}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \frac{1 - \mathrm{e}^{-r^2}}{r}$$

neboť pro $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ platí $\sin 2t \ge \frac{4t}{\pi}$. Protože $\lim_{r\to\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-r^2}}{r} = 0$, plyne odtud kýžený výsledek s využitím věty o limitě sevřené funkce. Můžeme proto také tvrdit, že existuje $\lim_{r\to\infty} \int_0^r \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} \,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} \,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

Odtud porovnáním reálné a imaginární části máme výsledek.

$$\int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

△

Úloha 6.31. Dokažte, že

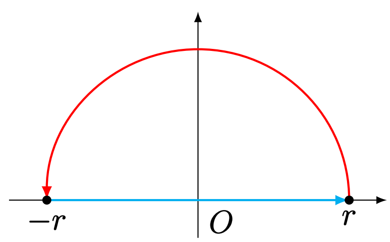
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

(viz také cvičení 8.24, strana 140).

Řešení. Položme $f(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}{z}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a dodefinujme ji spojitě jako $f(0) := \mathrm{i}$. Pak f je holomorfní v $\mathbb{C}$, protože platí

$$f(z) = \mathrm{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^{k-1}}{k!}$$

Můžeme využít Cauchyho větu. Proto $\varphi_1(t) = t$, $t \in [-r, r]$, $\varphi_2(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$ (viz obrázek 6.8) Opět pro každé $r > 0$ platí



Obrázek 6.8: Křivka φ je složením dvou křivek, φ_1 (modře) a φ_2 (červeně).

$$\int_\varphi f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f(z) \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} f(z) \,\mathrm{d}z = 0 \tag{6.2}$$

Uvažme nyní

$$\int_{\varphi_1} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{t} \,\mathrm{d}t = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t - 1}{t} \,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_{-r}^{r} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$$

a díky spojitému rozšíření dodefinujeme spojité funkce v 0. Protože $\frac{\cos t - 1}{t}$ je lichá funkce, je reálný integrál nulový. Pak z (6.2) máme

$$2\mathrm{i} \int_{-r}^{r} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = -\int_{\varphi_2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}{z} \,\mathrm{d}z = -\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}t$$

Hodnota posledního integrálu je $\pi\mathrm{i}$ a nezávisí na r, takže vzhledem k požadovanému výsledku zbývá ukázat, že předposlední integrál konverguje k nule pro $r \to \infty$. Tedy

$$0 \leq \left| \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\pi \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \right| \mathrm{d}t = \int_0^\pi \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)} \right| \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\cos t - r\sin t} \right| \mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin t}\,\mathrm{d}t \leq 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\left[-\frac{2\mathrm{e}^{-r\frac{t}{2}}}{r} \right]_0^\infty = -\lim_{t\to\infty} \frac{2\mathrm{e}^{-r\frac{t}{2}}}{r} + \frac{2}{r} = \frac{2}{r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

kde $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin t}\,\mathrm{d}t \leq 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$, protože $\sin t \geq \frac{t}{2}$ pro $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pak díky $r > 0$ je $r\sin t \geq r\frac{t}{2}$ a díky tomu, že je e^{-t} klesající, je nakonec $\mathrm{e}^{-r\sin t} \leq \mathrm{e}^{-r\frac{t}{2}}$. Tedy limitním přechodem pro $r \to \infty$ dostáváme

$$2\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \pi\mathrm{i}$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$\triangle$

Úloha 6.32. Dokažte

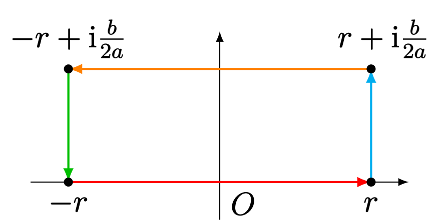
$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}$$

pro $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Řešení. Integrujeme funkci sudou vzhledem k b, proto stačí uvažovat pouze $b > 0$ a zvláště se věnovat $b = 0$. Využijeme opět vzorec

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Budeme integrovat funkci $f(z) := \mathrm{e}^{-az^2}$, $z \in \mathbb{C}$, holomorfní na $\mathbb{C}$, přes křivku γ, kde $[\gamma] = \partial\left([-r, r] \times \left[0, \frac{b}{2a}\right]\right)$ (viz obrázek 6.9). Tedy máme $\varphi_1(t) = t$, $t \in [-r, r]$, $\varphi_2(t) = r + \mathrm{i}t\frac{b}{2a}$,



Obrázek 6.9: Křivka γ je složením čtyř úseček, φ_1 (červeně), φ_2 (modře), φ_3 (oranžově) a φ_4 (zeleně).

$t \in [0, 1]$, $\varphi_3(t) = -t + \mathrm{i}\frac{b}{2a}$, $t \in [-r, r]$ a $\varphi_4(t) = -r + \mathrm{i}(1 - t)\frac{b}{2a}$.

Vzorec

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

platí pro každé $r > 0$. Potom

$$\int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{a}x}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-r\sqrt{a}}^{r\sqrt{a}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{r\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Odtud plyne platnost vzorce zejména pro $b = 0$. Dále

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_3} f(z)\,\mathrm{d}z &= -\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-a\left(-t+\mathrm{i}\frac{b}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= -\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-a\left(t^2-\mathrm{i}\frac{b}{2a}t-\frac{b^2}{4a^2}\right)}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a^2}} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2}(\cos bt + \mathrm{i}\sin bt)\,\mathrm{d}t = \\ &= -\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a^2}} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt\,\mathrm{d}t \xrightarrow{r\to\infty} -\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

kde $-\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a^2}} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2}(\cos bt + \mathrm{i}\sin bt)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a^2}} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt\,\mathrm{d}t$, protože $\sin bt$ je lichá funkce.

Zbývající integrály lze odhadnout pomocí délek křivek a normy funkce f. Pro oba případy platí $L(\varphi_2) = L(\varphi_4) = \frac{b}{2a}$ a pro $z = x + \mathrm{i}y$ z $[\varphi_2]$ a $[\varphi_4]$ je $|x| = r$ a $y \in \left[0, \frac{b}{2a}\right]$. Tedy

$$\left|\mathrm{e}^{-az^2}\right| = \mathrm{e}^{-a(x^2-y^2)} \le \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}} \mathrm{e}^{-ar^2}$$

z čehož plyne

$$\left|\int_{\varphi_k} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le L(\varphi_k)\,\|f\| = \frac{b}{2a} \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}} \mathrm{e}^{-ar^2} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

kde $\|f\| = \max_{z\in[\varphi_k]}\{f(z)\}$, pro $k \in \{2, 4\}$. Tedy dostáváme celkem pro $r \to \infty$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt\,\mathrm{d}t = 0$$

z čehož již plyne požadovaná rovnost. $\triangle$

Kapitola 7

Taylorův a Laurentův rozvoj

7.1 Taylorův rozvoj

Nechť f je holomorfní v otevřeném kruhu $K(z_0, r)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 < r \leq \infty$. Pak pro $z \in K(z_0, r)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{7.1}$$

Koeficientům mocninné řady v (7.1) říkáme Taylorovy koeficienty, řadě napravo pak Taylorova řada nebo také *Taylorův rozvoj* funkce f. Je určen jednoznačně, tj. je-li

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pak $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Taylorovu řadu tak můžeme počitat buď z definice (známe-li obecně $f^{(n)}(z_0)$) nebo si můžeme pomoci již známými vzorci, např. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pro $z \in K(0, 1)$.

Úloha 7.1. Funkci $f(z) = \frac{1}{3-z}$ rozviňte v Taylorovu řadu v $K(0, r)$ a $K(-1 + 3\mathrm{i}, r)$ a stanovte největší možné r.

Řešení.

i) Funkce f je holomorfní v $K(0, 3)$ (kruh již nelze zvětšit, 3 leží na jeho hranici) a platí

$$f(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \overset{\left|\frac{z}{3}\right|<1}{=} \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

přičemž $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$ na $K(0, 3)$.

ii) Největší možné r je $|-1 + 3\mathrm{i} - 3| = \sqrt{16 + 9} = 5$, tedy f je holomorfní (a má Taylorův rozvoj) na $K(-1 + 3\mathrm{i}, 5)$ a platí

$$f(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{4-3\mathrm{i}-(z-(-1+3\mathrm{i}))} = \frac{1}{4-3\mathrm{i}}\frac{1}{1-\frac{z+1-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}} \overset{\left|\frac{z+1-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}\right|<1}{=}$$
$$= \frac{1}{4-3\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1-3\mathrm{i})^n}{(4-3\mathrm{i})^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1-3\mathrm{i})^n}{(4-3\mathrm{i})^{n+1}}$$

přičemž $\left|\frac{z+1-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}\right| = \frac{|z+1-3\mathrm{i}|}{5} < 1$ na $K(-1+3\mathrm{i},5)$.

$\triangle$

Úloha 7.2. Určete Taylorův rozvoj pro $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ v $K(0,r)$.

Řešení. $K(0,r) = K(0,1)$, protože z^2+1 má na hranici $K(0,1)$ nulový bod. Pak

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-(-z^2)} \overset{|z^2|<1 \iff |z|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

$\triangle$

Úloha 7.3. Funkci $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2}$ rozviňte v Taylorovu řadu na $K(0,r)$ a na $K(1,r)$ a stanovte nejvyšší možné r.

Řešení.

i) Na $K(0,r)$ pro každé $z \in K(0,1)$ platí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n && \Big|\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\\
-\frac{1}{(1+z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1} && \Big|\cdot(-z^2)\\
\frac{z^2}{(1+z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n z^{n+1}\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n (n-1) z^n
\end{aligned}$$

Poloměr $r=1$ nelze zvětšit, neboť na jeho hranici leži bod $z=-1$, v němž f není holomorfní. Stejného výsledku bychom dosáhli i pomocí součinu $f(z) = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2$.

ii) Na $K(1,2)$ platí

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{z^2-1+1}{(z+1)^2} = \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} = 1 - \frac{2}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} \tag{7.2}$$

a pro každé $z \in K(1,2)$ platí

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

a odtud derivováním podle z

$$-\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(n+1)(z-1)^n$$

Sečtením dle (7.2) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{(z+1)^2} &= (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(n+1)(z-1)^n \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-3}{2^{n+2}}(z-1)^n\end{aligned}$$

Poloměr $r = 2$ nelze zvětšit, protože na hranici kruhu leží -1.

△

Úloha 7.4. Určete Taylorův rozvoj pro funkci $f(z) = \log(1+z)$ v $K(0,r)$.

Řešení. Funkce f je holomorfní na $K(0,1)$, přičemž tento kruh nelze zvětšit, protože na jeho hranici leží -1, kde f není definovaná. Pak platí

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \overset{|z|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

a odtud (komplexním) integrováním získáme

$$f(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}$$

pro nějaké $C \in \mathbb{C}$. Dosazením $z = 0$ získáme $C = \log(1+0) = \ln 1 = 0$, tudíž

$$\log(1+z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n$$

pro každé $z \in K(0,1)$. △

Úloha 7.5. Určete Taylorův rozvoj pro $f(z) = \log z$ na $K(2,r)$.

Řešení. Funkce $f(z)$ je holomorfní v $K(2,2)$ a kruh nelze zvětšit. Platí

$$f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} \overset{\left|\frac{z-2}{2}\right|<1}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$$

tudíž existuje $C \in \mathbb{C}$ takové, že pro každé $z \in K(2,2)$ máme

$$f(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{(z-2)^{n+1}}{n+1}$$

Dosazením $z = 2$ dostaneme $\log 2 = \ln 2 = f(2) = C$, takže

$$f(z) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n}(z-2)^n$$

pro každé $z \in K(2,2)$. △

Úloha 7.6. Určete první čtyři členy Taylorova rozvoje funkce $f(z)$ v okolí $z_0 = 0$, kde

a) $f(z) = \mathrm{e}^{z \sin z}$ b) $f(z) = (1+z)^z$

Řešení.

a) Máme $f(z) = \mathrm{e}^{z \sin z}$, takže

- $f(0) = 1$,
- $f'(z) = \mathrm{e}^{z \sin z}(\sin z + z \cos z)$, $f'(0) = 0$,
- $f''(z) = \mathrm{e}^{z \sin z}(\sin z + z \cos z)^2 + \mathrm{e}^{z \sin z}(2 \cos z - z \sin z)$, $f''(0) = 2$,
- $f'''(z) = \mathrm{e}^{z \sin z}(\sin z + z \cos z)^3 + \mathrm{e}^{z \sin z} 2(\sin z + z \cos z)(2 \cos z - z \sin z) + \mathrm{e}^{z \sin z}(\sin z + {}$ ${}+ z \cos z)(2 \cos z - z \sin z) + \mathrm{e}^{z \sin z}(-3 \sin z - z \cos z)$, $f'''(0) = 0$.

Celkem

$$\mathrm{e}^{z \sin z} = 1 + \frac{0}{1} z + \frac{2}{2} z^2 + \frac{0}{6} z^3 + \cdots = 1 + z^2 + \cdots$$

b) Platí

- $f(0) = 1$,
- $f'(z) = \mathrm{e}^{z \log(1+z)} \left(\log(1+z) + \frac{z}{z+1} \right)$, $f'(0) = 0$,
- $f''(z) = \mathrm{e}^{z \log(1+z)} \left(\log(1+z) + \frac{z}{z+1} \right)^2 + \mathrm{e}^{z \log(1+z)} \left(\frac{1}{1+z} + \frac{z+1-1}{(z+1)^2} \right)$, $f''(0) = 2$,
- $f'''(z) = \mathrm{e}^{z \log(1+z)} \left(\log(1+z) + \frac{z}{z+1} \right)^3 + \mathrm{e}^{z \log(1+z)} 2 \left(\log(1+z) + \frac{z}{z+1} \right) \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} \right) +$ $+ \mathrm{e}^{z \log(1+z)} \left(\log(1+z) + \frac{z}{z+1} \right) \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} \right) + \mathrm{e}^{z \log(1+z)} \left(-\frac{1}{(1+z)^2} - \frac{2}{(1+z)^3} \right)$, $f'''(0) =$ $= -3$.

Celkem máme

$$(1+z)^z = 1 + \frac{0}{1} z + \frac{2}{2} z^2 + \frac{-3}{6} z^3 + \cdots = 1 + z^2 - \frac{1}{2} z^3 + \cdots$$

△

Úloha 7.7. Ukažte, že platí: Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je n-násobným nulovým bodem holomorfní funkce f, tj. $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(n)}(z_0)$, právě tehdy, když v jistém okolí $\mathscr{O}(z_0)$ lze f vyjádřit ve tvaru $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, kde g je holomorfní funkce v $\mathscr{O}(z_0)$ a $g(z_0) \neq 0$.

Řešení. „$\Rightarrow$“ Nechť z_0 je n-násobný nulový bod f. Pak existuje $\mathscr{O}(z_0)$, ve kterém lze f vyjádřit Taylorovou řadou

$$f(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \cdots = (z - z_0)^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j} (z - z_0)^j$$

kde $a_n \neq 0$ ($a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ díky definici n-násobného nulového bodu). Označíme-li $g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j}(z-z_0)^j$, pak g je holomorfní na $\mathscr{O}(z_0)$ jako součet mocninné řady a $g(z_0) = a_n \neq 0$.

„$\Leftarrow$" Nechť f lze v $\mathscr{O}(z_0)$ psát jako $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$ pro nějakou v $\mathscr{O}(z_0)$ holomorfní funkci g. Pak g lze v $\mathscr{O}(z_0)$ rozvinout v Taylorovu řadu $\sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-z_0)^j$, kde $b_0 = g(z_0) \neq 0$. Tedy v $\mathscr{O}(z_0)$ je

$$f(z) = (z-z_0)^n \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-z_0)^{j+n} = \sum_{j=n}^{\infty} b_{j-n}(z-z_0)^j = \sum_{j=n}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$$

kde $a_j := b_{j-n}$, přičemž $a_n = b_0 \neq 0$. Bod z_0 je tedy n-násobným nulovým bodem funkce f. △

Úloha 7.8. Určete všechny nulové body funkce $f(z) = z \sin z$ a určete jejich násobnost.

Řešení. Bod $z_0 = 0$ je dvojnásobným nulovým bodem, neboť pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$z \sin z = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n} = z^2 g(z)$$

kde $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ a $g(0) = 1 \neq 0$.

Body $z_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jsou jednoduchými nulovými body, neboť pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ platí (podobně jako (1.4))

$$\sin z = \sin\big((z-k\pi)+k\pi\big) = \sin(z-k\pi)\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} + \cos(z-k\pi)\underbrace{\sin k\pi}_{0}$$

a tak máme

$$\begin{aligned} z \sin z &= \big((z-k\pi)+k\pi\big)\sin\big((z-k\pi)+k\pi\big) = \big((z-k\pi)+k\pi\big)(-1)^k \sin(z-k\pi) = \\ &= (-1)^k\big((z-k\pi)+k\pi\big)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-k\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \\ &= (-1)^k\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-k\pi)^{2n}}{(2n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{k\pi(z-k\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right) = (z-k\pi)g(z) \end{aligned}$$

kde

$$g(z) := (-1)^k\left(k\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(z-k\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{k\pi(z-k\pi)^{2n}}{(2n+1)!}\right)\right)$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$ jako součet mocninné řady a $g(k\pi) = (-1)^k k\pi \neq 0$. △

7.2 Laurentovy řady

Nechť funkce f je holomorfní na prstencovém okolí z_0 značeném $P(z_0, r, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq \infty$, přičemž f nemusí být holomorfní v z_0. Pak f lze na $P(z_0, r, R)$ jednoznačně vyjádřit jako součet řady

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

přičemž (mocninnou) řadu s kladnými exponenty u $(z - z_0)$ nazýváme *regulární částí Laurentova rozvoje* funkce f, zatímco (funkční, ale nikoli mocninnou) řadu se zápornými exponenty nazýváme *hlavní částí* tohoto rozvoje. Celou řadu pak nazýváme *Laurentovým rozvojem* funkce f. Pro koeficienty Laurentova rozvoje platí vztah

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z$$

kde $\gamma(t) = z_0 + \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$ a $\varrho \in (r, R)$ libovolné.

Speciálně, je-li f holomorfní na $K(z_0, R)$, pak se díky jednoznačnosti shoduje Laurentův rozvoj funkce f na $P(z_0, r, R)$ pro libovolné $r \in [0, R)$ s Taylorovým rozvojem f se středem v bodě z_0.

Při určování Laurentova rozvoje racionálně lomené funkce v prstencovém okolí postupujeme tak, že funkci rozdělíme na parciální zlomky a určíme jejich rozvoje zvlášť. Pro parciální zlomek $\frac{A}{(z-z_1)^n}$ je rozvoj

- jednoprvkový $\frac{A}{(z-z_1)^n}$ (tj. $a_k = 0$ pro $k \neq -n$ a $a_{-n} = A$), je-li $z_1 = z_0$,
- totožný s Taylorůvým rozvojem $\frac{A}{(z-z_1)^n}$ v z_0, je-li $z_1 \neq z_0$.

Úloha 7.9. Určete Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z-2}$ v prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a $z_0 = 2$.

Řešení.

- $z_0 = 0$

  Zde je f holomorfní, tudíž na okolí $\mathscr{O}(0)$ je Laurentův rozvoj totožný s Taylorovým rozvojem. Platí

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \overset{|z|<2}{=} -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

- $z_0 = 2$

  Zde je $f(z)$ přímo svým Laurentovým rozvojem.

△

Úloha 7.10. Určete Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ v okolí $z_0 = 0$ a $z_0 = 1$.

Řešení. Platí

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

protože $1 = A(1-z) + Bz$, $0 = -A + B$ a $1 = A$. Pak počítejme pro $z_0 = 0$ a $z_0 = 1$.

- $z_0 = 0$

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

  na $P(0,0,1)$.

- $z_0 = 1$

$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{1+(z-1)} =$$

$$= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

  na $P(1,0,1)$.

△

Úloha 7.11. Určete Laurentovu řadu pro funkci $f(z) = \frac{1}{1+z}$ se středem v $z_0 = 1$.

Řešení. Platí

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

Vyjádřime zlomek pomocí geometrické řady.

Pokud $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ (tj. nacházíme se na $K(1,2)$, f je zde holomorfní), pak

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

Pokud $\left|\frac{z-1}{2}\right| > 1$ (nacházíme se na $P(1,2,\infty)$) platí $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$ a

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1z-1}{1-\left(-\frac{2}{z-1}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z-1}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z-1)^n$$

△

Úloha 7.12. Určete Laurentovu řadu pro funkci $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ v mezikruží konvergence

a) $1 < |z-1| < \infty$ b) $1 < |z| < \infty$

Řešení.

a) Nacházíme se na množině $P(1,1,\infty)$. Platí

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+(z-1)} - \frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{z-1}}{\frac{1}{z-1}+1} - \frac{1}{z-1} =$$
$$= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-1}\left(-\frac{1}{z-1}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+1}} =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{n+1}(z-1)^n$$

b) Nacházíme se na množině $P(0,1,\infty)$. Platí

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} = \frac{1}{z} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} =$$
$$= \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = -\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

△

Úloha 7.13. Určete všechny Laurentovy rozvoje funkce $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ se středem v nulových bodech jmenovatele.

Řešení. Nulovými body jmenovatele jsou $z_0 = 1$ a $z_0 = 2$. Dále platí

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

1. $z_0 = 1$

   Funkce f je holomorfní na prstencových okolích $P(1,0,1)$ a $P(1,1,\infty)$. Zlomek $-\frac{1}{z-1}$ je svým vlastním Laurentovým rozvojem. Počítáme Laurentův rozvoj pro $\frac{1}{z-2}$.

   (a) Nechť $z \in P(1,0,1)$. Pak

   $$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

   takže

   $$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

(b) Nechť $z \in P(1,1,\infty)$. Pak

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

a odtud

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(z-1)^n$$

2. $z_0 = 2$

Funkce je holomorfní na prstencových okolích $P(2,0,1)$ a $P(2,1,\infty)$. Zlomek $\frac{1}{z-2}$ je svým vlastním Laurentovým rozvojem. Počítáme rozvoj pro $-\frac{1}{z-1}$.

(a) Nechť $z \in P(2,0,1)$. Pak

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

a tedy

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n$$

(b) Nechť $z \in P(2,1,\infty)$. Pak

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = $$
$$= \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}$$

a tak dostáváme

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n(z-2)^n$$

△

Úloha 7.14. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ se středem v $z_0 = 0$ v mezikruží $2 < |z| < 3$.

Řešení. Platí

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

Pro $|z| > 2$ je

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^n$$

a pro $|z| < 3$ máme

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

a celkem platí

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} z^n$$

△

Úloha 7.15. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ v okolí $z_0 = \mathrm{i}$.

Řešení. Platí

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{\mathrm{i}}{4}\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{1}{z+\mathrm{i}} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}$$

Určíme rozvoj $\frac{1}{z+\mathrm{i}}$.

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}+z-\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i})\right)} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n (z-\mathrm{i})^n$$

a derivací

$$-\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2} = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n n(z-\mathrm{i})^{n-1} = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}(n+1)(z-\mathrm{i})^n$$

Sečtením získáme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{4}\frac{1}{z+\mathrm{i}} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2} &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n (z-\mathrm{i})^n - \frac{\mathrm{i}}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}(n+1)(z-\mathrm{i})^n = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{2}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n (z-\mathrm{i})^n - \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}(n+1)(z-\mathrm{i})^n = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}(1-n)(z-\mathrm{i})^n\end{aligned}$$

Celkem máme

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} - \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{1}{z-\mathrm{i}} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}(1-n)(z-\mathrm{i})^n$$

△

Úloha 7.16. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ v okolí $z_0 = 2$ a v mezikruží $1 < |z| < 2$.

Řešení. Platí
$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$$

a) Nejprve řešme případ okolí $z_0 = 2$. Platí
$$\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2+(z-2)} = \frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2+\mathrm{i}}} =$$
$$= \frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+\mathrm{i}}\right)^n = \frac{1+2\mathrm{i}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}-2}{5}\right)^n(z-2)^n$$

a
$$\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}+(z+2)} = \frac{-1+2\mathrm{i}}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{2+\mathrm{i}}{5}(z-2)\right)} =$$
$$= \frac{-1+2\mathrm{i}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2-\mathrm{i}}{5}\right)^n(z-2)^n$$

Dohromady máme
$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1+2\mathrm{i}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}-2}{5}\right)^n(z-2)^n + \frac{-1+2\mathrm{i}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2-\mathrm{i}}{5}\right)^n(z-2)^n$$
$$= \frac{1}{z-2} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+\mathrm{i})^{n+1}-(2-\mathrm{i})^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$$

b) Nyní řešíme případ mezikruží $1 < |z| < 2$, tj. množinu $P(0,1,2)$.

Platí
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Dále máme
$$\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = -\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{\frac{\mathrm{i}}{z}}{\frac{\mathrm{i}}{z}-1} = \frac{\frac{\mathrm{i}}{z}}{1-\frac{\mathrm{i}}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n = \frac{\mathrm{i}}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{\mathrm{i}}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \cdots$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = -\frac{1}{1+\frac{z}{\mathrm{i}}} = -\frac{\frac{\mathrm{i}}{z}}{1+\frac{\mathrm{i}}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n = -\frac{\mathrm{i}}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{\mathrm{i}}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \cdots$$

takže
$$\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{-2n}$$

a dohromady máme
$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} = 2\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

△

Úloha 7.17. Určete všechny Laurentovy řady pro funkci $f(z) = \frac{2z^2+6z-2\mathrm{i}}{z(z-\mathrm{i})(z+2)}$ se středem v $z_0 = 0$.

Řešení. Funkce f je holomorfní na prstencových okolích $z_0 = 0$ $P(0,0,1)$, $P(0,1,2)$ a $P(0,2,\infty)$. Dále platí

$$\frac{2z^2+6z-2\mathrm{i}}{z(z-\mathrm{i})(z+2)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+2}$$

Vždy $\frac{1}{z}$ bude svojí Laurentovou řadou. Počítejme proto postupně

i) Nechť $z \in P(0,0,1)$. Zde $\left|\frac{z}{\mathrm{i}}\right| < 1$ a $\left|-\frac{z}{2}\right| < 1$ a platí

$$\frac{2}{z-\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}\frac{1}{1+\mathrm{i}z} = 2\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^n z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{i}^{n+1} z^n$$
$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{2^{n+1}}$$

a proto

$$f(z) = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{i}^{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\mathrm{i})^{n+1}-1}{2^n}z^n$$

kde $\frac{1}{z}$ je hlavní část rozvoje a zbytek je regulární část. Hlavní část rozvoje má pouze konečně mnoho nenulových členů, regulární část jich má nekonečně mnoho.

Navíc podle Věty 8.4 ve skriptech máme

$$a_n = (-1)^n\frac{2(2\mathrm{i})^{n+1}-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\varrho}\frac{2z^2+6z-2\mathrm{i}}{z^{n+2}(z-\mathrm{i})(z+2)}\,\mathrm{d}z$$

pro $n \in \{0,1,2,\dots\}$ a $\varrho \in (0,1)$ a $\gamma_\varrho(t) = \varrho e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,2\pi]$. Pro stejné křivky platí dále

$$a_{-1} = 1 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\varrho}\frac{2z^2+6z-2\mathrm{i}}{z(z-\mathrm{i})(z+2)}\,\mathrm{d}z$$
$$a_n = 0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\varrho}\frac{2z^2+6z-2\mathrm{i}}{z(z-\mathrm{i})(z+2)z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

pro $n \in \{-2,-3,\dots\}$. Počítat tyto integrály přímo by bylo mnohem pracnější.

ii) Nechť $z \in P(0,1,2)$. Pak $\left|\frac{\mathrm{i}}{z}\right| < 1$ a $\left|-\frac{z}{2}\right| < 1$ a platí

$$\frac{2}{z-\mathrm{i}} = \frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{z}} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{z^{n+1}}$$

$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n$$

a

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n \\ &= 2\sum_{n=-\infty}^{-2}(-\mathrm{i})^{n+1}z^n + \frac{3}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^n \end{aligned}$$

takže jak hlavní, tak regulární část Laurentovy řady mají na tomto mezikruží nekonečně mnoho nenulových členů.

Navíc pro $n \in \{0, 1, \dots\}$, $m \in \{-2, -3, \dots\}$ a pro křivku $\gamma_\varrho(t) = \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pro $t \in [0, 2\pi]$, kde $1 < \varrho < 2$ libovolné máme

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\varrho} f(z)\frac{1}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \\ a_{-1} = 3 &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\varrho} f(z)\,\mathrm{d}z \\ a_m = 2(-\mathrm{i})^{m+2} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\varrho} f(z)\frac{1}{z^{m+1}}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

iii) Nechť $z \in P(0, 2, \infty)$. Pak $\left|\frac{\mathrm{i}}{z}\right| < 1$, $\left|-\frac{2}{z}\right| < 1$ a

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-\mathrm{i}} &= \frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{z}} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{z^{n+1}} \\ -\frac{1}{z+2} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{z} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{z^{n+1}} + \frac{2}{z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2}\left(2(-\mathrm{i})^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)z^n + \frac{2}{z} \end{aligned}$$

tudíž hlavní část rozvoje má zde nekonečně mnoho nenulových členů a regulární část je dokonce nulová. Navíc $n \in \{0, 1, \dots\}$, $m \in \{-2, -3, \dots\}$ a pro křivku $\gamma_\varrho(t) = \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pro $t \in [0, 2\pi]$, kde $2 < \varrho$ libovolné máme

$$a_n = 0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\varrho} f(z)\frac{1}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

$$a_{-1} = 2 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\varrho} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$a_m = -2(-\mathrm{i})^m - \left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\varrho} f(z) \frac{1}{z^{m+1}}\,\mathrm{d}z$$

△

Úloha 7.18. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \sin^2 z$ na okolí $z_0 = 0$.

Řešení. Platí $\sin^2 z = \sin z \cdot \sin z$ a $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, tedy

$$\begin{aligned}\sin^2 z &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} z^{2n+2m+2}}{(2m+1)!(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k}}{(2m+1)!(2k-m-1)!}\end{aligned}$$

△

Úloha 7.19. Určete několik prvních členů Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)\sin z}$ se středem v 0.

Řešení. Funkce f je holomorfní na $P(0, 0, \pi)$ a pro každé $z \in \mathbb{C}$ máme

$$\mathrm{e}^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \qquad \sin z = 1 - \frac{z^3}{6} + \cdots$$

takže vynásobením máme

$$(\mathrm{e}^z - 1)\sin z = z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{24} + \cdots$$

a dělíme 1 řadou $z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{24} + \cdots$.

$$\begin{aligned} f(z) = 1 : \left(z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{24} + \cdots\right) &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} - \frac{z}{12} + \cdots\\ -\left(1 + \frac{z}{2} - \frac{z^3}{24}\right) &= -\frac{z}{2} + \frac{z^3}{24} + \cdots\\ -\left(-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{48}\right) &= \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{24} - \frac{z^4}{48} + \cdots\\ -\left(\frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} - \frac{z^5}{96}\right) &= -\frac{z^3}{12} - \frac{z^4}{48} - \frac{z^5}{96} + \cdots\end{aligned}$$

takže

$$\frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)\sin z} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} - \frac{z}{12} + \cdots$$

△

Úloha 7.20. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}$ na $|z-1| > \sqrt{2}$.

Řešení. Pro $z \in P(1, \sqrt{2}, \infty)$ platí (podobně jako u minulých cvičení)

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-\mathrm{i})^n}{(z-1)^{n+1}}$$

následně derivujeme

$$-\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-\mathrm{i})^n (-n-1)(z-1)^{-n-2}$$

takže

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n+1} (1-\mathrm{i})^{-n-2} (n+1)(z-1)^n$$

△

Úloha 7.21. Určete Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$ v $P(1, 0, \infty)$.

Řešení. Vyjádříme si funkci f

$$f(z) = \sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1}$$

Protože pro libovolné $s \in \mathbb{C}$ platí

$$\sin s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{s^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad\qquad \cos s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!}$$

a pro $z \in P(1, 0, \infty)$ je

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{2n}(2n)!} + \cos 1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}(2n-1)!} \\ &= \sin 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{\cos 1}{(z-1)^{2n-1}(2n-1)!} - \frac{\sin 1}{(z-1)^{2n}(2n)!} \right) \end{aligned}$$

přičemž $\sin 1$ je regulární část rozvoje a zbytek je hlavní část. △

Kapitola 8

Teorie reziduí

8.1 Izolované singularity a rezidua

Pokud $f(z)$ je holomorfní v (ryzím) okolí $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$, tj. v $\mathscr{O}(z_0) \setminus \{z_0\}$, říkáme, že z_0 je *izolovaná singularita*. Pak na (prstencovém) okolí z_0 $P(z_0, R) := P(z_0, 0, R)$ má f Laurentův rozvoj, tj. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ pro každé $z \in P(z_0, R)$. Bod z_0 se nazývá

i) *odstranitelnou singularitou*, jestliže je hlavní část Laurentova rozvoje funkce f na $P(z_0, R)$ nulová,

ii) *pólem řádu* $n \in \mathbb{N}$, jestliže je $a_{-n} \neq 0$ a $a_{-k} = 0$ pro každé $k > n$ (pól řádu jedna nazýváme jednoduchým pólem),

iii) *podstatnou singularitou*, jestliže hlavní část Laurentova rozvoje má nekonečně mnoho nenulových členů.

Funkce $f(z)$ má v z_0 pól řádu n, jestliže $\frac{1}{f(z)}$ má v z_0 n-násobný nulový bod. Pokud má $f(z)$ v z_0 odstranitelnou singularitu, lze definovat $f(z_0)$ tak, že f je v z_0 holomorfní. Podobně můžeme klasifikovat izolované singularity pomocí limity funkce.

- Jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0 \in \mathbb{C}$, má f v z_0 odstranitelnou singularitu.
- Jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, má f v z_0 pól (nějakého řádu).
- Jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje, má f v z_0 podstatnou singularitu.

Úloha 8.1. Určete a klasifikujte singulární body funkcí

a) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$

b) $e^{\frac{1}{1-z}}$

c) $\sin \frac{1}{z}$

d) $\cos z$

e) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$

f) $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$

g) $\frac{e^z-1}{z}$

h) $\frac{z^3}{z-1}$

i) $\operatorname{tg} z$

j) $\frac{\sin z}{z}$

Řešení.

a) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$

Funkce má dvě izolované singularity, $z_0 = 0$ a $z_0 = \infty$.

- $z_0 = 0$ je podstatná singularita, neboť platí

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

takže hlavní část Laurentova rozvoje zde má nekonečně mnoho nenulových členů. Odtud víme, že limita $\lim_{z\to 0} f(z)$ neexistuje. To můžeme ukázat také přímo. Po dosazení $z = x + \mathrm{i}y$ je

$$\begin{aligned} z^2 e^{\frac{1}{z}} = (x^2 - y^2) e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \frac{y}{x^2+y^2} + 2 e^{\frac{x}{x^2+y^2}} xy \sin \frac{y}{x^2+y^2} + \\ + \mathrm{i} \left(2 e^{\frac{x}{x^2+y^2}} xy \cos \frac{y}{x^2+y^2} - (x^2 - y^2) e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \frac{y}{x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

Počítáme nyní $\lim_{z\to 0} \Re(f(z))$. Platí

$$\Re(f(z)) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left((x^2 - y^2) \cos \frac{y}{x^2+y^2} + 2xy \sin \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

a substitucí $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$ máme

$$\begin{aligned} \Re(f(z)) &= e^{\frac{\cos\varphi}{\varrho}} \left(\varrho^2 \cos^2\varphi \cos \frac{\sin\varphi}{\varrho} - \varrho^2 \sin^2\varphi \cos \frac{\sin\varphi}{\varrho} + 2\varrho^2 \sin 2\varphi \sin \frac{\sin\varphi}{\varrho} \right) \\ &= e^{\frac{\cos\varphi}{\varrho}} \varrho^2 \left(\cos^2\varphi \cos \frac{\sin\varphi}{\varrho} - \sin^2\varphi \cos \frac{\sin\varphi}{\varrho} + 2 \sin 2\varphi \sin \frac{\sin\varphi}{\varrho} \right) \end{aligned}$$

přičemž výraz napravo v závorce je ohraničený. Stačí tak počítat $\lim_{\varrho\to 0^+} \varrho^2 e^{\frac{\cos\varphi}{\varrho}}$. Jenže je-li $\varphi = \frac{\pi}{2}$, máme

$$\lim_{\varrho\to 0^+} \varrho^2 e^{\frac{0}{\varrho}} = \lim_{\varrho\to 0^+} \varrho^2 = 0$$

zatímco pro $\varphi = 0$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho\to 0^+} \varrho^2 e^{\frac{1}{\varrho}} = \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\varrho}}}{\frac{1}{\varrho^2}} = \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\varrho}} \left(-\frac{1}{\varrho^2}\right)}{-\frac{2}{\varrho^3}} = \frac{1}{2} \lim_{\varrho\to 0^+} \varrho e^{\frac{1}{\varrho}} = \\ = \frac{1}{2} \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\varrho}}}{\frac{1}{\varrho}} = \frac{1}{2} \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\varrho}} \left(-\frac{1}{\varrho^2}\right)}{-\frac{1}{\varrho^2}} = \frac{1}{2} \lim_{\varrho\to 0^+} e^{\frac{1}{\varrho}} = \infty \end{aligned}$$

takže limita neexistuje.

- $z_0 = \infty$ Počítáme $f\left(\frac{1}{z}\right)$ pro $z_0 = 0$. Pak $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}\mathrm{e}^z$. Studujme $\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^2}{\mathrm{e}^z}$. Pak dosazením $z_0 = 0$ máme

$$\left[\frac{z^2}{\mathrm{e}^z}\right]_{z=0} = 0$$

$$\left[\left(\frac{z^2}{\mathrm{e}^z}\right)'\right]_{z=0} = \left[2z\mathrm{e}^{-z} - z^2\mathrm{e}^{-z}\right]_{z=0} = 0$$

$$\left[\left(\frac{z^2}{\mathrm{e}^z}\right)''\right]_{z=0} = \left[2\mathrm{e}^{-z} - 2z\mathrm{e}^{-z} - 2z\mathrm{e}^{-z} + z^2\mathrm{e}^{-z}\right]_{z=0} = 2 \neq 0$$

tudíž $z_0 = \infty$ je pólem řádu 2 funkce $f(z) = z^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$.

b) $\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$

Funkce má v $z_0 = 1$ podstatnou singularitu, protože funkce $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ má v 0 podstatnou singularitu (to je vidět také z toho, že $\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(z-1)^{-n}$).

Naopak v $z_0 = \infty$ je funkce holomorfní (bereme $\mathrm{e}^{\frac{1}{1-\infty}} = \mathrm{e}^0 = 1 = \lim_{z\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$), takže zde nemá singulární bod.

c) $\sin\frac{1}{z}$

Funkce má v $z_0 = 0$ podstatnou singularitu ($\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}$) a v ∞ je holomorfní (nebo by měla odstranitelnou singularitu).

d) $\cos z$

Funkce má v $z_0 = \infty$ podstatnou singularitu, protože $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ je hlavní část Laurentova rozvoje v nekonečnu.

e) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$

V izolovaných singularitách $\pm\mathrm{i}$ má funkce póly řádu 2, což je snadno vidět z převrácené hodnoty funkce.

f) $\frac{1}{\mathrm{e}^z-1} - \frac{1}{z} = \frac{z-\mathrm{e}^z+1}{z(\mathrm{e}^z-1)}$

Funkce má v $z_0 = 0$ odstranitelnou singularitu, protože

$$\lim_{z\to0}\frac{z-\mathrm{e}^z+1}{z(\mathrm{e}^z-1)}\left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{z\to0}\frac{1-\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-1+z\mathrm{e}^z}\left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{z\to0}\frac{-\mathrm{e}^z}{2\mathrm{e}^z+z\mathrm{e}^z} = -\frac{1}{2}$$

V bodech $z_0 = 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ se nachází pól řádu 1, protože převrácená hodnota funkce ($\frac{z(\mathrm{e}^z-1)}{z-\mathrm{e}^z+1}$) v nich má jednoduchý kořen.

Singulární bod $z_0 = \infty$ není izolovanou singularitou, je totiž hromadným bodem pólů.

g) $\frac{e^z-1}{z}$

Funkce má dva singulární body, $z_0 = 0$ a $z_0 = \infty$. Platí

$$\frac{e^z-1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right) = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

v $P(0,\infty)$. Hlavní část rozvoje v nule je nulová, zatímco hlavní část rozvoje v nekonečnu (což je vlastně regulární část rozvoje v nule) má nekonečně mnoho nenulových členů. Bod $z_0 = 0$ je tedy odstranitelnou singularitou (a $f(0) := \lim_{z\to 0} f(z) \overset{\text{l'H. p.}}{=} 1$), bod $z_0 = \infty$ je podstatnou singularitou.

h) $\frac{z^3}{z-1}$

Zde si pomůžeme Větou 9.7 ve skriptech. Ta říká, že f má v z_0 pól řádu n právě tehdy, když $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ pro nějakou holomorfní funkci g nenulovou v z_0. Pro $z_0 = \infty$ je vztah $f(z) = z^n g(z)$. Takže můžeme psát

$$\frac{z^3}{z-1} = z^2\frac{z}{z-1}$$

přičemž z^3 je holomorfní v 1 a $\frac{z}{z-1}$ je holomorfní v ∞. Funkce f má tedy v $z_0 = 1$ pól řádu 1 a v $z_0 = \infty$ pól řádu 2.

i) $\operatorname{tg} z$

Singulárními body jsou $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Protože $\frac{1}{\operatorname{tg} z} = \operatorname{cotg} z$ je holomorfní v z_k a $(\operatorname{cotg} z_k)' = -\frac{1}{\sin^2 z_k} = -1$, jsou z_k jednoduchými póly funkce f.

Bod $z_0 = \infty$ nemůže být odstranitelnou singularitou, neboť f není ohraničená v žádném $P(\infty, r)$, ani pólem, neboť neplatí $\lim_{z\to\infty} \operatorname{tg} z = \infty$, protože v libovolném $P(\infty, r)$ existují body, v nichž $\operatorname{tg} z = 0$. Nemůže to být ani podstatná singularita, protože $\operatorname{tg} z$ nabývá v každém okolí ∞ všech hodnot s výjimkou $\pm\mathrm{i}$. Tedy ∞ je hromadným bodem pólů, není to izolovaná singularita. Podobně pro $f(z) = \operatorname{cotg} z$ jsou $z_k = k\pi$ póly řádu 1 a ∞ je jejich hromadný bod, tj. není to izolovaná singularita.

j) $\frac{\sin z}{z}$

V $z_0 = 0$ se nachází odstranitelná singularita, v $z_0 = \infty$ pak podstatná singularita. Obojí plyne z Taylorova rozvoje pro funkci $\sin z$.

△

Nechť

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

je Laurentův rozvoj funkce f v bodě z_0. Koeficient a_{-1} nazýváme *reziduem funkce f v bodě z_0*, značíme jej $\operatorname{res}_{z_0} f$. Je zřejmé, že je-li f holomorfní v z_0, je $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$.

Má-li f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ pól n-tého řádu, pak platí

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \Big((z-z_0)^n f(z) \Big)^{(n-1)} \tag{8.1}$$

a pokud je ∞ pól řádu n, je

$$\operatorname{res}_\infty f = -\frac{1}{(n+1)!} \lim_{z\to 0} \left(z^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{(n+1)}$$

Pokud $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde φ a ψ jsou holomorfní v z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ a $\psi'(z_0) \neq 0$, má f v z_0 jednoduchý pól a platí $\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Připomeneme si ještě důležitý výsledek k počítání integrálů, totiž reziduovou větu.

Věta (Reziduová věta pro Jordanovu cestu)**.** *Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast a γ je kladně orientovaná Jordanova cesta ležící v Ω. Nechť dále funkce f je holomorfní na množině $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$, kde $z_1, \dots, z_n \in \operatorname{Int}\gamma$ a $m \in \mathbb{N}$. Potom platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{z_k} f$$

Důkaz. Skripta, Věta 9.14. □

Úloha 8.2. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$.

Řešení. Funkce f je racionální lomená. Jejími singularitami budou nulové body jmenovatele, zde $z_{1,2} = \pm 1$ a $z_{3,4,5} = 0$, tj. ± 1 jsou jednoduché póly a 0 je trojnásobný pól. Počítáme podle vzorce (8.1).

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_1 f &= \frac{1}{1}\lim_{z\to 1}\left((z-1)\frac{1}{(z-1)(z+1)z^3}\right)^{(0)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)z^3} = \frac{1}{2}\\
\operatorname{res}_{-1} f &= \lim_{z\to -1}\frac{1}{(z-1)z^3} = \frac{1}{2}\\
\operatorname{res}_0 f &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\frac{1}{z^3(z-1)(z+1)}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z}{(1-z^2)^2}\right)' =\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2(1-z^2)^2+8z^2(1-z^2)}{(1-z^2)^4} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2+6z^2}{(1-z^2)^3} = \frac{1}{2}\frac{2}{1} = 1
\end{aligned}$$

△

Úloha 8.3. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$.

Řešení. Body $z_0 = \pm\mathrm{i}$ jsou póly druhého řádu. Takže platí

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f = \lim_{z\to\mathrm{i}}\left((z-\mathrm{i})^2\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right)' = \lim_{z\to\mathrm{i}}\left(\frac{z^2}{(z+\mathrm{i})^2}\right)' = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{2\mathrm{i}z}{(z+\mathrm{i})^3} = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f = \lim_{z\to-\mathrm{i}} \left((z+\mathrm{i})^2 \frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right)' = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{-2\mathrm{i}z}{(z-\mathrm{i})^3} = \frac{\mathrm{i}}{4}$$

△

Úloha 8.4. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

Řešení. Platí

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

kde $\varphi(z) \equiv 1$ a $\psi(z) = \sin z$ jsou holomorfní na $\mathbb{C}$. Body $z_0 = k\pi$ jsou póly prvního řádu a platí

$$\operatorname{res}_{k\pi} f = \frac{1}{\sin' k\pi} = \frac{1}{\cos k\pi} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k$$

△

Úloha 8.5. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

Řešení. Funkce má v $z_0 = -1$ jediný pól třetího řádu. Takže

$$\operatorname{res}_{-1} f = \frac{1}{2} \lim_{z\to-1} \left((z+1)^3 \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to-1} (\sin 2z)'' =$$

$$= \lim_{z\to-1} \frac{1}{2}(2\cos 2z)' = \lim_{z\to-1}(-2\sin 2z) = 2\sin 2$$

△

Úloha 8.6. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^z-1}$.

Řešení. Body $z = 2k\pi\mathrm{i}$ jsou póly prvního řádu pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Takže

$$\operatorname{res}_{2k\pi\mathrm{i}} \frac{1}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{1}{\left[(\mathrm{e}^z-1)'\right]_{z=2k\pi\mathrm{i}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}} = 1$$

△

Úloha 8.7. Vypočtěte rezidua funkce $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+k^2}$.

Řešení. Zřejmě stačí počítat rezidua jen v singulárních bodech, jinde jsou nulová.

Pokud $k = 0$, máme $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2}$ a funkce má v 0 pól řádu 2, tedy

$$\operatorname{res}_0 f = \frac{1}{2}\lim_{z\to0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})' = \frac{\mathrm{i}}{2}\lim_{z\to0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \frac{\mathrm{i}}{2}$$

Pro $k \neq 0$ máme dva jednoduché póly v $z = \pm k\mathrm{i}$ a platí

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}k} f = \lim_{z\to\mathrm{i}k}(z-\mathrm{i}k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i}k)(z+\mathrm{i}k)} = \frac{\mathrm{e}^{-k}}{2\mathrm{i}k} = -\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-k}}{2k}$$

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}k} f = \lim_{z\to-\mathrm{i}k}(z+\mathrm{i}k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i}k)(z+\mathrm{i}k)} = -\frac{\mathrm{e}^{k}}{2\mathrm{i}k} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{k}}{2k}$$

△

Úloha 8.8. Vypočtěte rezidua funkce $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. V $z_0 = -1$ má funkce f pól n-tého řádu, jinde je holomorfní a má nulové reziduum. Pak platí

$$\operatorname{res}_{-1} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to -1} (z^{2n})^{(n)} =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}(2n)(2n-1) \cdot \dots \cdot (n+2)(-1)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

△

Úloha 8.9. Určete rezidua pro funkci $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$.

Řešení. Funkce má pól řádu dva v bodě $z = 0$, proto podle (8.1) máme

$$\operatorname{res}_0 f = \lim_{z \to 0} \left(z^2 \frac{\sin z}{z^2} \right)' = \lim_{z \to 0} \cos z = 1$$

△

Úloha 8.10. Určete reziduum pro funkci $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$.

Řešení. Funkce má v bodě $z = 1$ podstatnou singularitu. Pomocí Taylorova rozvoje pro $\sin w$ a dosazením $w = \frac{1}{1-z}$ máme Laurentův rozvoj

$$\sin \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{1-z} \right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$$

a reziduum je koeficient pro $n = 0$, takže $\operatorname{res}_1 f = (-1)^{0+1} \frac{1}{(2 \cdot 0+1)!} = -1$. △

Úloha 8.11. Určete reziduum pro funkci $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

Řešení. Funkce f má v bodě $z = -1$ pól třetího řádu. Proto podle (8.1)

$$\operatorname{res}_{-1} f = \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \left((z+1)^3 \frac{\sin 2z}{(z+1)^3} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} (\sin 2z)'' = \lim_{z \to -1} (\cos 2z)' = 2 \sin 2$$

△

Úloha 8.12. Pomocí reziduí vypočtěte

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$$

kde $\Gamma\colon\ |z| = \frac{1}{2}$ je kladně orientovaná kružnice.

Řešení. Funkce $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ má dvě izolované singularity, jednoduchý pól v 0 (leží v $\operatorname{Int}\Gamma$) a pól řádu dva v 1 (leží v $\operatorname{Ext}\Gamma$). Spočítáme

$$\operatorname{res}_0 f = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-1)^2} = 1$$

takže $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2} = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_0 f = 2\pi\mathrm{i}$ podle reziduové věty. △

Úloha 8.13. Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, kde $\Gamma\colon\ |z+1+\mathrm{i}| = 2$ je kladně orientovaná kružnice.

Řešení. Funkce má jednoduché póly v bodech 0 a $\pm\mathrm{i}$. Z těchto bodů leží 0 a $-\mathrm{i}$ uvnitř $\operatorname{Int}\Gamma$ (vždyť $|0+1+\mathrm{i}| = \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$ a $|-\mathrm{i}+1+\mathrm{i}| = 1 < 2$), zatímco i leží vně kružnice (protože $|\mathrm{i}+1+\mathrm{i}| = \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$). Počítáme proto rezidua v 0 a $-\mathrm{i}$. Podle (8.1) snadno zjistíme, že $\operatorname{res}_0 f = 1$ a $\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}}{2}$. Proto

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\operatorname{res}_0 f + \operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f) = 2\pi\mathrm{i}(1 + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}}{2}) = \pi\sin 1 + \mathrm{i}(2\pi - \pi\cos 1)$$

△

Úloha 8.14. Vypočtěte

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2+\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z$$

kde $\Gamma\colon\ |z+\mathrm{i}| = 3$ je kladně orientovaná kružníce.

Řešení. Použijeme reziduovou větu. Funkce má dvě izolované singularity, $z = 0$ a $z = \mathrm{i}$, přičemž obě leží uvnitř kruhu $\operatorname{Int}\Gamma$ ($|0+\mathrm{i}| = 1 < 3$ a $|\mathrm{i}+\mathrm{i}| = 2 < 3$). Počítáme tedy rezidua funkce f v těchto bodech.

V $z = 0$ má funkce odstranitelnou singularitu, protože

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z(z+\mathrm{i})}\left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H. p.}}{=} \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2z+\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i} \in \mathbb{C}$$

takže můžeme dodefinovat hodnotu $f(0)$ tak, aby byla funkce holomorfní a $\operatorname{res}_0 f = 0$. V $z = -\mathrm{i}$ má funkce pól prvního řádu (tj. jednoduchý pól) a platí

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f = \lim_{z\to -\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})\frac{\sin z}{z(z+\mathrm{i})} = \lim_{z\to -\mathrm{i}}\frac{\sin z}{z} = -\frac{\sin \mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -\frac{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2} = \sinh 1$$

Pak podle reziduové věty máme

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2+\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(0+\sinh 1) = 2\pi\mathrm{i}\sinh 1 = \pi\mathrm{i}\left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}\pi\mathrm{i}$$

△

Úloha 8.15. Vypočtěte

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$$

kde $\Gamma\colon\ |z+\mathrm{i}|=1$.

Řešení. Funkce má dva póly druhého řádu, $z=\pm\mathrm{i}$, z nichž pouze $z=-\mathrm{i}$ leží uvnitř $\operatorname{Int}\Gamma$ ($|-\mathrm{i}+\mathrm{i}|=0<1$, ale $|\mathrm{i}+\mathrm{i}|=2>1$). Proto počítáme reziduum v bodě $-\mathrm{i}$.

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to-\mathrm{i}}\left((z+\mathrm{i})^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^2(z-\mathrm{i})^2}\right)' = \lim_{z\to-\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})^2}\right)' =$$
$$= \lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}(z-\mathrm{i})+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})^3} = \frac{-2\mathrm{e}+2\mathrm{e}}{(-\mathrm{i})^3}=0$$

takže

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

△

Úloha 8.16. Vypočtěte

$$\int_\Gamma \frac{3+2\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z$$

kde $\Gamma\colon\ |z|=2$.

Řešení. Funkce f má jednoduché póly v bodech $z=2k\pi\mathrm{i}$, $k\in\mathbb{Z}$. Počítáme

$$\operatorname{res}_{2k\pi\mathrm{i}} f(z) = \lim_{z\to 2k\pi\mathrm{i}}\frac{(z-2k\pi\mathrm{i})(3+2\mathrm{e}^{-z})}{\mathrm{e}^z-1} \overset{\text{l'H. p.}}{=} \lim_{z\to 2k\pi\mathrm{i}}\frac{3+2\mathrm{e}^{-z}-2(z-2k\pi\mathrm{i})\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z}=5$$

Z pólů leží uvnitř $\operatorname{Int}\Gamma$ pouze $z=0$ ($|2k\pi\mathrm{i}|=2\,|k|\,\pi<1$ pouze pro $k=0$), takže

$$\int_\Gamma \frac{3+2\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot 5 = 10\pi\mathrm{i}$$

△

Úloha 8.17. Vypočtěte

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z$$

podél křivky $\Gamma\colon \Re(z)^2+\Im(z)^2=2\Re(z)$.

Řešení. Nejprve popíšeme křivku Γ. Substitucí $z=x+\mathrm{i}y$ máme $x^2+y^2=2x$ a odtud $(x-1)^2+y^2=1$, tj. kružnici $|z-1|=1$. Funkce $\frac{1}{z^4+1}$ má čtyři jednoduché póly, $\pm\sqrt{\pm\mathrm{i}} = \pm\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \pm\left(\frac{\sqrt2}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt2}{2}\right)$. Z nich pouze $\frac{\sqrt2}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt2}{2}$ leží v $\operatorname{Int}\Gamma$. Protože platí

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{\frac{1}{\left(z+\frac{\sqrt2}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt2}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt2}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{\left(z-\frac{\sqrt2}{2}\mp\mathrm{i}\frac{\sqrt2}{2}\right)}$$

máme

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}} f &= \left[\frac{1}{\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right]_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}\right)\left(\pm i\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{(2\pm i2)\left(\pm i\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\pm 2i\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{-1\pm i} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{-1\mp i}{2} = \frac{\sqrt{2}(-1\mp i)}{8}
\end{aligned}
$$

takže

$$
\int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}(-1-i)}{8}+\frac{\sqrt{2}(-1+i)}{8}\right) = -2\pi i\frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{\pi i\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}
$$

△

Úloha 8.18. Vypočtěte $I = \int_\Gamma \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, kde $\Gamma\colon\ |z-2| = \frac{1}{2}$. (neřešené, výsledek: $I = -2\pi i$)

Úloha 8.19. Vypočtěte $I = \int_\Gamma \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, kde $\Gamma\colon\ |z| = 2$. (neřešené, výsledek: $I = -\frac{\pi i}{121}$)

Úloha 8.20. Vypočtěte $I = \int_\Gamma \frac{dz}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$, kde $\Gamma(t) = 2\cos^3 t + 2i\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$.[1] (neřešené, výsledek: $I = \frac{3\pi i}{64}$)

Úloha 8.21. Vypočtěte $I = \int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, kde $\Gamma(t) = (1+2\cos t)+i(1+2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (neřešené, výsledek: $-\frac{\pi i}{2}$)

Úloha 8.22. Vypočtěte (reálný) integrál

$$
I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5-4\cos\varphi}\,d\varphi
$$

Řešení. Uvažujme substituci $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Odtud $\cos\varphi = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ a $\cos 3\varphi = \frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{2}$, $dz = iz\,d\varphi$. Interval $[0, 2\pi]$ se transformuje na kružnici $\Gamma\colon\ |z| = 1$ a

$$
\frac{\cos 3\varphi}{5-4\cos\varphi} = \frac{\frac{z^6+1}{2z^3}}{5-2\frac{z^2+1}{z}} = \frac{\frac{z^6+1}{2z^3}}{\frac{5z-2z^2-2}{z}} = -\frac{z^6+1}{2z^2(2z^2-5z+2)} = -\frac{z^6+1}{2z^2(2z-1)(z-2)}
$$

takže

$$
I = -\frac{1}{2i}\int_\Gamma \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,dz
$$

[1] Křivka Γ je asteroida.

přičemž v $\operatorname{Int}\Gamma$ leží singulární body $z = 0$ (trojnásobný pól) a $z = \frac{1}{2}$ (jednoduchý pól). Zjistíme $\operatorname{res}_0 f = \frac{21}{8}$ a $\operatorname{res}_{\frac{1}{2}} f = -\frac{65}{24}$ (například pomocí (8.1)) a máme podle reziduové věty výsledek.

$$I = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24}\right) = -\frac{2\pi}{24} = -\frac{\pi}{12}$$

△

8.2 Fourierovy a jiné reálné integrály

Nejprve se budeme zabývat integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin kx\,\mathrm{d}x$$

Věta (9.17A ze skript). *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit, přičemž na reálné ose připouštíme pouze póly řádu jedna. Nechť $k > 0$ a $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Jestliže funkce f nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot a jestliže $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos kx\,\mathrm{d}x$ existuje, pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos kx\,\mathrm{d}x = \Re\left[2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(w)>0}\operatorname{res}_w\left(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right) + \pi\mathrm{i}\sum_{\Im(w)=0}\operatorname{res}_w\left(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right)\right]$$

Jestliže funkce f nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot a jestliže $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin kx\,\mathrm{d}x$ existuje, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin kx\,\mathrm{d}x = \Im\left[2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(w)>0}\operatorname{res}_w\left(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right) + \pi\mathrm{i}\sum_{\Im(w)=0}\operatorname{res}_w\left(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right)\right]$$

Poznámka. Je-li f dle předpokladů věty a jsou-li póly na reálné ose tvaru $(2m+1)\frac{\pi}{2k}$ respektive $m\frac{\pi}{k}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, pak uvedené integrály existují.

Úloha 8.23. Vypočtěte

a) $I_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, b) $I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

a) Máme funkci $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, která na reálné ose nabývá pouze reálných hodnot $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pro $x \in \mathbb{R}$ a platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Funkce má v bodech $\pm\mathrm{i}$ jednoduché póly (pouze i má $\Im(\mathrm{i}) \geq 0$), takže počítáme

$$\operatorname{res}_\mathrm{i} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}1z} = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{e}}$$

a $I_c = \Re\left[2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}\right] = \frac{\pi}{\mathrm{e}}$.

b) Máme funkci $f(z) = \frac{1}{4+z^2}$, která na reálné ose nabývá pouze reálných hodnot a platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Tato funkce má jednoduché póly $\pm 2\mathrm{i}$, přičemž pouze $\Im(2\mathrm{i}) \geq 0$. Takže

$$I_s = \Im\left[2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{4+z^2}\right] = \Im\left[2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{2+2\mathrm{i}}\right] = \Im\left[\frac{2\pi\mathrm{i}}{4\mathrm{i}\mathrm{e}}\right] = 0$$

Obecně platí

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}\mathrm{e}^{-kn} \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kx}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}y = 0$$

pro $k > 0$, $n > 0$. △

Úloha 8.24. Vypočítejte $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, tzv. „integrál sinus“ (porovnejte s cvičením 6.31, strana 109).

Řešení. Máme funkci $f(z) = \frac{1}{z}$, která nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot a platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Funkce má v 0 pól řádu jedna. Platí $\mathrm{res}_0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$ a

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\infty^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Im(\pi\mathrm{i}1) = \frac{\pi}{2}$$

△

Úloha 8.25. Vypočítejte

a) $I_c = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ a $I_s = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

b) $I_c = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$ a $I_s = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$
(neřešené, výsledek: $I_c = \frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$ a $I_s = \frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(3\cos 1 + \sin 1)$)

c) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$ (neřešené, výsledek: $\frac{\pi}{18}(16\mathrm{e}^{-5} + \mathrm{e}^{-10})$)

Řešení. Máme funkci $f(z) = \frac{z}{z^2+z+1}$, která na reálné ose nabývá pouze reálných hodnot a $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. V horní polorovině má pól prvního řádu $z_0 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\mathrm{res}_{z_0} = \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+z+1} = \frac{z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0}}{2z_0+1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{1}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{i}\sqrt{3}}$$

takže

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{1}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{i}\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(-\cos\frac{1}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{1}{2} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3}\cos\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2}\right)\right)$$

a odtud

$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(-\cos\frac{1}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\right)$$
$$I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2}\right)$$

△

Kromě Fourierových integrálů se budeme zabývat i použitím reziduí k výpočtům jiných typů reálných integrálů.

Úloha 8.26. Vypočítejte

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2p\cos x + p^2}$$

kde $p \in \mathbb{R}$ tak, že $0 < |p| < 1$.

Řešení. Integrál vypočítáme pomocí reziduové věty. Označme $\gamma\colon\ |z| = 1$. Platí

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2p\cos x+p^2} = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(1-p\left(z+\frac{1}{z}\right)+p^2\right)} =$$
$$= \mathrm{i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{pz^2-(p^2+1)z+p} = \mathrm{i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}$$

kde $p \in \operatorname{Int}\gamma$ a $\frac{1}{p} \in \operatorname{Ext}\gamma$, takže

$$\operatorname{res}_p \frac{1}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)} = \lim_{z\to p}(z-p)\frac{1}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{p\left(p-\frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{p^2-1}$$

takže $I = \mathrm{i}2\pi\mathrm{i}\frac{1}{p^2-1} = \frac{2\pi}{1-p^2}$ (podobně bychom pro $|p| > 1$ dostali $I = \frac{2\pi}{p^2-1}$). △

Věta (9.17 ze skript)**.** *Nechť $Q(u,v)$ je komplexní racionální funkce, tj. $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ a $Q(u,v) = \frac{P(u,v)}{R(u,v)}$, kde P, R jsou komplexní polynomy. Nechť $R(u,v) \neq 0$ pro každé $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ takové že $u^2+v^2 = 1$. Pak*

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{|w|<1} \operatorname{res}_w f$$

kde $f(z) := \frac{1}{z}Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$.

Vidíme, že úlohu 8.26 jsme mohli spočítat i pomocí předchozí věty.

Úloha 8.27. Vypočítejte

a) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{a^2+b^2-2ab\cos x}\,\mathrm{d}x$ kde $b > a > 0$

b) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+a\cos t}$ kde $|a| < 1$ (neřešené, výsledek: $I = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$).

Řešení. Máme funkci $Q(c,s) = \frac{c^2-s^2}{a^2+b^2-2abc}$, protože $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Funkce Q splňuje předpoklady předchozí věty, proto máme

$$f(z) = \frac{1}{z}Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z}\frac{\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}{a^2+b^2-ab\left(z+\frac{1}{z}\right)} =$$

$$= \frac{1}{z}\frac{\frac{1}{4}\left(z^{+}\cancel{2}+\frac{1}{z^2}+z^2-\cancel{2}+\frac{1}{z^2}\right)}{a^2+b^2-ab\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}{a^2z+b^2z-abz^2-ab} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z^4+1}{a^2z^3+b^2z^3-abz^4-abz^2} = \frac{1}{2ab}\frac{z^4+1}{z^2\left(\frac{a}{b}z+\frac{b}{a}z-z^2-1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2ab}\frac{z^4+1}{z^2\left(z-\frac{a}{b}\right)\left(z-\frac{b}{a}\right)}$$

takže $f(z)$ má dvojnásobný pól pro $z = 0$ a jednoduché póly pro $z = \frac{a}{b}$ a $z = \frac{b}{a}$ (který však neleží v $|z| < 1$, protože $b > a$). Platí (například z (8.1))

$$\operatorname{res}_0 f = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \qquad\qquad \operatorname{res}_{\frac{a}{b}} f = -\frac{a^4+b^4}{ab(b^2-a^2)}$$

takže

$$I = -\frac{2\pi}{2ab}\left(\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^4+b^4}{ab(b^2-a^2)}\right) = -\frac{2\pi(a^2+b^2)(b^2-a^2) - 2\pi(a^4+b^4)}{2a^2b^2(b^2-a^2)} =$$

$$= -\frac{\pi(-a^{\cancel{4}2}+\cancel{b^4}-a^{\cancel{4}2}-\cancel{b^4})}{\cancel{a^2}b^2(b^2-a^2)} = \frac{\pi a^2}{b^2(b^2-a^2)}$$

△

Věta (9.16 ze skript)**.** *Nechť komplexní funkce f má následující vlastnosti:*

i) f je holomorfní pro $\Im(z) > 0$ a spojitá pro $\Im(z) \geq 0$ s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit neležících na reálné ose,

ii) platí

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \Im(z)\geq 0}} f(z) = 0$$

iii) integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\Im(w)>0}\operatorname{res}_w f$$

Poznámka. Předpoklady i) až iii) jsou splněny, např. je-li f racionální lomená funkce, která nemá póly na reálné ose a stupeň jmenovatele je alespoň o dva větší než stupeň čitatele.

Úloha 8.28. Vypočítejte

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^6+1}$ splňuje podle poznámky předpoklady předchozí věty, má póly prvního řádu pro $z^6 = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, tj. v bodech $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)}$, kde $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$. V „horní“ polorovině leží z_0, z_1 a z_2. Platí podle $f(z) = \frac{1}{z^6+1} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$$\operatorname{res}_{z_k} \frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{z_k}{6z_k^6} = -\frac{1}{6}z_k$$

takže

$$I = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{6}z_0 - \frac{1}{6}z_1 - \frac{1}{6}z_2\right) = -\frac{\pi\mathrm{i}}{3}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi}\right) =$$

$$= -\frac{\pi\mathrm{i}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2} + \mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi\mathrm{i}}{3}2\mathrm{i} = \frac{2}{3}\pi$$

△

Úloha 8.29. Vypočítejte

a) $I = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^4}$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}$ (neřešené, výsledek: $I = -\frac{\pi}{27}$)

Řešení. Funkce $(z^2+a^2)^{-4}$ má póly čtvrtého řádu pro $z = \pm a\mathrm{i}$, přičemž pouze $z = a\mathrm{i}$ leží v „horní“ polorovině. Podmínky ii) a iii) jsou jistě splněny. Užití vzorce (8.1) může být pracné. Uvažme proto $z = a\mathrm{i} + \xi$, pak

$$\frac{1}{(z^2+a^2)^4} = \frac{1}{(2a\mathrm{i}\xi+\xi^2)^4} = \frac{1}{(2a\mathrm{i}\xi)^4}\left(1 - \frac{\mathrm{i}\xi}{2a}\right)^{-4}$$

Hodnota ξ^{-1} je dána jako

$$\frac{1}{(2a)^4}\frac{(-4)(-5)(-6)}{3!}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2a}\right) = -\frac{5\mathrm{i}}{32a^7}$$

proto podle předchozí věty máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^4} = 2\pi\mathrm{i}\frac{-5\mathrm{i}}{32a^7} = \frac{10\pi}{32a^7}$$

a tak máme $I = \frac{5\pi}{32a^7}$. △

Věta (9.17B ze skript)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit neležících v intervalu $(0,\infty)$. Nehchť $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ je takové, že*

$$\lim_{z\to\infty}|z|^a f(z) = 0 \lim_{z\to 0}|z|^a f(z)$$

Jestliže integrál $\int_0^\infty x^{a-1}f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, potom

$$\int_0^\infty x^{a-1}f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi a}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{res}_w\left[(-z)^{a-1}f(z)\right]$$

kde $(\cdot)^{a-1}$ značí jednoznačnou větev mocniny, tj, $(\cdot)^{a-1}=\mathrm{e}^{(a-1)\log(\cdot)}$.

Poznámka. Nechť Q je racionální lomená funkce nemající póly na intervalu $[0,\infty)$. Je-li stupeň jmenovatele funkce Q vyšší než stupeň čitatele a $a\in(0,1)$, pak

$$\int_0^\infty Q(x)x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi a}\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{res}_w\left[(-z)^{a-1}Q(z)\right]$$

kde $(\cdot)^{a-1}$ značí jednoznačnou větev mocniny.

Úloha 8.30. Nechť $-1<a<1$ a $b>0$. Vypočítejte

$$I=\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Platí $I=\int_0^\infty \frac{x}{x^2+b^2}x^{a-1}\,\mathrm{d}x$. Funkce $\frac{z(-z)^{a-1}}{z^2+b^2}$ má póly prvního řádu v $\pm b\mathrm{i}$ a

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\mathrm{i}b}\frac{z(-z)^{a-1}}{z^2+b^2} &= \lim_{z\to\mathrm{i}b}(z-\mathrm{i}b)\frac{z(-z)^{a-1}}{z^2+b^2} = \lim_{z\to\mathrm{i}b}\frac{z(-z)^{a-1}}{z+\mathrm{i}b} = \\
&= \frac{\mathrm{i}b\mathrm{e}^{(a-1)\left(\ln b+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)}}{2\mathrm{i}b} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(a-1)\left(\ln b+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)} \\
\operatorname{res}_{-\mathrm{i}b}\frac{z(-z)^{a-1}}{z^2+b^2} &= \lim_{z\to-\mathrm{i}b}(z+\mathrm{i}b)\frac{z(-z)^{a-1}}{z^2+b^2} = \lim_{z\to-\mathrm{i}b}\frac{z(-z)^{a-1}}{z-\mathrm{i}b} = \\
&= \frac{-\mathrm{i}b\mathrm{e}^{(a-1)\left(\ln b-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)}}{-2\mathrm{i}b} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(a-1)\left(\ln b-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{\sin\pi a}\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{(a-1)\left(\ln b+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)}+\mathrm{e}^{(a-1)\left(\ln b-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \\
&= \frac{\pi}{2\sin\pi a}\mathrm{e}^{(a-1)\ln b}\left(\cos(a-1)\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin(a-1)\frac{\pi}{2}+\cos(a-1)\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin(a-1)\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \frac{\pi}{2\sin\pi a}b^{a-1}2\cos(a-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sin\pi a}b^{a-1}\left(\cos\frac{\pi a}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\pi a 2\sin\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}\cos\frac{\pi a}{2}}\sin\frac{\pi a}{2} = \frac{\pi b^{a-1}}{2\cos\frac{\pi a}{2}}
\end{aligned}$$

△

Poznámka. Integrál
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$
pro $a \in (0,1)$ se pomocí substituce $u = \mathrm{e}^x$ převede na integrál
$$\int_0^{\infty} f(u)u^{a-1}\,\mathrm{d}u$$
který byl popsán v předchozí větě (za splnění příslušných předpokladů).

Úloha 8.31. Uvažme $0 < a < 1$. Vypočítejte

a) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$,

b) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$ (neřešené, výsledek: $I = \frac{\pi}{\sin \pi a}$).

Řešení. Substitucí $u = \mathrm{e}^x$ máme
$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} u^{a-1}\,\mathrm{d}u$$
Funkce $f(u) = \frac{1}{1+u^2}$ má dva jednoduché póly v $u = \pm\mathrm{i}$. Počítáme rezidua.
$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} \frac{(-u)^{a-1}}{1+u^2} = \lim_{u\to\mathrm{i}} \frac{(-u)^{a-1}}{(u+\mathrm{i})(u-\mathrm{i})}(u-\mathrm{i}) = \lim_{u\to\mathrm{i}} \frac{(-u)^{a-1}}{u+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-(a-1)\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-(a-1)\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$
$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} \frac{(-u)^{a-1}}{1+u^2} = \lim_{u\to-\mathrm{i}} \frac{(-u)^{a-1}}{u-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{(a-1)\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{-2\mathrm{i}} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(a-1)\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$
takže
$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{\sin \pi a}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-(a-1)\frac{\pi}{2}\right)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left((a-1)\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin \pi a}\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\cos\frac{\pi(a-1)}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{(a-1)\pi}{2} - \cos\frac{\pi(a-1)}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{(a-1)\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2\sin \pi a}\left(-2\sin\frac{(a-1)\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}\cos\frac{\pi a}{2}}\left(-\cos\frac{\pi a}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}} \end{aligned}$$
△

Věta (9.17C ze skript)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit neležících v intervalu $(0,\infty)$. Nechť dále f nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot a nechť*
$$\lim_{z\to\infty}\left(z\ln^2|z|\,f(z)\right) = 0 = \lim_{z\to 0}\left(z\ln^2|z|\,f(z)\right)$$
Jeslitže existuje $\int_0^{\infty}\ln(x)f(x)\,\mathrm{d}x$, potom
$$\int_0^{\infty}\ln(x)f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\Re\left(\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{res}_w\left(f(z)\log_0^2 z\right)\right)$$

Podobně, pokud existuje $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, pak

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\Im\left(\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{res}_w \left(f(z)\log_0^2 z\right)\right)$$

Poznámka. Je-li Q racionální lomená funkce, která nemá póly na intervalu $[0,\infty)$, je reálná na reálné ose a má stupeň jmenovatele alespoň o dva větší než stupeň čitatele, pak

$$\int_0^\infty Q(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\Re\left(\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{res}_w \left(Q(z)\log_{2\pi}^2 z\right)\right)$$

a

$$\int_0^\infty Q(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\Im\left(\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{res}_w \left(Q(z)\log_{2\pi}^2 z\right)\right)$$

Úloha 8.32. Vypočítejte

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Funkce $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ má póly druhého řádu v $z = \pm\mathrm{i}$. Počítáme v nich rezidua.

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} \frac{\log_{2\pi}^2 z}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to\mathrm{i}} \left(\frac{\log_{2\pi}^2 z}{(z^2+1)^2}(z-\mathrm{i})^2\right)' = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{2\log_{2\pi} z\frac{1}{z}(z+\mathrm{i}) - 2\log_{2\pi}^2 z}{(z+\mathrm{i})^3} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\mathrm{i}}\mathrm{i}\frac{\pi}{2}2\mathrm{i} - 2\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)^2}{-8\mathrm{i}} = \frac{2\pi\mathrm{i} + \frac{\pi^2}{2}}{-8\mathrm{i}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16}\mathrm{i}$$

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} \frac{\log_{2\pi}^2 z}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to-\mathrm{i}} \frac{2\log_{2\pi} z\frac{1}{z}(z-\mathrm{i}) - 2\log_{2\pi}^2 z}{(z-\mathrm{i})^3} = \frac{6\pi\mathrm{i} + \frac{9\pi^2}{2}}{8\mathrm{i}} = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\pi^2}{16}\mathrm{i}$$

Takže máme

$$I = -\frac{1}{2}\Re\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16}\mathrm{i} + \frac{3\pi}{4} - \frac{9\pi^2}{16}\mathrm{i}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

△

Úloha 8.33. Vypočítejte

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

Řešení. (jen kostra) Máme funkci $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$. Tato má jednoduché póly v bodech $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{4}\pi}$ a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7}{4}\pi}$. Spočítáme rezidua v těchto bodech. Hodnota integrálu je rovna imaginární části jejich součtu podělená číslem -2π. Výsledek je $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. △

Další podobné příklady a teorii je možné najít v [2, strany 299–308].

Kapitola 9

Seznam úloh

Řešení úloh jsou někdy textově dlouhá a sbírka se tak nehodí k procvičování. Tato poslední kapitola proto obsahuje seznam zadání úloh a výsledky početních příkladů. U cvičení zaměřených na důkazy nebo náčrty se pak nachází odkaz na stránku s řešením. Kapitola je rozdělena do sekcí, které odpovídají předchozím kapitolám. Sekce v jednotlivých kapitolách sbírky zde odpovídají odstavcům.

9.1 Komplexní čísla

Úloha 1.1. Zjednodušte následující číselné výrazy: 1. $(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ (výsledek $-1+3\mathrm{i}$), 2. $\mathrm{i}+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^{15}+\mathrm{i}^{29}$ (výsledek 0), 3. $\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$ (výsledek $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$). Úloha 1.2. Dokažte, že $\Im(\mathrm{i}z)=\Re(z)$, viz strana 8. Úloha 1.3. Dokažte, že pro každé $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ platí $(z^{-1})^{-1}=z$, viz strana 8. Úloha 1.4. Ukažte, že $\sqrt{2}\,|z|\geq|\Re(z)|+|\Im(z)|$, viz strana 9. Úloha 1.5. Dokažte „rovnoběžníkovou rovnost“ $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ a geometricky ji interpretujte, viz stranu 9. Úloha 1.6. Dokažte $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|$. Ukažte, že $|\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n|<1$ pro $|a_i|<1$, $\lambda_i\geq0$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, $i=1,2,\ldots,n$. Viz strany 9 – 11. Úloha 1.7. Dokažte Cauchyho-Schwartzovu-Buňakovského nerovnost a s její pomocí ukažte, že 1. $\sum_{i=1}^n\frac{|a_i|^2}{i}\geq\frac{2}{n(n+1)}$ pro $|\sum_{i=1}^na_i|=1$, 2. $\sum_{i=1}^n\frac{1}{|a_i|}\geq n^2$ pro $\sum_{i=1}^n|a_i|=1$ a $a_i\neq0$ pro každé i. Viz strany 11 – 12. Úloha 1.8. Určete optimální (největší a nejmenší možné) konstanty A, B tak, že $A(1+|y|)\leq|1+\mathrm{i}y|\leq B(1+|y|)$, výsledek: $A=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $B=1$. Úloha 1.9. Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $|z|+z=3+\mathrm{i}$, výsledek $z=\frac{4}{3}+\mathrm{i}$. Úloha 1.10. Určete řešení kvadratických rovnic v základním tvaru, viz strany 13 – 14. Úloha 1.11. Určete algebraický tvar čísla $z\in\mathbb{C}$ takového, že: 1. $z^2=-3-4\mathrm{i}$ (výsledek $1-2\mathrm{i}$ a $-1+2\mathrm{i}$) 2. $z^2-3z+3-\mathrm{i}=0$ (výsledek $2+\mathrm{i}$ a $1-\mathrm{i}$) 3. $z^2-(2+\mathrm{i})z+3+\mathrm{i}=0$ (výsledek $1+2\mathrm{i}$ a $1-\mathrm{i}$) 4. $z^2-2z+2=0$ (výsledek $1\pm\mathrm{i}$).

Úloha 1.12. Mějme $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi}$. Určete z^2, z^3, z^4, $\overline{z}$ a načrtněte body 1, $1+z$, $1+z+z^2$, $1+z+z^2+z^3$, $1+z+z^2+z^3+z^4$ v komplexní rovině. Výsledek $z^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{5}\pi}$, $z^3=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4}{5}\pi}$ a $z^4=\overline{z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi}$. Náčrt se nachází na obrázku 1.2 na straně 17. Úloha 1.13. Určete algebraický tvar $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$, výsledek $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. Úloha 1.14. Určete velikost a argument (arg i Arg) komplexních čísel: 1. $z = -1 + \mathrm{i}$ (výsledek $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$), 2. $z = \mathrm{i}$ (výsledek $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$). Úloha 1.15. Určete goniometrický tvar následujících komplexních čísel 1. $z = b\mathrm{i}$ (výsledek $|b|\left(\cos \operatorname{sgn}(b)\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin \operatorname{sgn}(b)\frac{\pi}{2}\right)$), 2. $z = a$ (výsledek $a(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$ pro $a > 0$ a $-a(\cos -\pi + \mathrm{i}\sin -\pi)$ pro $a < 0$), 3. $z = \pm(2 \pm 5\mathrm{i})$ (výsledek $2 \pm 5\mathrm{i} = \sqrt{29}\left(\cos \pm\frac{5}{2} + \mathrm{i}\sin \pm\frac{5}{2}\right)$, $-2 - 5\mathrm{i} = \sqrt{29}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{2} - \pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{2} - \pi\right)\right)$, $-2 + 5\mathrm{i} = \sqrt{29}\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right)\right)$). Úloha 1.16. Převodem na goniometrický tvar vypočtěte 1. $(1 + \mathrm{i})^{10}$ (výsledek $32\mathrm{i}$), 2. $(-2 + 2\mathrm{i})^6$ (výsledek $512\mathrm{i}$), 3. $\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)^8$ (výsledek $-128+128\mathrm{i}\sqrt{3}$), 4. $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\right)^5$ (výsledek $-\frac{16}{9}+\mathrm{i}\frac{16\sqrt{3}}{27}$), 5. $\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{10}$ (výsledek $512 - 512\mathrm{i}\sqrt{3}$). Úloha 1.17. Pomocí geometrického tvaru komplexního čísla nalezněte všechny komplexní hodnoty: 1. $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$ (výsledek $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$ a $-\mathrm{i}$), 2. $\sqrt[4]{-1+\mathrm{i}}$ (výsledek $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{(3+8k)\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{(3+8k)\pi}{16}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$). Úloha 1.18. Najděte všechny hodnoty $\sqrt[3]{-2 + 2\mathrm{i}}$ a vyjádřete je v základním algebraickém tvaru, výsledek: $1+\mathrm{i}$, $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ a $\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$. Úloha 1.19. Najděte všechna řešení rovnice $z^6 = -8$, tj. nalezněte všechny hodnoty $\sqrt[6]{-8}$, výsledek $\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\pm\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Úlohy 1.20 – 1.34 se týkají zakreslování množin v komplexní rovině. Nakreslete množiny všech z takových, že: 1.20 $\Im(z) = -\mathrm{i}$ (množina je prázdná), 1.21 $|z + 3 - 5\mathrm{i}| = 3$ (obrázek 1.4, strana 23), 1.22 $1 < |z + \mathrm{i}| < 3$ (obrázek 1.5, strana 23), 1.23 $\Re(z) = \Im(z)$ (obrázek 1.6, strana 23), 1.24 $|z| + z = 0$ (obrázek 1.7, strana 23), 1.25 $|z - 1| = |z - 3|$ (obrázek 1.8, strana 24), 1.26 $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ (obrázek 1.9, strana 24), 1.27 $\Re(z) \geq C$ respektive $\Im(z) < C$ (obrázek 1.10, strana 24), 1.28 $0 < \Re(\mathrm{i}z) \leq 1$ (obrázek 1.11, strana 25), 1.29 $|z| = \Re(z)+1$ (obrázek 1.13, strana 25), 1.30 $\Re(z)+\Im(z) < 1$ (obrázek 1.12, strana 25), 1.31 $\Re\left(\frac{1}{z}\right) = C$ respektive $\Im\left(\frac{1}{z}\right) = C$ (obrázek 1.14, strana 26), 1.32 $|z - 2|+|z + 2| = 5$ (obrázek 1.15, strana 28), 1.33 $|z - 2|-|z + 2| > 3$ (obrázek 1.16, strana 28), 1.34 $\arg\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{6}$ (obrázek 1.17, strana 28). Úloha 1.35. se týká rozšířeného komplexního oboru a strereografické projekce, zadání i řešení se nacházejí od strany 29 do konce kapitoly.

9.2 Posloupnosti a řady

Úloha 2.1. Rozhodněte o konvergenci řad 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\mathrm{i}(-1)^{n-1}n}{n^2}$ (konverguje neabsolutně), 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^2}$ (konverguje absolutně), 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}$ (konverguje absolutně), 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}$ (konverguje absolutně), 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(1 + \mathrm{i})^n$ (konverguje absolutně), 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$ (diverguje). Úloha 2.2. Rozhodněte o konvergenci a určete součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{2^n}$ pro $\varphi \in \mathbb{R}$, výsledek: řada konverguje pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$ a součet je $\frac{4-2\cos\varphi}{5-4\cos\varphi}$. Úloha 2.3. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergují řady: 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{n^\alpha}$ (výsledek $\alpha > 0$), 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}}{n^\alpha}$ (výsledek $\alpha > 1$), 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n)}{n!}\mathrm{i}^n$ (výsledek: $\alpha < 0$).

9.3 Základy kalkulu v $\mathbb{C}$

Úloha 3.1. Ukažte, že neexistuje $\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$, viz strana 37. Úloha 3.2.. Uvažujeme $z = x + \mathrm{i}y$. Pouze s pomocí definice dokažte 1. $\lim_{z\to z_0}(az+b) = az_0+b$, 2. $\lim_{z\to 1-\mathrm{i}}(x + \mathrm{i}(2x + y)) = 1 + \mathrm{i}$, 3. $\lim_{z\to 2}(z^2 + \mathrm{i}z) = 4 + 2\mathrm{i}$, 4. $\lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{1}{z} = -\mathrm{i}$. Viz strany 38 – 39. Úloha 3.3. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0}\frac{\Re(z)}{z}$, výsledek: limita neexistuje. Úloha 3.4. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0}\frac{z}{|z|}$, výsledek: limita neexistuje. Úloha 3.5. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0}\frac{\Re(z^2)}{z}$, výsledek $\lim_{z\to 0}\frac{\Re(z^2)}{z} = 0$. Úloha 3.6. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\Im(z^2)}{z}}$, výsledek: $\lim_{z\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\Im(z^2)}{z}} = 1$. Úloha 3.7. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}\right)$, výsledek: limita neexistuje. Úloha 3.8. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{\Re(z)}$, kde 1. $z_0 = 0$ (výsledek: limita neexistuje), 2. $z_0 = \infty$ (výsledek ∞). Úloha 3.9. Spočítejte limity 1. $\lim_{z\to\infty}\frac{4z^2}{(z-1)^2}$ (výsledek 4), 2. $\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^3}$ (výsledek 0). Úloha 3.10. Vyšetřete existenci (a případnou hodnotu) limity $\lim_{z\to\infty} z\Re(z)$, výsledek: limita neexistuje. Úloha 3.11. Dodefinujte funkci $f(z) = \frac{z\Re(z)}{|z|}$ v 0 tak, aby byla spojitá v bodě $z = 0$, výsledek: $f(0) := 0$. Úloha 3.12. Určete definiční obory následujících funkcí (chápaných jako $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$). 1. $f(z) = \frac{3z+2\mathrm{i}}{z^2+4}$ (výsledek: $\mathbb{C}\setminus\{\pm 2\}$), 2. $f(z) = \frac{2\mathrm{i}z^2+5}{(z+\mathrm{i})^2(z-1)}$ (výsledek: $\mathbb{C}\setminus\{1,-\mathrm{i}\}$), 3. $f(z) = \frac{z^2\Im(z)}{|z|-2\Re(z)}$ (výsledek: $\{z\in\mathbb{C} \mid \Im(z) \neq \pm\sqrt{3}\Re(z)\}$), 4. $f(z) = \frac{3|z|\Re(z)}{5\Re(z)-2\Im(z)}$ (výsledek: $\{z\in\mathbb{C} \mid 2\Im(z)\neq 5\Re(z)\}$). Úloha 3.13. Určete množinu, na které jsou následující funkce $f\colon \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ spojité. 1. $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ (výsledek: $\tilde{\mathbb{C}}$), 2. $f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z^2-\mathrm{i}}$ (výsledek: $\tilde{\mathbb{C}}$), 3. $f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^z-1}$ (výsledek: $\mathbb{C}$). Úloha 3.14. Ukažte, že funkce $\arg z$ je spojitá všude kromě záporné reálné osy. Viz strany 44 – 48.

Úloha 3.15. Nechť $z = x + \mathrm{i}y$ a $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. Určete, kde má $f(z)$ derivaci: *1. $f(z) = \Re(z)$ (výsledek: f není nikde diferencovatelná), **1. $f(z) = z - \overline{z}$ (výsledek: f není nikde diferencovatelná), 1. $f(z) = z\Re(z) = (x + \mathrm{i}y)x$ (výsledek: f není nikde diferencovatelná), 2. $f(z) = |z|^2$ (výsledek: f je diferencovatelná pouze v 0 a $f'(0) = 0$), *2. $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}y^2$ (výsledek: $\{x + \mathrm{i}x \mid x\in\mathbb{R}\}$ a $f'(z) = 2\Re(z)$), 3. $f(z) = \frac{1}{z}$ (výsledek: $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ a $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$), 4. $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ (výsledek: f není nikde diferencovatelná), 5. $f(z) = \overline{z}\Im(z) = (x - \mathrm{i}y)y$ (výsledek: f je diferencovatelná pouze v 0 a $f'(0) = 0$), 6. $f(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos -y + \mathrm{i}\sin -y)$ (výsledek: f není nikde diferencovatelná). Úloha 3.16. Je-li funkce f komplexně diferencovatelná v bodě z_0, pak platí $f'(z_0) = u_x + \mathrm{i}v_x$. Určete $f'(z_0)$, je-li z vyjádřena v polárních souřadnicích. Viz strany 51 – 52. Úloha 3.17. Funkci f lze kromě tvaru $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ vyjádřit také pomocí polárních souřadnic jako $f(z) = U(r, \varphi) + \mathrm{i}V(r, \varphi)$. Ukažte, že pro komplexně diferencovatelnou funkci f v bodě $z \neq 0$ platí $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}$ a určete tvar Laplaceovy rovnice v polárních souřadnicích. Viz strany 52 – 53. Úloha 3.18. Nechť f splňuje C-R podmínky v $K(0, R)$ a položme $g(z) := \overline{f\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}$ pro $z\in\mathbb{C}\setminus K(0, R)$. Ukažte, že g splňuje také C-R podmínky (v polárních souřadnicích). Viz stranu 53. Úloha 3.19.

Uvažme funkci $f(z) = w = R(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ pro $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Ukažte, že pro $z \neq 0$ a $w \neq 0$ a diferencovatelnou funkci f platí $\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\varphi} = -r\frac{\partial\psi}{\partial r}$. Viz stranu 53.

Úloha 3.20. Nalezněte množinu, na které je funkce f holomorfrní, kde 1. $f(z) = 2\,|z| + 3\mathrm{i}$ (výsledek: f není holomorfní (ani diferencovatelná) nikde na $\mathbb{C}$), 2. $f(z) = \sin\overline{z}$ (výsledek: f není holomorfní nikde na $\mathbb{C}$). Úloha 3.21. Ukažte, že vztah mezi funkcí a funkcí k ní harmonicky sdruženou je antisymetrický. Viz stranu 55. Úloha 3.22. Ukažte, že pro holomorfní funkci f je holomorfní i $\overline{f(\overline{z})}$. Viz stranu 55. Úloha 3.23. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že $u(x,y) = \Re(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + x$, výsledek: $f(z) = z^2 + z + \mathrm{i}C$ pro $C \in \mathbb{R}$. Úloha 3.24. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že $v(x,y) = x + y - 3$, $f(0) = -3\mathrm{i}$, výsledek $f(z) = z + \mathrm{i}z - 3\mathrm{i}$. Úloha 3.25. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že $v(x,y) = \ln(x^2+y^2) - x^2 + y^2$, výsledek: $f(z) = \mathrm{i}\log(-z^2) - \mathrm{i}z^2 + C$ pro $C \in \mathbb{R}$. Úloha 3.26. Najděte holomorfní funkci f takovou, že $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, výsledek: $f(z) = \frac{\mathrm{i}}{z} + \mathrm{i}C$ pro $C \in \mathbb{R}$. Úloha 3.27. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že $u(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y)$, výsledek: $z\mathrm{e}^z + \mathrm{i}C$, $C \in \mathbb{R}$. Úloha 3.28. Najděte holomorfní funkci $f(z)$ takovou, že 1. $u(x,y) = x^2 + y^2$ (výsledek: funkce neexistuje), 2. $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ na množině $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (výsledek: funkce na takovéto množině neexistuje).

9.4 Funkční a mocninné řady

Úloha 4.1. Určete poloměr konvergence R následujících mocninných řad. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (výsledek: $R = 1$), 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (výsledek: $R = \infty$), 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ (výsledek: $R = 0$), 4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$ (výsledek: $R = 2$), 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ (výsledek: $R = \mathrm{e}$), 6. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ (výsledek: $R = 1$), 7. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$ (výsledek: $R = 1$), 8. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n z^n$ (výsledek: $R = \frac{1}{4}$), 9. $\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$, $a \geq 0$ (výsledek: $R = \min\left\{1, \frac{1}{a}\right\}$). Úloha 4.2. Určete poloměr konvergence pro řadu $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$, výsledek: $R = 4$. Úloha 4.3. Určete poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n} \left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, výsledek: $R = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$. Úloha 4.4. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ konverguje pro $|z| < 1$. Viz stranu 66. Úloha 4.5. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$, výsledek: $\overline{K(-2,4)}$. Úloha 4.6. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$, výsledek: $K(0,2)$. Úloha 4.7. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n}$, výsledek: $\overline{K(0,1)} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Úloha 4.8. Nechť $p \in \{\pm 1, -2\}$. Vyšetřeme konvergenci pro $\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n$, výsledek: pro $p = 1$ je to $K(0,1)$, pro $p = -2$ $\overline{K(0,1)}$ a pro $p = -1$ pak $\overline{K(0,1)} \setminus \{1\}$. Úloha 4.9. Určete obor konvergence pro řadu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} z^{3n}$, výsledek: $\overline{K(0,1)} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Úloha 4.10. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$, výsledek: $\frac{z}{(1-z)^2}$. Úloha 4.11. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^n$, výsledek: $-\frac{z}{(1+z)^2}$. Úloha 4.12. Ukažte, že funkční (nikoli mocninná) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2+z^n+z^{5n}}$ konverguje na $K(0,1)$. Viz strany 70 – 71. Úloha 4.13. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$ konverguje pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Ukažte, že konvergence je stejnoměrná na libovolné kompaktní množině v $\mathbb{C}$ neobsahující žádné $z \in \mathbb{N}$. Viz strany 71 – 72. Úloha 4.14. Najděte řadu takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$ konverguje pro každé

$k \in \mathbb{N}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ diverguje, řešení: např. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \varphi n}}{\ln(n+1)}$. Úloha 4.15. Nechť $z_n \in \mathbb{C}$ takové, že $\Re(z_n) \geq 0$, $\sum z_n$ konverguje, $\sum z_n^2$ konverguje. Ukažte, že pak i $\sum |z_n|^2$ konverguje. Dejte protipříklad, pokud z_n může mít i zápornou reálnou část. Viz stranu 72.

9.5 Elementární funkce

Úloha 5.1. Geometricky interpretujte lineární a lineární lomenou funkci jako zobrazení komplexní roviny na sebe. Viz strany 73 – 75. Úloha 5.2. Určete obraz 1. kružnice, na níž leží body $-\mathrm{i}$, i a 1, v zobrazení $f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ (výsledek: osa $\Im(z)$), 2. množiny $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 1\}$ v zobrazení $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ (výsledek: kružnice se středem v bodě $1+\mathrm{i}$ a poloměrem 1).

Úloha 5.3. Vypočtěte hodnotu $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}\pi}$, výsledek $-\mathrm{e}$. Úloha 5.4. Zobrazte ve funkci e^z množiny všech $z \in \mathbb{C}$ takových, že 1. $\Im(z) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$, 2. $\Re(z) = 0$ (tj. osu $\Im(z)$), 3. $\Re(z) = C$, kde (a) $C > 0$ (b) $C < 0$, 4. $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\alpha < 0$ a $\beta \in \mathbb{R}$. Viz strany 77 – 78.

Úloha 5.5. Vypočtěte 1. $\cos(2+\mathrm{i})$ (výsledek $\frac{1+\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}} \cos 2 + \mathrm{i}\frac{1-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}} \sin 2$), 2. $\sin 2\mathrm{i}$ (výsledek $\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^4-1}{2\mathrm{e}^2}$), 3. $\sinh(1-\mathrm{i})$ (výsledek $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}} \cos 1 - \mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}} \sin 1$), 4. $\cosh(-1-\mathrm{i})$ (výsledek $\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}} \cos 1 + {} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}} \sin 1$). Úloha 5.6. Vyřešte $\sin z = 2$, výsledek $\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Úloha 5.7. Vyřešte $\sinh z = \mathrm{i}$, výsledek $\mathrm{i}\frac{\pi}{2} + 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Úloha 5.8. S využitím komplexní funkce e^z dokažte $\frac{1}{2} + \cos z + \cdots + \cos nz = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{1}{2}z}$. Viz stranu 81. Úloha 5.9. Nechť $I_m := \int_0^{2\pi} \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cdots \cdot \cos(mx)\,\mathrm{d}x$. Pro která $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ je $I_m \neq 0$? Výsledek: $m \in \{3, 4, 7, 8\}$. Úloha 5.10. Zobrazte funkcí $\sin z$ množiny všech $z \in \mathbb{C}$ takových, že 1. $\Re(z) = \frac{\pi}{2}$, $\Im(z) \geq 0$, 2. $\Re(z) = -\frac{\pi}{2}$, $\Im(z) \leq 0$, 3. $\Re(z) = 0$ (tj. osu $\Im(z)$), 4. $\Re(z) = C$, kde (a) $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, (b) $C \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 5. $\Im(z) = C$, kde (a) $C > 0$ a $\Re(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, (b) $C < 0$ a $\Re(z) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 6. $\Im(z) = 0$ a $\Re(z) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (tj. interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$). Viz strany 82 – 84.

Úloha 5.11. Vypočtěte hlavní hodnoty (tj. s $\arg z \in [-\pi, \pi)$) 1. $\log \mathrm{i}$ (výsledek $\mathrm{i}\frac{\pi}{2}$), 2. $\log \frac{1\pm\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ (výsledek $\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}$), 3. $\log(2-3\mathrm{i})$ (výsledek $\frac{1}{2}\ln 3 - \mathrm{i}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}$), 4. $\log(-2+3\mathrm{i})$ (výsledek $\frac{1}{2}\ln 3 + \mathrm{i}\left(\pi - \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}\right)$), 5. $\log(1+\mathrm{i})$ (výsledek $\frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$), 6. $\log(-2)$ (výsledek $\ln 2 - \mathrm{i}\pi$), 7. $\log(2+3\mathrm{i})$ (výsledek $\frac{1}{2}\ln 3 + \mathrm{i}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}$), 8. $\log\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$ (výsledek $\mathrm{i}\frac{\pi}{3}$), *8. $\mathrm{Log}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$ (výsledek $\mathrm{i}\frac{\pi}{3} + 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$). Úloha 5.12. Ukažte následující identity pro funkci Log: $\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$, $\mathrm{Log}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Log}\, z_1 - \mathrm{Log}\, z_2$, $\mathrm{Log}\,\frac{1}{z} = -\mathrm{Log}\, z$ a $\mathrm{Log}\, z^n = \underbrace{\mathrm{Log}\, z + \cdots + \mathrm{Log}\, z}_{n} \neq n\,\mathrm{Log}\, z$, kde operace na pravé straně bereme množinové. Viz strany 85 – 87. Úloha 5.13. Určeme všechna z taková, že 1. $\mathrm{e}^z = 2+3\mathrm{i}$ (výsledek $\frac{1}{2}\ln 3 + \mathrm{i}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$), 2. $\mathrm{e}^{\overline{z}} = -3\mathrm{i}$ (výsledek $\ln 3 - \mathrm{i}\frac{4k-1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Úloha 5.14. Za použití definičního vzorce $z^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Log}\, z}$ vypočtěte 1. 2^{i} (výsledek $\mathrm{e}^{-2k\pi}(\cos\ln 2 + \mathrm{i}\sin\ln 2)$), 2. $1^{-\mathrm{i}}$ (výsledek $\mathrm{e}^{2k\pi}$), 3. $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathrm{i}}$ (výsledek $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$),

4. $\mathrm{i}^{\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}}$ (výsledek $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\left(\cos\frac{(4k+1)\pi\sqrt{3}}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{(4k+1)\pi\sqrt{3}}{4}\right)$), 5. i^{π} (výsledek $\cos\frac{4k+1}{2}\pi^2 + \mathrm{i}\sin\frac{4k+1}{2}\pi^2$), 6. i^{i} (výsledek $\mathrm{e}^{-\frac{4k+1}{2}\pi}$), 7. $(-1)^{\mathrm{i}}$ (výsledek $\mathrm{e}^{\pi-2k\pi}$), 8. $(3-4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$ (výsledek $5\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-2k\pi}\left(\cos\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$), 9. $\mathrm{i}^{\frac{1}{\mathrm{i}}}$ (výsledek $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-2k\pi}$), kde $k\in\mathbb{Z}$. Úloha 5.15. Vyšetřete vlastnosti obecných mocnin 1. z^{i}, 2. z^{π}, 3. $z^{\frac{2}{3}}$. Viz strany 88 – 90. Úloha 5.16. Nechť $a, b\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Rozhodněte, zda platí následující (množinové) rovnosti. 1. $\operatorname{Log} z^c \stackrel{?}{=} c\operatorname{Log} z$, 2. $z^a z^b \stackrel{?}{=} z^{a+b}$, 3. $(z_1z_2)^a \stackrel{?}{=} z_1^a z_2^a$, 4. $(z^a)^b \stackrel{?}{=} z^{ab}$. Řešení se nachází od strany 90 dále do konce kapitoly.

9.6 Křivkový integrál a Cauchyho teorie

Úlohy 6.1 – 6.10 jsou cvičeními na počítání integrálů přímo z definice (tj. nepoužívejte Cauchyho teorii), ostatní jsou pak cvičeními na Cauchyho teorii.

Úloha 6.1. Vypočtěte $\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$, kde γ je úsečka z -1 do 3, výsledek 4. Úloha 6.2. Vypočtěte $\int_\gamma |z|\,\mathrm{d}z$ kde γ je horní (jednotková) půlkružnice z 1 do -1, výsledek -2. Úloha 6.3. Vypočtěte $\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$ kde γ je horní půlkružnice od -1 do 1, výsledek $-\mathrm{i}\pi$. Úloha 6.4. Vypočtěte $\int_\gamma \Re(z)\,\mathrm{d}z$ kde γ je lomená čára spojující body 0, 1, $1+\mathrm{i}$, výsledek $\frac{1}{2}+\mathrm{i}$. Úloha 6.5. Vypočtěte $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$ kde γ je kružnice se středem v z_0 a poloměrem r podle (6.1), strana 95, a také jako křivkový integrál, výsledek $2\pi\mathrm{i}$. Úloha 6.6. Vypočtěte jako křivkový integrál v $\mathbb{R}^2$ $\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$ kde γ je 1. kružnice se středem v 2 a poloměrem 1 (viz obrázek 6.4a, strana 98, výsledek 0), 2. čtverec se středem v 0 a délkou strany $2a>0$ (viz obrázek 6.4b, výsledek $2\pi\mathrm{i}$). Úloha 6.7. Vypočtěte $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ pro γ lomenou čáru mezi body R, $\mathrm{i}R$, $-R$ (viz obrázek 6.3, strana 96), výsledek $\mathrm{i}\pi$. Úloha 6.8. Vypočtěte $\int_\gamma \Re(z)\,\mathrm{d}z$, kde 1. γ je kružnice se středem v 0 a poloměrem $R>0$ (viz obrázek 6.4a, strana 98, výsledek $\mathrm{i}\pi R^2$), 2. γ je horní půlkružnice se středem v 0 a poloměrem $R>0$ (podobně jako obrázek 6.1, strana 96, výsledek $\frac{\mathrm{i}}{2}\pi R^2$), 3. γ je lomená čára od $R>0$ přes $\mathrm{i}R$ do $-R$ (stejná křivka jako v úloze 6.7, výsledek $\mathrm{i}R^2$). Úloha 6.9. Vypočtěte $\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$ pro γ vzniknuvší složením úsečky 0 do 1, části jednotkové kružnice z 1 do $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ a úsečky z $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ do 0 (viz obrázek 6.5, strana 101), výsledek $\frac{\pi\mathrm{i}}{4}$. Úloha 6.10. Vypočtěte $\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$ pro křivku γ vzniklou složením dvou úseček a dvou půlkružnic dle obrázku 6.6, strana 101, výsledek $7\pi\mathrm{i}$.

Úloha 6.11. Vypočtěte hodnotu $I=\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z$ pro $\gamma\colon\ |z-3+5\mathrm{i}|=\frac{1}{2}$ kladně orientovanou, výsledek 0. Úloha 6.12. Vypočítejte $I=\int_\gamma \sin\mathrm{i}z\,\mathrm{d}z$, kde γ je libovolná křivka $0\mapsto\pi\mathrm{i}$, výsledek $-2\mathrm{i}$. Úloha 6.13. Vypočítejte $I=\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+1)^2}$ a $\Gamma\colon\ |z|=\frac{1}{2}$ bez použití Cauchyho vzorce, výsledek $2\pi\mathrm{i}$. Úloha 6.14. Vypočítejte $\int_\Gamma \frac{z+1}{(z^2+1)(z-2)^2(z+3\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}z$, $\Gamma\colon\ \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|=1$, výsledek $\frac{\pi}{425}-\frac{\pi\mathrm{i}}{85}$. Úloha 6.15. Vypočítejte $\int_\gamma \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^3+z^2+z+1}$ kde γ je kladně orientovaná po částech lineární křivka, pro niž je $[\gamma]$ obvod obdelníka s vrcholy $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+2\mathrm{i}$, $-\frac{1}{2}+2\mathrm{i}$, výsledek $\frac{1-\mathrm{i}}{4}2\pi\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}(1+\mathrm{i})$. Úloha 6.16. Spočítejte $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$, $\gamma\colon\ |z-1|=1$ je kladně orientovaná, výsledek $2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}$. Úloha 6.17. Spočítejte $\int_\gamma \frac{z^2}{z+5-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$, $\gamma\colon\ |z+\mathrm{i}|=1$ je kladně orientovaná, výsledek 0. Úloha 6.18. Spočítejte $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-z_0)}$, $\gamma(t)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t\in[0,2\pi]$, $r>0$, výsledek 0, pokud $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$ a $-\frac{2\pi i}{z_0}$, pokud $z_0 \in \operatorname{Ext}\gamma$. Úloha 6.19. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{dz}{z(z^2+4)}$, kde $\gamma\colon |z| = 1$ je kladně orientovaná, výsledek $\frac{\pi i}{2}$. Úloha 6.20. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$, kde $\gamma\colon |z-i| = 1$ je kladně orientovaná, výsledek π. Úloha 6.21. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$, kde $\gamma\colon |z-i| = 3$ je kladně orientovaná, výsledek 0. Úloha 6.22. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz$, kde $\gamma(t) = \frac{i}{2} + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, výsledek $\pi\frac{1+e^2}{2e}$. Úloha 6.23. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,dz$, kde $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, výsledek $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$. Úloha 6.24 je shrnutím úloh 6.20 a 6.21. Úloha 6.25. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$ pro $\gamma\colon |z+1| = 1$, výsledek $-\frac{\pi i}{4}$. Úloha 6.26. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{ze^z}{(z-a)^3}\,dz$, kde γ je libovolná kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ taková, že $a \in \operatorname{Int}\gamma$, výsledek $\pi i(2+a)e^a$. Úloha 6.27. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$, kde 1. $\gamma\colon |z| = \frac{1}{2}$ (výsledek $2\pi i$), 2. $\gamma\colon |z-1| = \frac{1}{2}$ (výsledek $-e\pi i$). Úloha 6.28. Vypočítejte $\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{(z^2-1)^2}\,dz$, $\gamma(t) = 1 + \cos t + \frac{i}{2}\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, výsledek $\frac{\pi i}{2}e^\pi(\pi - 1)$. Úloha 6.29. Vypočítejte $I = \int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$, kde $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, výsledek $(2-e)\pi i$.

Úloha 6.30. Spočítejte tzv. Fresnelovy integrály $\int_0^\infty \cos t^2\,dt$, $\int_0^\infty \sin t^2\,dt$, výsledek: oba jsou rovny $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$. Viz strany 108 – 109. Úloha 6.31. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Viz strany 109 – 110. Úloha 6.32. Dokažte $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ pro $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Viz od strany 110 do konce kapitoly.

9.7 Taylorův a Laurentův rozvoj

Úloha 7.1. Funkci $f(z) = \frac{1}{3-z}$ rozviňte v Taylorovu řadu v $K(0,r)$ a $K(-1+3i, r)$ a stanovte největší možné r, výsleddky: na $K(0,3)$ je $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{3^{n+1}}$ a na $K(-1+3i, 5)$ je $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z+1-3i)^n}{(4-3i)^{n+1}}$. Úloha 7.2. Určete Taylorův rozvoj pro $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ v $K(0,r)$, výsledek: na $K(0,1)$ je $f(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^{2n}$. Úloha 7.3. Funkci $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2}$ rozviňte v Taylorovu řadu na $K(0,r)$ a na $K(1,r)$ a stanovte nejvyšší možné r, výsledky: na $K(0,1)$ je $f(z) = \sum_{n=2}^\infty (-1)^n(n-1)z^n$ a na $K(1,2)$ je $f(z) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n-3}{2^{n+2}}(z-1)^n$. Úloha 7.4. Určete Taylorův rozvoj pro funkci $f(z) = \log(1+z)$ v $K(0,r)$, výsledek: na $K(0,1)$ je $f(z) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} z^n$. Úloha 7.5. Určete Taylorův rozvoj pro $f(z) = \log z$ na $K(2,r)$, výsledek: na $K(2,2)$ je $f(z) = \ln 2 - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2^n n}(z-2)^n$. Úloha 7.6. Určete první čtyři členy Taylorova rozvoje funkce $f(z)$ v okolí $z_0 = 0$, kde 1. $f(z) = e^{z\sin z}$ (výsledek $f(z) = 1 + z^2 + \cdots$), 2. $f(z) = (1+z)^z$ (výsledek $f(z) = 1 + z^2 - \frac{1}{2}z^3 + \cdots$). Úloha 7.7. Ukažte, že platí: Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je n-násobným nulovým bodem holomorfní funkce f, tj. $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(n)}(z_0)$, právě tehdy, když v jistém okolí $\mathscr{O}(z_0)$ lze f vyjádřit ve tvaru $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$, kde g je holomorfní funkce v $\mathscr{O}(z_0)$ a $g(z_0) \neq 0$. Viz stranu 116. Úloha 7.8. Určete všechny nulové body funkce $f(z) = z\sin z$ a určete jejich násobnost, výsledek: 0 je dvojnásobný nulový bod, $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ jsou jednoduché nulové body.

Úloha 7.9. Určete Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z-2}$ v prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a $z_0 = 2$, výsledky: v okolí 0 máme $-\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{2^{n+1}}$ a v okolí 2 máme $\frac{1}{z-2}$. Úloha 7.10. Určete

Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ v okolí $z_0 = 0$ a $z_0 = 1$, výsledky: na $P(0,0,1)$ máme $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ a na $P(1,0,1)$ je $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$. Úloha 7.11. Určete Laurentovu řadu pro funkci $f(z) = \frac{1}{1+z}$ se středem v $z_0 = 1$, výsledek: na $K(1,2)$ je $f(z) = = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$ a na $P(1,2,\infty)$ je $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^n$. Úloha 7.12. Určete Laurentovu řadu pro funkci $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ v mezikruží konvergence 1. $1 < |z-1| < \infty$ (výsledek $\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{n+1}(z-1)^n$), 2. $1 < |z| < \infty$ (výsledek $-\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$). Úloha 7.13. Určete všechny Laurentovy rozvoje funkce $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ se středem v nulových bodech jmenovatele, výsledky: na $P(1,0,1)$ $-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$, na $P(1,1,\infty)$ $\sum_{n=-\infty}^{-2}(z-1)^n$, na $P(2,0,1)$ $\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n$ a na $P(2,1,\infty)$ $\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n(z-2)^n$. Úloha 7.14. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ se středem v $z_0 = 0$ v mezikruží $2 < |z| < 3$, výsledek $-\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} z^n$. Úloha 7.15. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ v okolí $z_0 = \mathrm{i}$, výsledek $-\frac{1}{4}\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} - \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{1}{z-\mathrm{i}} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}(1 - - n)(z-\mathrm{i})^n$. Úloha 7.16. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ v okolí $z_0 = = 2$ (výsledek $\frac{1}{z-2} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2+\mathrm{i})^{n+1}-(2-\mathrm{i})^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$) a v mezikruží $1 < |z| < 2$ (výsledek $2\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$). Úloha 7.17. Určete všechny Laurentovy řady pro funkci $f(z) = \frac{2z^2+6z-2\mathrm{i}}{z(z-\mathrm{i})(z+2)}$ se středem v $z_0 = 0$, výsledky: na $P(0,0,1)$ $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(- -1)^n \frac{(2\mathrm{i})^{n+1}-1}{2^n} z^n$, na $P(0,1,2)$ $2\sum_{n=-\infty}^{-2}(-\mathrm{i})^{n+1}z^n + \frac{3}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^n$ a na $P(2,2,\infty)$ $\sum_{n=-\infty}^{-2}\left(2(-\mathrm{i})^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) z^n + \frac{2}{z}$. Úloha 7.18. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = = \sin^2 z$ na okolí $z_0 = 0$, výsledek $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k}}{(2m+1)!(2k-m-1)!}$. Úloha 7.19. Určete několik prvních členů Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \frac{1}{(\mathrm{e}^z-1)\sin z}$ se středem v 0, výsledek $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + + \frac{1}{4} - \frac{z}{12} + \cdots$. Úloha 7.20. Určete Laurentovu řadu pro $f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}$ na $|z-1| > \sqrt{2}$, výsledek $\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{n+1}(1-\mathrm{i})^{-n-2}(n+1)(z-1)^n$. Úloha 7.21. Určete Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$ v $P(1,0,\infty)$, výsledek $\sin 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\cos 1}{(z-1)^{2n-1}(2n-1)!} - \frac{\sin 1}{(z-1)^{2n}(2n)!}\right)$.

9.8 Teorie reziduí

Úloha 8.1. Určete a klasifikujte singulární body funkcí 1. $z^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ (výsledek: 0 je podstatná singularita a ∞ je pól řádu 2), 2. $\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$ (výsledek: 1 je podstatná singularita, jinde je funkce holomorfní), 3. $\sin \frac{1}{z}$ (výsledek: 0 je podstatná singularita, jiné singulární body nejsou), 4. $\cos z$ (výsledek: ∞ je podstatná singularita), 5. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ (výsledek: v $\pm\mathrm{i}$ jsou póly řádu 2), 6. $\frac{1}{\mathrm{e}^z-1} - \frac{1}{z}$ (výsledek: v 0 je odstranitelná singularita, v $2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jsou jednoduché póly, ∞ je hromadný bod pólů), 7. $\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}$ (výsledek: 0 je odstranitelná singularita, ∞ je podstatná singularita), 8. $\frac{z^3}{z-1}$ (výsledek: 1 je pól řádu 1 a ∞ je pól řádu 2), 9. $\operatorname{tg} z$ (výsledek: $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jsou jednoduchými póly, ∞ je jejich hromadný bod), 10. $\frac{\sin z}{z}$ (výsledek: 0 je odstranitelná singularita, ∞ je podstatná singularita). Úloha 8.2. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{1}{z^3-z^5}$, výsledek: $\operatorname{res}_1 f = \operatorname{res}_{-1} f = \frac{1}{2}$, $\operatorname{res}_0 f = 1$. Úloha 8.3. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$, výsledek: $\operatorname{res}_{\pm \mathrm{i}} f = \mp \frac{\mathrm{i}}{4}$. Úloha 8.4. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, výsledek: pro $k \in \mathbb{Z}$ jsou $\operatorname{res}_{k\pi} f = (-1)^k$. Úloha 8.5. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$, výsledek: $\operatorname{res}_{-1} f = 2\sin 2$. Úloha 8.6. Vypočtěte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^z-1}$, výsledek: pro $k \in \mathbb{Z}$ máme $\operatorname{res}_{2k\pi\mathrm{i}} f = 1$. Úloha 8.7. Vypočtěte rezidua funkce $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+k^2}$, výsledek: pro $k = 0$ máme $\operatorname{res}_0 f = \frac{\mathrm{i}}{2}$, pro $k \neq 0$ je $\operatorname{res}_{\pm \mathrm{i}k} f = \mp \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mp k}}{2k}$. Úloha 8.8. Vypočtěte rezidua funkce $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ pro $n \in \mathbb{N}$, výsledek $\operatorname{res}_{-1} f = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$. Úloha 8.9. Určete rezidua pro funkci $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, výsledek $\operatorname{res}_0 f = 1$. Úloha 8.10. Určete reziduum pro funkci $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$, výsledek $\operatorname{res}_1 f = -1$. Úloha 8.11. Určete reziduum pro funkci $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$, výsledek $\operatorname{res}_{-1} f = 2\sin 2$. Úloha 8.12. Pomocí reziduí vypočtěte $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, kde $\Gamma\colon\ |z| = \frac{1}{2}$ je kladně orientovaná kružnice, výsledek $2\pi\mathrm{i}$. Úloha 8.13. Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, kde $\Gamma\colon\ |z+1+\mathrm{i}| = 2$ je kladně orientovaná kružnice, výsledek $\pi \sin 1 + \mathrm{i}(2\pi - \pi\cos 1)$. Úloha 8.14. Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2+\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z$ kde $\Gamma\colon\ |z+\mathrm{i}| = 3$ je kladně orientovaná kružníce, výsledek $\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}\pi\mathrm{i}$. Úloha 8.15. Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$ kde $\Gamma\colon\ |z+\mathrm{i}| = 1$, výsledek 0. Úloha 8.16. Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{3+2\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z$ kde $\Gamma\colon\ |z| = 2$, výsledek $10\pi\mathrm{i}$. Úloha 8.17. Vypočtěte $\int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z$ podél křivky $\Gamma\colon \Re(z)^2 + \Im(z)^2 = 2\Re(z)$, výsledek $-\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$. Úloha 8.18. Vypočtěte $I = \int_\Gamma \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}$, kde $\Gamma\colon\ |z-2| = \frac{1}{2}$, výsledek: $I = -2\pi\mathrm{i}$. Úloha 8.19. Vypočtěte $I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-3)(z^5-1)}$, kde $\Gamma\colon\ |z| = 2$, výsledek: $I = -\frac{\pi\mathrm{i}}{121}$. Úloha 8.20. Vypočtěte $I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$, kde $\Gamma(t) = 2\cos^3 t + 2\mathrm{i}\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, výsledek: $I = \frac{3\pi\mathrm{i}}{64}$. Úloha 8.21. Vypočtěte $I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$, kde $\Gamma(t) = (1+2\cos t) + \mathrm{i}(1+2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, výsledek: $-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$. Úloha 8.22. Vypočtěte (reálný) integrál $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5-4\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$, výsledek $-\frac{\pi}{12}$.

Úloha 8.23. Vypočtěte 1. $I_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (výsledek $\frac{\pi}{\mathrm{e}}$), 2. $I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$ (výsledek 0). Úloha 8.24. Vypočítejte $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, výsledek $\frac{\pi}{2}$. Úloha 8.25. Vypočítejte 1. $I_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ a $I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ (výsledek: $I_c = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(-\cos\frac{1}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\right)$ a $I_s = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2}\right)$), 2. $I_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$ a $I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$ (výsledek: $I_c = \frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$ a $I_s = \frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(3\cos 1 + \sin 1)$), 3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$ (výsledek: $\frac{\pi}{18}(16\mathrm{e}^{-5}+\mathrm{e}^{-10})$). Úloha 8.26. Vypočítejte $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2p\cos x+p^2}$ kde $p \in \mathbb{R}$ tak, že $0 < |p| < 1$, výsledek $\frac{2\pi}{1-p^2}$. Úloha 8.27. Vypočítejte 1. $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{a^2+b^2-2ab\cos x}\,\mathrm{d}x$ kde $b > a > 0$ (výsledek: $\frac{\pi a^2}{b^2(b^2-a^2)}$), 2. $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+a\cos t}$ kde $|a| < 1$ (výsledek: $I = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$). Úloha 8.28. Vypočítejte $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$, výsledek $\frac{2}{3}\pi$. Úloha 8.29. Vypočítejte 1. $I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^4}$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (výsledek: $\frac{5\pi}{32a^7}$), 2. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}$ (výsledek: $I = -\frac{\pi}{27}$). Úloha 8.30. Nechť $-1 < a < 1$ a $b > 0$. Vypočítejte $I = \int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x$, výsledek $\frac{\pi b^{a-1}}{2\cos\frac{\pi a}{2}}$. Úloha 8.31. Uvažme $0 < a < 1$. Vypočítejte 1. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$ (výsledek: $\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}}$), 2. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ (výsledek: $I = \frac{\pi}{\sin \pi a}$). Úloha 8.32. Vypočítejte $I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$, výsledek $-\frac{\pi}{4}$. Úloha 8.33. Vypočítejte $I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$, výsledek $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Literatura

[1] ZEMÁNEK, Petr. *Útržky z analýzy v komplexním oboru*, Brno: Masarykova univerzita, 23. října 2020.

[2] ASMAR, Nakhlè H. *Applied Complex Analysis with Partial Differential Equations*. Ilustrované vydání. Hoboken, New Jersey: Prentice Hall, 2002, 883 s. ISBN 978-0-1308-9239-3.

[3] CONRAD, Keith. *The Gaussian integral*, Storr, Connecticut, University of Connecticut. Dostupné z: `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf`

[4] HILLE, Einar. *Analytic Function Theory, Volume I.* Second Edition. Providence: American Mathematical Society, 1959. ISBN 978-0-8218-7568-1.

[5] NEČAS, David. *Yetiho typografický bestiář*. Brno: Masarykova univerzita, 19. května 2003. Dostupné z: `https://www.physics.muni.cz/~yeti/tex/bestiary.pdf`